

可压缩流与欧拉方程

Compressible Flow and Euler's Equations

Demetrios Christodoulou　缪爽　著

高等教育出版社



可压缩流与欧拉方程

Compressible Flow and Euler's Equations

■ Demetrios Christodoulou　缪爽　著

KE YASUO LIU YU OULA FANGCHENG

高等教育出版社·北京　　International Press

图书在版编目（C I P）数据

可压缩流与欧拉方程 /（希）克里斯托多罗（Christodoulou, D.），缪爽著. -- 北京：高等教育出版社，2014.8

书名原文：Compressible flow and Euler's equations

ISBN 978-7-04-040099-1

Ⅰ. ①可… Ⅱ. ①克… ②缪… Ⅲ. ①可压缩流－研究②欧勒方程－研究 Ⅳ. ① O351.2 ② O175.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 129570 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李　鹏　　封面设计 王　洋　　版式设计 马敬茹

责任校对 刘　莉　　责任印制 田　甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×960 mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	42	版　　次	2014年8月第1版
字　　数	820千字	印　　次	2014年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	98.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 40099-00

《丘成桐主编数学翻译丛书》序

改革开放以后, 国内大学逐渐与国外的大学增加交流. 无论到国外留学的学者还是到中国访问的学者数量每年都有增长, 对中国的科学现代化大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写, 有些已经比较陈旧, 跟不上时代的发展. 很多国家, 例如俄罗斯、日本等, 都大量翻译外文书来增加本国国民的阅读内容, 对数学的研究大有裨益. 高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴及此, 开始计划做有系统的翻译, 由王元院士领导, 北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织这项工作. 参与的教授很多, 有杨乐院士, 刘克峰教授等. 我们希望这套翻译书能够使大学生有更多的角度来看数学, 丰富他们的知识. 对这套丛书的出版, 海外的出版公司如美国数学会等多有帮助, 我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
2005 年 1 月

引言

描述理想流体运动的方程最早是由 Euler 在 1752 年推导的 (见 [9] 和 [10]), 部分是以 D. Bernoulli [1] 早期的工作为基础. 如果不算 D'Alembert 在 1749 年导出的在线性逼近意义下描述弦振动的一维波动方程 (见 [8]), 这些方程似乎是最早被写下来的偏微分方程. 然而与 D'Alembert 推导的方程相比, 在接下来的两个半世纪之后, 我们仍然没能很好地理解那些应该能由 Euler 方程描述的物理现象.

这些在流体内部表现出来的物理现象主要有两大类, 即声音现象 (其线性化理论是声学) 和涡量的运动. 声音的传播依赖于流体的可压缩性, 而涡量的运动则出现在不可压缩流体的情形. 激波的形成, 即本书的主题, 是属于声音传播的范畴, 但却超出了线性声学理论的范畴, 属于非线性理论.

让我们回顾一下流体中声音传播的研究历史, 特别是非线性理论中激波形成的现象. 当这些运动方程被写下来的时候, 热力学还未进入它流行的时期, 然而在那时已经清楚的是, 由惯性系观察者所看到的流体状态是由两个热力学量所决定的, 比如压力和温度. 在这两个热力学量中, 只有压力出现在运动方程中, 而运动方程同样依赖于流体的密度. 在那时候, 大家已经知道, 对于给定的流体, 密度是压力和温度的函数. 然而在缺少另一个方程的前提下, 除去不可压缩极限的情形, Euler 导出的由连续性方程和动量方程组成的方程组是欠定的. 这个所缺少的方程是由 Laplace 在 1816 年补充的 (见 [13]), 它在后来被称为绝热方程, 这使得 Laplace 能

够第一次准确计算了声速.

第一个关于激波形成的工作是由 Riemann 在 1858 年完成的 (见 [17]). Riemann 考虑了具有平面对称性质的等熵流, 他把运动方程化为了一个具有两个自变量 (时间变量和一维空间变量) 的两个未知函数守恒律系统. 对于这样的系统他引入了所谓的 Riemann 不变量, 借助于这些不变量他证明了起始于光滑初值的解会在有限时间内产生无穷大的梯度.

1865 年, Clausius [7] 在理论物理中引入了熵的概念, 绝热性条件被理解为每个流体元的熵在其发展的过程中恒为常数.

关于三维流体奇性形成的第一个一般性的结果由 T. Sideris 在 1985 年得到 (见 [18]). Sideris 考虑了绝热常数 $\gamma > 1$ 的理想气体的可压缩 Euler 方程, 其初值在一个球面外对应于常状态. 他对初值有如下假设: 存在一个环状区域, 其球面外边界是常状态. 内边界是一个同心球面, 在这个环状区域上, 关于 $\rho - \rho_0$ 的一个积分是正的, 这里 ρ_0 表示常状态的密度; 同时在同一块区域上的关于径向动量密度 ρv^r 的某个积分要非负. 这些积分的核都是关于到原点距离的函数. 同样这里也要求环状区域上的熵 s 不比常状态的熵 s_0 小. 结论则是光滑解关于时间的存在区间是有限的. 这个定理的最大缺陷是它没告诉我们任何有关奇性形成的机制. 同样这个定理的证明方法依赖于如下事实: 即在理想气体情形下, 方程中压力是关于密度的严格凸函数, 并且这个方法不能拓展到任何更一般的情形.

2007 年 Christodoulou 得到了关于三维流体激波形成的最新、最完整的结果 (见 [5]). Christodoulou 考虑了三维空间中理想流体关于任意状态方程的相对论 Euler 方程. 他在 Minkowski 时空的一个类空超曲面 Σ_0 上考虑了光滑初值, 该初值在一个球面外对应于常状态. 他考虑了初值在 Σ_0 中一个同心球面外的限制, 并且考虑这一部分初值对应的最大发展. 如果初值与常状态之间的差足够小, 他可以证明一系列的定理, 用来完整地描述最大发展. 特别地, 这些定理可以给出最大解定义域边界详细的几何描述以及解在该边界行为的详细分析.

本书的主要目的是对经典的、非相对论的可压缩 Euler 方程关于等熵无旋的初值给出相类似的结果, 并且给出关于这些结果的一个更简单并且自成体系的证明. 事实上本书不仅给出了更简单的证明, 并且还将某些结果做得更加精细. 更进一步, 本书深入地解释了证明背后的某些想法. 最后我们还讨论了仅存在于非相对论情形的一些几何性质.

接下来我们解释一下本书证明中的基本想法 (这对于相对论情形同样适用). 这个基本的想法可以看成是将 Riemann 不变量方法和部分速端变换方法的结合体推广到高维情形. 我们首先回忆有关 Riemann 不变量的某些基本事实. 在一维情形, 等熵 Euler 方程组可以写成

$$\partial_t\rho + \partial_x(\rho v) = 0$$
$$\partial_t v + v\partial_x v = -\frac{1}{\rho}\partial_x p$$

同时该方程组也可以写成一个关于速度势 ϕ 的单个方程:

$$(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0$$

或者设 $\psi_\mu = \partial_\mu\phi$,

$$(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_\nu = 0$$

其中 g 是如下时空流形 $\mathcal{M}$ 中的 Lorentz 度量:

$$g = -\eta^2 dt^2 + (dx - vdt)^2$$

这里

$$v = -\psi_x$$

是流体速度,

$$h = \psi_t - \frac{1}{2}\psi_x^2$$

是焓. 压力 p 是关于 h 的函数, 并且

$$\rho = \frac{dp}{dh}$$

而声速 η 则由

$$\eta^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

给出.

Riemann 不变量是定义在余切空间 $T_p^*\mathcal{M}$ 上的函数 R_1 和 R_2, 它们是如下程函 (eikonal function) 的两个函数独立的解:

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial R}{\partial\psi_\mu}\frac{\partial R}{\partial\psi_\nu}=0$$

即

$$-\eta^2(\frac{\partial R}{\partial\psi_t})^2+(\frac{\partial R}{\partial\psi_x}+\psi_x\frac{\partial R}{\partial\psi_t})^2=0$$

在 $\mathcal{M}$ 上定义向量场 N_1 和 N_2:

$$N_1:=\frac{\partial R_1}{\partial\psi_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu},\quad N_2:=\frac{\partial R_2}{\partial\psi_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

它们是关于 g 的类声向量场. 适当选取 R_1 和 R_2 可以使得 N_1 和 N_2 的积分曲线分别是内向和外向的类声曲线. 那么作为 $\mathcal{M}$ 上的函数, R_1 和 R_2 满足

$$N_1R_2=0,\quad N_2R_1=0 \tag{1}$$

让我们引入声学坐标 (t,u) 使得 u 沿着外向的类声曲线是常值. 那么向量场

$$L=\frac{\partial}{\partial t},\quad \underline{L}=\eta^{-1}\kappa L+2T$$

是关于 g 的类声向量场, L 和 $\underline{L}$ 的积分曲线分别是外向和内向的类声曲线. 这里

$$T=\frac{\partial}{\partial u},\quad \kappa=-\frac{\partial x}{\partial u} \tag{2}$$

从而 L 和 $\underline{L}$ 分别与 N_2 和 N_1 共线, 并且 (1) 式中的方程等价于

$$LR_1=0,\quad \underline{L}R_2=0 \tag{3}$$

为了写出 R_1 和 R_2 的显式表达式, 我们将使用如下 $T_p^*\mathcal{M}$ 中的坐标取代原先的坐标 (ψ_t,ψ_x):

$$h=\psi_t-\frac{1}{2}\psi_x^2,\quad v=-\psi_x$$

则对任意定义在 $T_p^*\mathcal{M}$ 上的函数 $f=f(h,v)$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial\psi_x}+\psi_x\frac{\partial f}{\partial\psi_t}=-\frac{\partial f}{\partial v}$$

让我们引入函数 $r=r(h)$, 使得它满足

$$\frac{dr}{dh}=\frac{1}{\eta},\quad r(0)=0$$

则我们有

$$R_1=r+v,\quad R_2=r-v$$

是程函的两个函数独立的解, 从而是两个 Riemann 不变量. 由 (3) 式中的第一个方程, 我们知道

$$R_1=R_1(u)$$

完全由初值决定. 而为了得到 R_2, 我们需要考虑 (3) 式中的第二个方程, 即

$$\eta^{-1}\kappa\frac{\partial R_2}{\partial t}+2\frac{\partial R_2}{\partial u}=0$$

这里出现了 κ, 它的定义由 (2) 式给出. 为了得到一个关于 κ 的方程, 我们需要考虑如下方程:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=c_+,\quad c_+=v+\eta$$

我们将导出一个关于 κ 的方程. 由 (3) 式, 我们知道

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=-\frac{\partial c_+}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{\partial R_1}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_2}{\partial u}-\frac{d\eta}{dh}\frac{\partial h}{\partial u}$$

而

$$\frac{\partial h}{\partial u}=\frac{dh}{dr}\frac{\partial r}{\partial u}=\frac{1}{2}\eta(\frac{\partial R_1}{\partial u}+\frac{\partial R_2}{\partial u})$$

将上式代入, 我们得到

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{1}{2}(-1-\eta\frac{d\eta}{dh})\frac{\partial R_1}{\partial u}+\frac{1}{2}(1-\eta\frac{d\eta}{dh})\frac{\partial R_2}{\partial u}$$

由于

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}=\frac{2}{\eta}\frac{\partial h}{\partial u}-\frac{\partial R_2}{\partial u}$$

从而我们有

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{1}{2\eta}(-2-2\eta\frac{d\eta}{dh})\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial R_2}{\partial u}$$

让我们定义

$$H = -2h - \eta^2$$

由 (3) 的第二式

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = -\frac{\kappa}{2\eta}\frac{\partial R_2}{\partial t}$$

从而 κ 满足如下方程:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = m' + \kappa e'$$

其中

$$m' = \frac{1}{2\eta}\frac{dH}{dh}\frac{\partial h}{\partial u}, \quad e' = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial R_2}{\partial t}$$

一维情形时的主要想法是 R_1 和 R_2 以及直角坐标 x 是 (t, u) 的光滑函数. 部分速端变换是如下从声学坐标到直角坐标的变换:

$$(t, u) \longmapsto (t, x)$$

其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(t,x)}{\partial(t,u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v+\eta & -\kappa \end{vmatrix} = -\kappa$$

从而当 κ 趋向于 0 时该 Jacobi 行列式也趋向于 0. 这意味着当激波形成的时候 R_1 和 R_2 并不是 (t, x) 的光滑函数.

当空间维数高于一维时, 特别地, 在三维的情形, 我们没有 Riemann 不变量. 取而代之是解的一阶变分, 它们由如下变分场定义:

$$\partial_\mu, \quad \mathring{R}_i = \epsilon_{ijk} x^j \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad x^\mu \partial_\mu - I; \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$$

这里 I 是恒等算子. 这些场是 Galileo 群以及伸缩变换群的子群的生成子, 它们刚好是可压缩 Euler 方程组的不变群, 并且保持常状态不变. 这些一阶变分满足如下线性波动方程:

$$\Box_{\tilde{g}} \psi = 0 \tag{4}$$

其中 $\tilde{g}$ 是共形声学度量:

$$\tilde{g} = \Omega g, \quad \Omega = \frac{\rho}{\eta}, \quad g = -\eta^2 dt^2 + \sum_i (dx^i - v^i dt)^2$$

如同一维情形时 R_1 和 R_2 满足的方程, 方程 (4) 不依赖于时空流形的 Galileo 结构, 而仅依赖于 $(\mathcal{M}, g)$ 是一个 Lorentz 流形的事实. 实际上它主要依赖于 $(\mathcal{M}, g)$ 的共形类. 注意到这与一维情形时类声曲线只依赖于声学度量的共形类这一事实相似. 同样与一维情形时相似, 我们将使用*声学坐标* (t, u, ϑ). 这里 u 是 $\mathcal{M}$ 中的声学函数, 其水平集 C_u 是外向类声超曲面. 在每个 C_u 上 $\vartheta \in \mathbb{S}^2$ 的等值曲线是 C_u 的生成子. 如同一维情形, 我们记 L 为 C_u 生成子的切向量场并且其参数为 t, 记 $\underline{L}$ 为 $S_{t,u} := C_u \bigcap \Sigma_t$ 的内向法向量场, 其定义形式上与一维情形时相同. 我们同样记 T 为 Σ_t 中 $S_{t,u}$ 的内向正交曲线的切向量场, 其参数为 u. 这里 Σ_t 是函数 t 的水平集, 它与 Euclid 空间等距同胚.

为了得到线性方程在 (t, u, ϑ) 下的能量估计, 我们将运用两个*乘子向量场* K_0 和 K_1, 它们相对于 g 是非类空并且指向未来的 (这个要求实际上只依赖于 g 的共形类). 这两个向量场是 L 和 $\underline{L}$ 的线性组合, 其系数是关于 (t, u, ϑ) 的光滑函数. 乘子向量场的概念来源于关于守恒流的 Noether 定理 (见 [14]). 一个现代的、关于更一般的相容流的讨论见 [4]. 为了得到高阶能量估计, 我们需要考虑 n 阶变分, 其由 $n-1$ 个*交换向量场*作用在一阶变分上得到. 这些交换向量场如下:

$$T, \quad Q := (1+t)L, \quad R_i := \Pi \mathring{R}_i$$

这里 Π 是从 $T_p\Sigma_t$ 到 $T_pS_{t,u}$ 的正交投影. 从而我们得到了一个关于 n 阶变分 ψ_n 的非齐次波方程:

$$\square_{\tilde{g}} \psi_n = \rho_n \tag{5}$$

其中 ρ_n 是由交换向量场的形变张量所决定的. 实际上 ρ_n 依赖于形变张量的直到 $n-1$ 阶导数, 并且 $\rho_1 = 0$. 交换向量场的使用最早来源于 [12]. 而最早在弯曲时空中使用乘子向量场和交换向量场的工作则是 [6].

在声学坐标下求解了方程 (5) 之后, 我们需要回到原来的直角坐标. 所以我们必须考虑变换

$$(t, u, \vartheta) \longmapsto (t, x)$$

的逆变换, 其中 $\vartheta \in \mathbb{S}^2$, $x \in \mathbb{R}^3$. 这正是部分速端变换在高维情形时的推广. 这个变换的 Jacobi 行列式为

$$\kappa\sqrt{\det \not{g}} \tag{6}$$

这里 $\not{g}$ 是声学度量在 $S_{t,u}$ 上的诱导度量. 所以我们考虑如下直角坐标在每个 C_u 上满足的方程组:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = L^i = -\eta\hat{T}^i - \psi_i$$

该方程组是关于 x^i 的完全非线性系统. 这里 $\hat{T}$ 是 $S_{t,u}$ 在 Σ_t 中的单位内法向, 它的表达式是一个关于 $\frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A}$ 的二阶齐次多项式与一个根号下关于 $\frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A}$ 的四次齐次多项式的商. 对 x^i 的导数的估计转化为对 χ 和 μ 的导数估计. 它们的定义如下:

$$2\chi = \not{\mathcal{L}}_L \not{g}, \quad \mu = \eta\kappa$$

其中 κ 是 T 的模长. 所以 χ 是 $S_{t,u}$ 关于 C_u 的第二基本形式. 而最后我们则是通过研究 $S_{t,u}$ 作为 $\mathcal{M}$ 的叶状结构的几何结构方程来估计 χ 和 μ.

总结一下, 在高维空间情形, Riemann 不变量被一阶变分 ψ 所取代, 我们将证明它是关于声学坐标 (t, u, ϑ) 的光滑函数. 而我们所运用的方法则是利用 χ 和 μ 满足的几何结构方程给出它们的估计. 其中关于 μ 的方程与一维情形时相同:

$$L\mu = m + \mu e$$

这里

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}Th, \quad H = -2h - \eta^2$$
$$e = \frac{1}{2\eta^2}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)' Lh + \frac{1}{\eta}\hat{T}^i(L\psi_i)$$

由以上这些结论我们将推导出: 最大经典发展的边界包含一个奇异部分 $\mathcal{H}$, 在那里 Jacobi 行列式 (6) 为 0. 由关于 χ 的估计我们知道, $\sqrt{\det \not{g}}$ 有一个正的下界, 从而 κ 和 μ 在 $\mathcal{H}$ 上为 0. 所以变换

$$(t, u, \vartheta) \longmapsto (t, x)$$

的逆变换在 $\mathcal{H}$ 不可微. 所以 ψ 在 $\mathcal{H}$ 关于直角坐标不可微. 然而 $\mathcal{H}$ 作为 μ —— 一个关于 (t, u, ϑ) 的光滑函数 —— 的零水平集, 在由声学坐标诱导的微分结构下是

$\mathcal{M}$ 中的光滑超曲面. 这是因为在 $\mathcal{H}$ 上 $L\mu$ 有一个严格负的上界, 所以 $\mathcal{H}$ 是 μ 的非临界水平集.

本书的第一个主要结论可以看成是关于速度势非线性波方程

$$(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0$$

的小初值存在性定理 (**定理 17.1**):

上述非线性波方程的解在声学坐标 (t, u, ϑ) 下可以光滑延拓到最大解定义域的边界, 在函数 μ 变成 0 以前, 解同样也是直角坐标下的光滑函数, 这是因为当 $\mu > 0$ 时, 由声学坐标和直角坐标诱导的微分结构是相互等价的.

定理 17.1 同样给出了激波形成时 (即 $\mu = 0$ 时) 的时间下界, 以及关于解的能量和声学时空 $(\mathcal{M}, g)$ 中各种几何量的估计.

以上述存在性定理为基础, 我们可以在初值上给出激波形成的充分条件 (见**定理 18.1**). 该条件是加在关于函数

$$(1 - u + t)\underline{L}\psi_0 - \psi_0 \tag{7}$$

在 Σ_t 的一个积分上. 这里

$$\psi_0 := \partial_t\phi$$

是一个一阶变分. (7) 式的主部, 即 $(1 - u + t)\underline{L}\psi_0$ 决定了函数 m 的性质, 从而决定了激波是否形成. 更进一步, 函数 (7) 在 $S_{t,u}$ 上的平均值满足一个以 t 为变量的常微分不等式. 我们可以运用这个常微分不等式将 m 在激波附近的性质与 m 在初始曲面 Σ_0 的性质联系起来. 从而我们就可以在初值上给出激波形成的充分条件.

同样以存在性定理为基础, 我们可以给出最大解定义域的边界在声学微分结构下的几何描述 (**命题 19.1**):

边界包含一个正则部分 $\underline{C}$, 它是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的内向类声超曲面. 同时边界还包含一个奇异部分 $\mathcal{H}$, 在这上面 $\mu = 0$. $\mathcal{H}$ 是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的类空超曲面, 它与 $\underline{C}$ 有着共同的过去边界, 我们将其记为 $\partial_-\mathcal{H}$, 它是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的二维类空曲面. 然而奇异边界从内蕴几何的角度来看, 却是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的类声超曲面, 因为在声学坐标下, 声学度量 g 在奇异边界上退化.

相对应的奇异边界在标准微分结构 (即由直角坐标诱导的微分结构) 下的描述由**命题 19.3** 给出. 更进一步, 我们建立了一个三择一定理 (**定理 19.1**). 它用来描述起始于奇异边界上任意一点的指向过去的类声测地线的行为:

对于奇异边界上的任意一点 q, 以 q 为终点的类声测地线与 Σ_t 的交分为三部分, 对应于以 q 为终点的内向和外向类声测地线的集合是 Σ_t 中的嵌入圆盘, 它们有着共同的边界, 该边界是 Σ_t 中的嵌入圆环, 它对应于其他以 q 为终点的类声测地线. 所有以 q 为终点的外向类声测地线在 q 有共同的切向量.

最后我们考虑从一个声学函数到另一个声学函数的变换. 我们可以看到, 不同的声学函数对应的类空超曲面的几何性质是相互等价的, 并且当激波形成的时候, 它们以相同的方式退化 (见**命题 19.2**).

现在我们给出本书的内容梗概. 前四章考虑基本的几何构造. 我们在第五章给出关于共形声学度量的线性波方程的能量估计. 第六章给出交换向量场形变张量的初步估计, 其精确估计在第十章和第十一章中给出. 我们在第五章和第六章中同样给出了关于变分以及 χ 和 μ 的基本的连续性假设. 第八章和第九章是全书的重点, 因为这里关于 χ 和 μ 的估计不允许损失任何导数, 这样我们才能完成连续性假设的证明. 第八章考虑 χ 的最高阶空间导数的估计, 这里实际上只有与 $S_{t,u}$ 相切的导数. 而第九章则是考虑 μ 最高阶空间导数的估计. 在第十二章中, 以关于变分的连续性假设为基础, 我们证明了关于 χ 和 μ 的连续性假设, 但 **C1**, **C2**, **C3** 的证明却是在第十三章中给出. 在第十四章中, 以第八章中一个关键的引理 (**引理 8.11**) 为基础, 我们估计了来源于 χ 和 μ 的最高阶空间导数的临界项. 在第十五章, 我们得到了最高阶变分的能量估计. 我们允许这些能量在激波开始形成的时候爆破. 然后我们便看到, 当能量的阶数逐级降低时, 所允许爆破速度会越来越慢, 直到降低到某一阶时, 能量完全不会爆破. 我们用这些有界的能量来完成整个连续性假设的证明 (见第十六章和第十七章).

关于本书中的记号, 拉丁指标取值为 $1,2,3$, 希腊指标取值为 $0,1,2,3$. 除了特别声明之外, 指标重复表示求和.

目 录

第一章　可压缩流体与非线性波方程

1.1　Euler 方程

理想流体的运动可以用 Euler 方程来描述. Euler 方程包含如下未知函数: 流体速度 $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, 以及任意两个热力学量, 比如流体的压力和密度: $p=p(\mathbf{x},t)$, $\rho=\rho(\mathbf{x},t)$. 所有的热力学量可以用其中的任意两个以及状态方程决定. Euler 方程的推导如下.

我们首先推导质量守恒方程. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中在 t 时刻充满流体的某个区域 $\Omega(t)$. $\Omega(t)$ 中流体的质量为 $\int_{\Omega(t)}\rho dV$. 由质量守恒可知这个积分不随时间变化, 所以我们有

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho dV=0 \tag{1.1}$$

这意味着

$$\int_{\Omega(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_{\partial\Omega(t)}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=0 \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega(t)$ 的外法向. 由 Green 公式, 我们有

$$\int_{\Omega(t)}(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}))dV=0 \tag{1.3}$$

由 $\Omega(t)$ 的任意性, 我们有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0 \tag{1.4}$$

这是连续性方程.

接下来我们考虑动量方程. 由 Newton 定律,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \tag{1.5}$$

其中 $\mathbf{P}$ 是动量, $\mathbf{F}$ 是外力, 所以方程 (1.5) 变为

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dV = -\int_{\partial\Omega(t)} p\mathbf{n} dS \tag{1.6}$$

即

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dV = -\int_{\Omega(t)} \nabla p dV \tag{1.7}$$

这个方程的其中一个分量为

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho v^i dV = -\int_{\Omega(t)} \frac{\partial p}{\partial x^i} dV \tag{1.8}$$

我们得到

$$\int_{\Omega(t)} (\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v^i \mathbf{v}))dV = -\int_{\Omega(t)} \frac{\partial p}{\partial x^i} dV \tag{1.9}$$

由 $\Omega(t)$ 的任意性和连续性方程, 我们有

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v^i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} \tag{1.10}$$

理想流体中是没有热交换的, 因此沿着流线方向熵为常数, 即流体是绝热的. 如果记熵为 s, 我们有

$$\frac{ds}{dt} = 0 \tag{1.11}$$

即

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \tag{1.12}$$

1.2 无旋流和非线性波方程

绝热性条件通常有一种简单的形式. 如果初始时刻熵为常数, 则以后所有时刻熵都为常数. 这时我们把绝热性条件写为

$$s = \mathrm{const} \tag{1.13}$$

这种流体称为等熵流. 在这种情形下我们可以把方程 (1.10) 写成另外一种形式, 为此我们需要如下热力学关系式:

$$dh = Vdp + \theta ds \tag{1.14}$$

其中 h 是焓, 由单位质量所含的能量定义:

$$h = e + pV$$

其中 $V = \frac{1}{\rho}$ 是比容, θ 是温度. 由于 s 是常数, 我们有

$$dh = Vdp = \frac{1}{\rho}dp \tag{1.15}$$

所以 (1.10) 变为

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v^i = -\frac{\partial h}{\partial x^i} \tag{1.16}$$

这意味着

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{v} - (\mathrm{div}\ \mathbf{v})\omega \tag{1.17}$$

其中 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$.

如果 $\omega |_{t=0} = 0$, 则由 (1.17) $\omega \equiv 0$. 满足 $\omega = \nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$ 的流体称为无旋流. 在这种情形下由于 $\mathbb{R}^3$ 是单连通的, 所以存在一个函数 ϕ, 使得 $\mathbf{v} = -\nabla\phi$. 所以 (1.16) 变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial t} - \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial h}{\partial x^i} \tag{1.18}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - h) = 0 \tag{1.19}$$

很明显 ϕ 的定义相差一个依赖于 t 的常数, 不失一般性, 我们可以设

$$h = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \tag{1.20}$$

因此我们只需考虑连续性方程了. 而 $\frac{dh}{dp} = V > 0$, 由反函数定理, p 可以视为 h 的函数. 这是因为 h 可以视为 p 和 s 的函数, 而在等熵情形 h 可以视为 p 的函数. 从而 $\rho = \frac{dp}{dh}$, ρ 也是 h 的函数.

连续性方程变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathrm{div}(\rho\nabla\phi) = 0 \tag{1.21}$$

即

$$\frac{d\rho}{dh}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum_i(\frac{\partial\phi}{\partial x^i})^2)-\sum_j\frac{d\rho}{dh}\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum_i(\frac{\partial\phi}{\partial x^i})^2)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}-\rho\Delta\phi=0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-2\sum_i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x^i}+\sum_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\eta^2\Delta\phi=0 \quad (1.23)$$

其中我们运用了关系 $\frac{dp}{dh}=\rho$ 以及声速 η 的定义:

$$\eta^2=\eta^2(h):=(\frac{\partial p}{\partial\rho})_s \quad (1.24)$$

定义函数

$$H=H(h):=-\eta^2-2h \quad (1.25)$$

由 (1.24), 我们知道

$$\eta^{-2}=(\frac{d\rho}{dp})_s=-\frac{1}{V^2}(\frac{dV}{dp})_s \quad (1.26)$$

由于 $V=(\frac{dh}{dp})_s$, 直接计算可得

$$\frac{dH}{dh}=-\frac{\eta^4}{V^3}(\frac{d^2V}{dp^2})_s \quad (1.27)$$

所以 $\frac{dH}{dh}$ 恒为 0 当且仅当 V 线性依赖于 p. 这个事实在后面将会用到. 我们将会在后面讨论函数 H 的意义.

方程 (1.21) 是如下 Lagrange 泛函的 Euler - Lagrange 方程:

$$L=p(h) \quad (1.28)$$

一般来说, $L=L(t,\mathbf{x};\phi,\frac{\partial\phi}{\partial t},\nabla\phi)$, 其对应的 Euler - Lagrange 方程为

$$\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\frac{\partial L(t,\mathbf{x};\phi,\frac{\partial\phi}{\partial t},\nabla\phi)}{\partial u_\alpha})=\frac{\partial L}{\partial q}(t,\mathbf{x};\phi,\frac{\partial\phi}{\partial t},\nabla\phi) \quad (1.29)$$

其中 $q=\phi$, $x^0=t$, $u_0=\frac{\partial\phi}{\partial t}$, $u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$, $i=1,2,3$.

若 $L=p(h)$, 则

$$\frac{\partial L}{\partial u_\alpha}=\frac{dp}{dh}\frac{\partial h}{\partial u_\alpha}=\rho\frac{\partial h}{\partial u_\alpha} \quad (1.30)$$

其中 $h=u_0-\frac{1}{2}\sum_i(u_i)^2$.

所以我们有

$$\frac{\partial h}{\partial u_0}=1, \frac{\partial h}{\partial u_i}=-u_i, \frac{\partial h}{\partial q}=0$$

相应的 Euler - Lagrange 方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u_i) = 0 \tag{1.31}$$

这正是方程 (1.21).

1.3 变分方程和声学度量

我们接下来讨论 (1.21) 的线性化方程.

设 ϕ 是 (1.21) 的一个解, $\phi_\tau : \tau \in I$ 是 (1.21) 的一族可微单参数解, 其中 I 是包含 0 的一个开区间, 使得 $\phi_0 = \phi$. 那么

$$\psi = (\frac{d\phi_\tau}{d\tau})_{\tau=0} \tag{1.32}$$

是 ϕ 的一个变分.

考虑关于 ψ 的 Lagrange 泛函:

$$L_\tau[\psi] := L[\phi + \tau\psi] \tag{1.33}$$

则 $L[\phi]$ 的线性化方程为

$$\dot{L}[\psi] := \frac{1}{2}\frac{d^2 L_\tau[\psi]}{d\tau^2} \mid_{\tau=0} \tag{1.34}$$

在这种情形下, $L_\tau[\psi] = p(h_\tau)$, 其中

$$h_\tau = \frac{\partial}{\partial t}(\phi + \tau\psi) - \frac{1}{2}\sum_i (\frac{\partial}{\partial x^i}(\phi + \tau\psi))^2$$

直接计算可得

$$\frac{d^2 L_\tau}{d\tau^2}[\psi] \mid_{\tau=0} = \frac{d^2 p}{dh^2}(h)(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^i})^2 + \frac{dp}{dh}(h)(-\sum_i (\frac{\partial \psi}{\partial x^i})^2) \tag{1.35}$$

即

$$\frac{d^2 L_\tau}{d\tau^2}[\psi] \mid_{\tau=0} = \frac{d\rho}{dh}(h)(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^i})^2 - \rho(\sum_i (\frac{\partial \psi}{\partial x^i})^2) \tag{1.36}$$

即

$$\frac{d^2 L_\tau}{d\tau^2}[\psi] \mid_{\tau=0} = \rho(\eta^{-2}(\partial_t \psi - \sum_i \partial_i \phi \partial_i \psi)^2 - \sum_i (\partial_i \psi)^2) \tag{1.37}$$

即

$$\frac{d^2L_\tau}{d\tau^2}[\psi]\,|_{\tau=0}= -\rho(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi \tag{1.38}$$

其中度量 g 为

$$g=-\eta^2dt^2+\sum_i(dx^i-v^idt)^2 \tag{1.39}$$

$$g^{-1}=-\eta^{-2}(\frac{\partial}{\partial t}+v^i\frac{\partial}{\partial x^i})\otimes(\frac{\partial}{\partial t}+v^j\frac{\partial}{\partial x^j})+\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.40}$$

这里, $v^i=-\partial_i\phi$, 并且我们运用了如下事实:

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{d\rho}{dh}\frac{1}{\rho}=\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dh}\frac{1}{\rho}=\eta^{-2}$$

考虑如下共形度量:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=\Omega g_{\mu\nu} \tag{1.41}$$

其中 Ω 满足

$$\rho(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi=(\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi\sqrt{-\det\tilde{g}} \tag{1.42}$$

由 $\sqrt{-\det g}=\eta$, 我们有 $\sqrt{-\det\tilde{g}}=\Omega^2\eta$, 从而 $\Omega=\frac{\rho}{\eta}$.

由于 (1.21) 的线性化方程是线性化 Lagrange 泛函 $\dot{L}[\psi]$ 的 Euler - Lagrange 方程, 所以 (1.21) 的线性化方程是

$$\Box_{\tilde{g}}\psi=0 \tag{1.43}$$

由于常状态的密度和声速 ρ_0,η_0 都是常数, 所以我们不妨在 Lagrange 泛函前乘上一个常数, 从而有

$$\Omega=\frac{\rho/\rho_0}{\eta/\eta_0} \tag{1.44}$$

使得在常状态的时候 $\Omega=1$.

实际上从现在开始我们可以选择时间和质量的单位, 使得

$$\eta_0=\rho_0=1$$

1.4　基本变分

如果 ϕ 是 (1.21) 的一个解, 而 f_τ 是 $\mathbb{E}^3$ 等距群的一个单参数子群, 或者是沿 t 方向的平移, 则对于任意的 τ,

$$\phi_\tau=\phi\circ f_\tau \tag{1.45}$$

仍然是 (1.21) 的一个解. 从而

$$\psi = (\frac{d(\phi \circ f_\tau)}{d\tau})_{\tau=0} = X\phi \tag{1.46}$$

满足线性方程 (1.43). 这里 $\mathbb{E}^3$ 是以标准的 Euclid 度量

$$\sum_i (dx^i)^2$$

为距离的 $\mathbb{R}^3$.

X 是 f_τ 的生成子, 它们可以是如下向量场:

$$\Omega_{ij} := x^i\partial_j - x^j\partial_i, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3 \tag{1.47}$$

以及

$$T_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{1.48}$$

现在考虑 (1.21) 的伸缩群. 显然 ϕ 的量纲是 $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$ (这里 "L" 和 "T" 分别表示长度和时间的量纲), 所以我们考虑变换

$$\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}) := \frac{b^2}{a}\phi(\frac{t}{a}, \frac{\mathbf{x}}{b}) \tag{1.49}$$

其中常数 $a, b > 0$. 直接计算可得

$$\tilde{h}(t, \mathbf{x}) := \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla\tilde{\phi}|^2 = \frac{b^2}{a^2}h(\frac{t}{a}, \frac{\mathbf{x}}{b}) \tag{1.50}$$

一般情形下 p 是 h 的任意函数:

$$p = p(h) \tag{1.51}$$

所以

$$\frac{dp}{dh} = \rho > 0 \quad 即 \quad p' > 0 \quad 并且 \quad p > 0 \tag{1.52}$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \eta^2 = \frac{dp}{dh}\frac{dh}{d\rho} = \rho/\frac{d^2p}{dh^2} > 0 \tag{1.53}$$

由变换 (1.49),

$$\tilde{p}(t, \mathbf{x}) = p(\tilde{h}(t, \mathbf{x})) = p(\frac{b^2}{a^2}h(\frac{t}{a}, \frac{\mathbf{x}}{b})) \tag{1.54}$$

从而

$$\tilde{\rho}(t,\mathbf{x}) = \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{h}} = p'(\frac{b^2}{a^2}h(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b})) = \rho(\frac{b^2}{a^2}h(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b})) \tag{1.55}$$

我们可以看到, 在一般情形下, 只有当 $a = b$ 时, 方程 (1.21) 才在变换 (1.49) 下保持不变. 但是在一些特殊情形下, 我们可以有二维的伸缩群.

首先我们考虑如下情形:

$$p(h) = \frac{1}{2}h^2 \tag{1.56}$$

这个函数满足 (1.51)—(1.53).

现在我们可以取 $a \neq b$:

$$\tilde{h}(t,\mathbf{x}) = \frac{b^2}{a^2}h(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b})$$

从而

$$p(\tilde{h}(t,\mathbf{x})) = \frac{1}{2}\tilde{h}^2(t,\mathbf{x}) = \frac{b^4}{a^4}\frac{1}{2}h^2(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b}) = \frac{b^4}{a^4}p(h(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b})) \tag{1.57}$$

即

$$\tilde{p}(t,\mathbf{x}) = \frac{b^4}{a^4}p(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b}) \tag{1.58}$$

和

$$\tilde{\rho}(t,\mathbf{x}) = \tilde{h}(t,\mathbf{x}) = \frac{b^2}{a^2}h(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b}) = \frac{b^2}{a^2}\rho(\frac{t}{a},\frac{\mathbf{x}}{b}) \tag{1.59}$$

所以现在我们有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} - \mathrm{div}(\tilde{\rho}\nabla\tilde{\phi}) \\ = &\frac{b^2}{a^3}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{a}\rho\Delta\phi - \frac{b}{a^2}\nabla\rho\cdot\frac{b}{a}\nabla\phi = \frac{b^2}{a^3}(\frac{\partial\rho}{\partial t} - \mathrm{div}(\rho\nabla\phi)) \end{aligned} \tag{1.60}$$

这意味着方程 (1.21) 在变换 (1.49) 下保持不变. 因此, 在这种情形下, 伸缩群是二维的.

更一般地, 我们可以考虑如下情形:

$$p(h) = Ch^{\alpha}, \alpha > 1, C > 0, h > 0 \tag{1.61}$$

显然在这种情形下函数 $p(h)$ 满足 (1.51)—(1.53), 并且我们有

$$p = C(\frac{\rho}{\alpha C})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \tag{1.62}$$

如果设

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad k = \frac{C}{(\alpha C)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

则有

$$p = k\rho^{\gamma} \tag{1.63}$$

其中 $\gamma > 1$, k 依赖于 γ.

这种情形称为多方的 (polytropic). 类似地我们可以看到在多方的情形我们有二维的伸缩群. 而且很容易看到当且仅当 p 是 h 的齐次函数时我们有二维的伸缩群.

这里我们只考虑一般的情形 $p = p(h)$, 所以我们仅有一维的伸缩群. 在这种情形下我们考虑 $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ 的单参数伸缩群

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto (e^{\tau}t, e^{\tau}\mathbf{x}) \tag{1.64}$$

其中 $\tau \in \mathbb{R}$.

设 ϕ 是 (1.21) 的一个解, 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$ 定义函数

$$\phi_{\tau} := e^{-\tau}\phi(e^{\tau}t, e^{\tau}\mathbf{x}) \tag{1.65}$$

正如我们之前所看到的, ϕ_{τ} 也是 (1.21) 的一个解. 从而

$$\psi = (\frac{d\phi_{\tau}}{d\tau})|_{\tau=0} := S\phi \tag{1.66}$$

满足线性方程 (1.43). 这里微分算子 S 定义如下:

$$S = D - I, \quad D = x^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{1.67}$$

第二章　基本几何构造

2.1　与声学度量相关的类叶状结构

2.1.1　Galileo 时空

因为经典流体力学的框架是 Galileo 时空, 所以我们有必要讨论一下它的一些基本事实.

Galileo 时空是一个四元组 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}, \pi, e)$, 其中

(1) $\mathcal{G}$ 是一个四维仿射空间;

(2) $\mathcal{A}$ 是一个配有单位位移的一维仿射空间, 这个用来表示时间;

(3) 映射 π: $\mathcal{G} \to \mathcal{A}$ 是一个满的仿射映射;

所以对任意的 $t \in \mathcal{A}$, $\Sigma_t := \pi^{-1}(t)$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个仿射子空间, 我们在每个 Σ_t 上引入一个 Euclid 度量 e_t. Σ_t 称为绝对同时超曲面.

(4) Galileo 标架是由一族平行的不与 Σ_t 相切的直线形成的 $\mathcal{G}$ 的一个仿射叶状结构. Galileo 标架可以用来表示一族相互静止的惯性系观察者. 度量 e 使得对任意的 $t_1, t_2 \in \mathcal{A}$, 沿着 Galileo 标架的平行移动可以诱导一个 (Σ_{t_1}, e_{t_1}) 和 (Σ_{t_2}, e_{t_2}) 之间的等距变换.

两个 Galileo 时空 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}, \pi, e)$ 和 $(\mathcal{G}', \mathcal{A}', \pi', e')$ 相互等价当且仅当存在一个二元组 (I, J), 其中 I 是仿射空间 $\mathcal{G}$ 到仿射空间 $\mathcal{G}'$ 的等距同态, J 是仿射空间 $\mathcal{A}$ 到

仿射空间 $\mathcal{A}'$ 的等距同态, 使得

(1) $\pi' \circ I = J \circ \pi$;

(2) J 把 $\mathcal{A}$ 的单位位移映到 $\mathcal{A}'$ 的单位位移;

(3) 对任意的 $t \in \mathcal{A}$, $I|_{\Sigma_t}$ 是 (Σ_t, e_t) 到 $(\Sigma'_{t'}, e'_{t'})$ 的等距变换. 其中 $\Sigma_t = \pi^{-1}(t)$, $\Sigma'_{t'} = \pi'^{-1}(t')$, $t' = J(t)$.

经典力学特别是经典连续介质力学在这种 Galileo 变换下是保持不变的. 我们在第一章定义一阶变分的时候已经用到了 Galileo 不变性.

但在这里我们将采用一个不同的观点来处理变分方程. 我们将仅仅使用 Galileo 时空 $\mathcal{G}$ 的微分流形结构 $\mathbb{R}^4$, 一个配备了声学度量 g 的四维流形. 我们称 Lorentz 流形 $(\mathbb{R}^4, g)$ 为声学时空. 两个这样的 Lorentz 流形 $(\mathcal{M}, g)$ 和 $(\mathcal{M}', g')$ 等价当且仅当存在一个从 $\mathcal{M}'$ 到 $\mathcal{M}$ 的微分同胚 f, 使得 $g' = f^* g$. 即 f 是 $(\mathcal{M}', g')$ 和 $(\mathcal{M}, g)$ 之间的等距变换.

2.1.2 类叶状结构和声学坐标

运动方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \tag{2.3}$$

的初值是一个给定在超曲面 Σ_0 上的三元组 $(p, s, \mathbf{v})$. 我们假设在一个球面 $S_{0,0}$ 外的初值对应于常状态, 这意味着

$$p = p_0, \quad s = s_0, \quad \mathbf{v} = 0 \tag{2.4}$$

选取适当的长度单位并做适当的平移, 我们可以假设 $S_{0,0}$ 是以 Σ_0 原点为球心的单位球面. 我们在 Σ_0 中考虑 $S_{0,0}$ 的一个环状内邻域:

$$\Sigma_0^{\epsilon_0} = \{\mathbf{x} \in \Sigma_0 : 1 - \epsilon_0 \leqslant r(\mathbf{x}) \leqslant 1\} \tag{2.5}$$

其中 r 是从 Σ_0 原点出发的 Euclid 距离函数, 而 ϵ_0 是一个满足

$$\epsilon_0 \leqslant \frac{1}{2} \tag{2.6}$$

的正常数. 我们在 Σ_0 上定义函数

$$u = 1 - r \tag{2.7}$$

除去原点以外, 这个函数在 Σ_0 上是一个处处光滑没有临界点的函数, 并且在 $S_{0,0}$ 上为 0, 向球面内递增. 对任意的 $u \in [0, \epsilon_0]$, 相对应的 u 的水平集 $S_{0,u}$ 是一个以 $1 - u \in [1 - \epsilon_0, 1]$ 为半径的球面, 并且

$$\Sigma_0^{\epsilon_0} = \bigcup_{u \in [0, \epsilon_0]} S_{0,u} \tag{2.8}$$

考虑在 S_{0,ϵ_0} 外部初值是等熵无旋的情形, 此时在 S_{0,ϵ_0} 外部初值是二元组 $(\phi, \partial_t \phi)$. 这是非线性波方程 (1.23) 在所考虑区域的初值. 并且在 $S_{0,0}$ 外部我们有

$$\phi = 0, \quad \partial_0 \phi = h_0 \tag{2.9}$$

其中 h_0 表示常状态的焓. 正如我们在第一章所看到的, 焓的定义可以相差一个常数, 所以不妨设

$$h_0 = 0$$

对于任意给定的一组初值, 方程 (2.1)—(2.3) 存在一个 “最大解”, 在等熵无旋的情形, 则是非线性波方程 (1.23) 的最大解. 在等熵无旋的情形, 对于给定初值的最大解或最大发展的概念如下. 初值集给定之后, 局部存在性定理蕴涵着这个初值集的一个发展的存在性, 即 Galileo 时空中的一个区域 $\mathcal{D}$, 它的过去边界正好是初值的定义域, 并且解定义在 $\mathcal{D}$ 当中, 以给定初值作为过去边界. 假如我们考虑 $\mathcal{D}$ 中任意一点 p 和从 p 点出发的一条指向过去的曲线, 使得这条曲线上任意一点 q 处的切向量始终在由 g_q 定义的锥的过去那个分支的内部, 则这条曲线最终会终止在初值的定义域中. 这个由 g_q 定义的锥称为声锥. 局部唯一性定理表明如果 $(\mathcal{D}_1, (p_1, s_1, \mathbf{v}_1))$ 和 $(\mathcal{D}_2, (p_2, s_2, \mathbf{v}_2))$ 是同一个初值集的两个发展 (等熵无旋的时候则是 $(\mathcal{D}_1, \phi_1)$ 和 $(\mathcal{D}_2, \phi_2)$), 则在 $\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2$ 中 $(p_1, s_1, \mathbf{v}_1)$ 与 $(p_2, s_2, \mathbf{v}_2)$ 完全重合 (等熵无旋的时候是 ϕ_1 与 ϕ_2 在 $\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2$ 中完全重合). 从而一个给定初值集的所有发展的并仍然是一个发展, 称为该初值集的 “最大发展”. 在最大解的定义域中我们考虑与 $\{S_{0,u} : u \in [0, \epsilon_0]\}$ 相对应的一族外向特征超曲面 $\{C_u : u \in [0, \epsilon_0]\}$:

$$C_u \bigcap \Sigma_0 = S_{0,u}, \forall u \in [0, \epsilon_0] \tag{2.10}$$

只要不离开 $S_{0,u}$ 在 Σ_0 外部的依赖区域, C_u 的每个双特征生成子都可以在最大解的定义域中延伸. 记时空区域

$$W_{\epsilon_0} = \bigcup_{u\in[0,\epsilon_0]} C_u \tag{2.11}$$

则对于给定初值的最大解的定义域 M_{ϵ_0} 是 W_{ϵ_0} 与 Galileo 时空中以 $S_{0,0}$ 在 Σ_0 的外部和 C_0 为边界的区域的并. 由区域依赖性定理, 解在 $M_{\epsilon_0}\setminus W_{\epsilon_0}$ 中对应于常状态. 这意味着 C_0 是完整的锥, 它的双特征生成子在参数 t 下可以延伸到无穷远. 我们可以延拓函数 u 到 W_{ϵ_0}, 使得 C_u 是它的水平集. 那么 u 是如下方程的解:

$$(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu u\partial_\nu u = 0 \tag{2.12}$$

我们称这样的函数为*声学函数*. 定义向量场 $\hat{L}$:

$$\hat{L} = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\nu u \tag{2.13}$$

为在 Lorentz 度量 g 下的指向未来的类声测地向量场, 它的积分曲线正是 C_u 的双特征生成子. 很容易验证 $\hat{L}$ 的参数是仿射参数, 但是为了后面推导的方便, 我们将采用参数 t. 所以我们考虑如下向量场:

$$L = \mu\hat{L} \tag{2.14}$$

其中 μ 是一个正函数使得

$$Lt = 1 \tag{2.15}$$

从而

$$\frac{1}{\mu} = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu t\partial_\nu u \tag{2.16}$$

对任意 $u\in[0,\epsilon_0]$, 存在参数 t 的上确界 $t_*(u)$, 使得 C_u 的生成子在最大解的定义域中. $t_*(u)$ 有可能是正实数也有可能是 ∞. 由上面的推导可知 $t_*(0)=\infty$. 记

$$t_{*\epsilon_0} = \inf_{u\in[0,\epsilon_0]} t_*(u) \tag{2.17}$$

接下来我们将把注意力集中到时空区域

$$W^*_{\epsilon_0} = \bigcup_{(t,u)\in[0,t_{*\epsilon_0})\times[0,\epsilon_0]} S_{t,u} \tag{2.18}$$

其中

$$S_{t,u} = C_u \bigcap \Sigma_t \tag{2.19}$$

在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中定义与 Σ_t 相切的向量场 T 使得它在度量 g 下与曲面 $\{S_{t,u} : u \in [0, \epsilon_0]\}$ 正交, 并且满足

$$Tu = 1 \tag{2.20}$$

考虑交换子

$$\Lambda = [L, T] \tag{2.21}$$

由 (2.12)—(2.14),

$$Lu = 0 \tag{2.22}$$

并且 T 与 Σ_t 相切, 我们有

$$Tt = 0 \tag{2.23}$$

然后由 (2.15), (2.20),

$$\Lambda u = \Lambda t = 0 \tag{2.24}$$

从而 Λ 与 $S_{t,u}$ 相切. 由 (2.14) 和 (2.22), 我们知道

$$g(L, L) = 0 \tag{2.25}$$

即 L 是一个关于声学度量 g 的类声向量场. 同样由 (2.13), (2.14) 和 (2.20),

$$g(L, T) = \mu g(\hat{L}, T) = -\mu T u = -\mu \tag{2.26}$$

因为 g 限制在 Σ_t 上是 Euclid 度量, 所以 T 关于 g 是类空的, 从而我们可以设

$$g(T, T) = \kappa^2 \tag{2.27}$$

其中 κ 是一个正函数, 它也是 T 在 Euclid 度量下的长度. 设 N 是与 C_u 相切的任意一个向量场, 则我们有

$$Nu = 0 \tag{2.28}$$

即

$$g(L, N) = 0 \tag{2.29}$$

因此对任意与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 X,

$$g(L,X)=0 \tag{2.30}$$

由定义, T 也与 X 正交, 从而

$$T_pW_{\epsilon_0}^* = \Pi_p \oplus T_pS_{t,u} \tag{2.31}$$

其中 Π_p 由 L 和 T 张成. 由 (2.25)—(2.27), g 在 Π_p 上由 μ 和 κ 给出. 由 (2.31) 可知 g 由其在 $S_{t,u}$ 上的诱导度量 $\not g$ 完全给出:

$$\not g(X,Y) = g(X,Y), \quad \forall X,Y \in T_pS_{t,u} \tag{2.32}$$

对任意 $u\in[0,\epsilon_0]$ 和任意的 $t\in[0,t_{*\epsilon_0})$, C_u 的生成子定义了从 $S_{0,u}$ 到 $S_{t,u}$ 的光滑映射. 而每个 $S_{0,u}$ 与 S^2 微分同胚. 从而我们得到一个从 $S_{t,u}$ 到 S^2 的微分同胚:

$$p\mapsto \vartheta=\vartheta(p) \tag{2.33}$$

其中 $\vartheta\in S^2$, $p\in S_{t,u}$. 如果我们在 S^2 上选取局部坐标 $(\vartheta^1,\vartheta^2)$, 则对每个 $(t,u)\in[0,t_{*\epsilon_0})\times[0,\epsilon_0]$, 这个微分同胚定义了一个 $S_{t,u}$ 上的局部坐标. 从 $S_{0,u}$ 到 S^2 的微分同胚是任意选取的, 从而微分同胚 (2.33) 也可以任意选取, 因为它可以与如下变换复合而成:

$$\vartheta\mapsto\tilde\vartheta=\tilde\vartheta(u,\vartheta) \tag{2.34}$$

局部坐标 $(\vartheta^1,\vartheta^2)$ 和函数 (t,u) 共同组成了 $W_{\epsilon_0}^*$ 的局部坐标 $(t,u,\vartheta^1,\vartheta^2)$. 我们称这个局部坐标为声学坐标. 我们将推导出 g 在这个坐标下的表达式.

首先, L 的以 t 为参数的积分曲线对应于 ϑ 和 u 取常值的那些直线, 从而

$$L=\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.35}$$

然后由 (2.20) 和 (2.23), 我们有

$$T=\frac{\partial}{\partial u}-\Xi \tag{2.36}$$

其中 Ξ 是一个与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, 从而 Ξ 可以在标架 $(\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}, A=1,2)$ 下展开:

$$\Xi=\Xi^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A} \tag{2.37}$$

由 (2.21), (2.35) 和 (2.36), 我们有

$$[L, \Xi] = -\Lambda \tag{2.38}$$

或者由分量表达,

$$\frac{\partial \Xi^A}{\partial t} = -\Lambda^A \tag{2.39}$$

在任意一个给定的 Σ_t 上, 我们可以设 $\Xi = 0$. 但由于 Λ 不恒为 0, 我们不能取 Ξ 处处为 0. 若设

$$\not{g}_{AB} = \not{g}(\frac{\partial}{\partial \vartheta^A}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^B}) \tag{2.40}$$

其中 $A, B = 1, 2$, 我们有

$$g = -2\mu dudt + \kappa^2 du^2 + \not{g}_{AB}(d\vartheta^A + \Xi^A du)(d\vartheta^B + \Xi^B du) \tag{2.41}$$

我们在 $W^*_{\epsilon_0}$ 定义向量场 B, 使得它在度量 g 下与 Σ_t 正交并且满足

$$Bt = 1 \tag{2.42}$$

因为 Σ_t 相对于 g 是类空的, 所以 B 相对于 g 是类时的. 从而存在一个正函数 α 使得

$$g(B, B) = -\alpha^2 \tag{2.43}$$

事实上, 我们有

$$B^\mu = -\alpha^2 (g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\nu t \tag{2.44}$$

以及

$$\alpha^{-2} = -(g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\mu t \partial_\nu t = \eta^{-2} \tag{2.45}$$

因为 α 和 η 都是正的, 所以 $\alpha = \eta$. 我们有

$$B^0 = -\alpha^2 (g^{-1})^{00} = 1, \quad B^i = -\alpha^2 (g^{-1})^{i0} = -\alpha^2(-\eta^{-2})v^i = v^i \tag{2.46}$$

所以

$$B = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.47}$$

在等熵无旋的时候我们有

$$B = (1, -\nabla\phi)$$

因为 B 是类时的, 所以在任意一点 p, $B \in \Pi_p$, 从而 B 是 L 和 T 的线性组合. 由 (2.35), (2.36) 和 (2.42) 以及 B 是指向未来的, 我们有

$$B = L + fT \tag{2.48}$$

其中 f 是一个正函数. 将 (2.48) 与 T 作内积, 再由 (2.26) 和 $g(B,T) = 0$, 我们有

$$\mu = f\kappa^2 \tag{2.49}$$

另一方面由于 L 相对于 g 是类声的, 我们有

$$0 = g(B,B) + f^2 g(T,T) = -\alpha^2 + f^2\kappa^2 \tag{2.50}$$

因为 f 是正的, 我们有

$$f = \frac{\alpha}{\kappa} \tag{2.51}$$

从而

$$\mu = \alpha\kappa \tag{2.52}$$

引入向量场 $\hat{T} := \kappa^{-1}T$, 由 (2.48) 和 (2.51), 我们有

$$L = B - \alpha\hat{T} \tag{2.53}$$

再由 (2.46) 和 (2.47)

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha\hat{T}^i - v^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.54}$$

以及无旋等熵情形

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha\hat{T}^i + \partial_i\phi)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.55}$$

最后我们可以计算映射的 Jacobi 行列式:

$$(t, u, \vartheta^1, \vartheta^2) \mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{2.56}$$

因为 $x^0 = t$, 我们有

$$\frac{\partial x^0}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial x^0}{\partial u} = \frac{\partial x^0}{\partial \vartheta^A} = 0 \tag{2.57}$$

其中 $A = 1, 2$. 同样, 由于

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial t} = L^\mu \tag{2.58}$$

我们有

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = L^i \tag{2.59}$$

其中 $i = 1, 2, 3$. 同样, 我们有

$$\frac{\partial x^i}{\partial u} = T^i + \xi^i \tag{2.60}$$

其中

$$\xi^i = \Xi^A X^i_A, \quad X^i_A = \frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A} \tag{2.61}$$

$i = 1, 2, 3; A = 1, 2.$

所以我们得到了 (2.56) 的 Jacobi 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L^1 & T^1 + \xi^1 & X^1_1 & X^1_2 \\ L^2 & T^2 + \xi^2 & X^2_1 & X^2_2 \\ L^3 & T^3 + \xi^3 & X^3_1 & X^3_2 \end{vmatrix} \tag{2.62}$$

即

$$\Delta = \begin{vmatrix} T^1 + \xi^1 & X^1_1 & X^1_2 \\ T^2 + \xi^2 & X^2_1 & X^2_2 \\ T^3 + \xi^3 & X^3_1 & X^3_2 \end{vmatrix} = \dot{\Delta} + \ddot{\Delta} \tag{2.63}$$

其中

$$\dot{\Delta} = \begin{vmatrix} T^1 & X^1_1 & X^1_2 \\ T^2 & X^2_1 & X^2_2 \\ T^3 & X^3_1 & X^3_2 \end{vmatrix} \tag{2.64}$$

以及

$$\ddot{\Delta} = \begin{vmatrix} \xi^1 & X^1_1 & X^1_2 \\ \xi^2 & X^2_1 & X^2_2 \\ \xi^3 & X^3_1 & X^3_2 \end{vmatrix} \tag{2.65}$$

由 (2.61), 我们有

$$\ddot{\Delta} = \sum_{A=1}^{2} \Xi^A \begin{vmatrix} X^1_A & X^1_1 & X^1_2 \\ X^2_A & X^2_1 & X^2_2 \\ X^3_A & X^3_1 & X^3_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.66}$$

从而可以简单地写

$$\Delta = (T, X_1, X_2) \tag{2.67}$$

即

$$\Delta = |T||X_1 \wedge X_2| \tag{2.68}$$

其中的模长是针对 Euclid 度量 $\bar{g}$, 即 g 在 Σ_t 上的限制. 从而我们知道

$$|X_1 \wedge X_2| = \sqrt{|X_1|^2|X_2|^2 - (X_1, X_2)^2} = \sqrt{\det \not{g}} \tag{2.69}$$

所以

$$\Delta = \kappa\sqrt{\det \not{g}} \tag{2.70}$$

2.2 函数 H 的几何解释

回忆第一章中函数 H 的定义:

$$H = -2h - \eta^2 \tag{2.71}$$

这里我们只考虑 $H = \text{const}$ 的情形. 事实上因为有如下变换, 我们只需考虑 $H = 0$ 的情形:

$$\tilde{\phi} := \phi + \frac{k}{2}t, \quad \tilde{h} := h + \frac{k}{2}, \quad \tilde{H} := H - k, \quad k \text{ 为 “const”} \tag{2.72}$$

这个变换保持非线性波动方程 (1.23) 不变.

因为

$$H = 0$$

意味着

$$h = -\frac{1}{2}\eta^2$$

在这种情形下声学度量为

$$g = 2\frac{\partial\phi}{\partial t}(dt)^2 + 2\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}dx^i dt + \sum_i (dx^i)^2$$

即

$$g = 2d\phi dt + \sum_i (dx^i)^2 \tag{2.73}$$

引入一个新的坐标 s, 我们考虑 Lorentz 流形 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$, 其中

$$\tilde{g} = 2dsdt + \sum_i (dx^i)^2 \tag{2.74}$$

所以流形 $(\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3, g)$ 可以视为 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$ 的等距子流形, 事实上可以视为如下类声超曲面上的图:

$$s = \phi(\mathbf{x}, t) \tag{2.75}$$

同样, 由直接计算可知

$$\det g = 2h = -\eta^2 < 0 \tag{2.76}$$

这表明这个子流形是 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$ 中的类时超曲面.

此外, $(\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3, g)$ 还是 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$ 的极小子流形. 因为在一般情形下,

$$\frac{d\rho}{dp} = \eta^{-2} \quad 且 \quad \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dh}$$

在现在这种情形由 (2.71),

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dh} = -\frac{1}{2h}$$

求解这个常微分方程可得

$$\rho = \frac{C}{\sqrt{-2h}} = \frac{C}{\eta} \tag{2.77}$$

这里 C 是一个正常数. 方程

$$\frac{dp}{dh} = \rho$$

给出

$$p = p_0 - C\sqrt{-2h}$$

由 (2.77) 我们有

$$p = p_0 - C^2 V \quad \text{或} \quad p = p_0 - C\eta \tag{2.78}$$

从而在一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ 的泛函为

$$\int_\Omega p dt d^3 x = p_0 \int_\Omega dt d^3 x - C \int_\Omega \eta dt d^3 x \tag{2.79}$$

而

$$\int_\Omega \eta dt d^3 x = \int_\Omega \sqrt{-\det g} dt d^3 x \tag{2.80}$$

是 Ω 相对于 g 的体积.

所以方程 (1.23) 与 Lagrange 泛函 $\sqrt{-\det g}$ 的 Euler - Lagrange 方程相同. 但是某个区域体积泛函的 Euler - Lagrange 方程正是极小曲面方程.

第三章　声学结构方程

3.1　声学结构方程

定义 k 如下:

$$2\alpha k = \bar{\mathcal{L}}_B g \tag{3.1}$$

其中 $\bar{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}$ 在 Σ_t 上的限制.

若 X, Y 是两个在某一点与 Σ_t 相切的向量, 则

$$\alpha k(X,Y) = g(D_X B, Y) = g(D_Y B, X) \tag{3.2}$$

其中 k 是 Σ_t 相对于 g 的第二基本形式, 而 D 则是 g 的协变导数. 回忆第二章, 我们有

$$B = \partial_0 + v^i \partial_i \tag{3.3}$$

则

$$2\alpha k_{ij} = (\bar{\mathcal{L}}_B g)_{ij} = (B\bar{g}_{ij}) + \bar{g}_{im}\partial_j v^m + \bar{g}_{jm}\partial_i v^m \tag{3.4}$$

由于 $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$, 我们有

$$2\alpha k_{ij} = \partial_j v^i + \partial_i v^j = -2\partial_i \psi_j \tag{3.5}$$

最后一个等号只在等熵无旋的时候成立.

任意一个在某一点 p 与 C_u 相切的向量 X 可以被唯一地分解成一个与 L 平行的向量和一个与 $S_{t,u}$ 相切的向量:

$$X = c_X L + \Pi X \tag{3.6}$$

如果 X, Y 都与 C_u 相切, 则 $g(X,Y) = \not{g}(\Pi X, \Pi Y)$.

设 $X_A = \frac{\partial}{\partial \vartheta^A}$, 对任意给定的 $Z \in T_p C_u$, 我们可以做展开 $\Pi Z = Z^A X_A$. 与 X_B 作内积有

$$\not{g}(X_B, \Pi Z) = \not{g}_{AB} Z^A \tag{3.7}$$

定义 χ:

$$2\chi = \not{\mathcal{L}}_L g \tag{3.8}$$

这里 $\not{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}$ 在 $S_{t,u}$ 的限制.

如果 X, Y 与 $S_{t,u}$ 相切, 则我们有

$$\chi(X,Y) = g(D_X L, Y) = g(D_Y L, X) \tag{3.9}$$

由于 $\hat{L} = \mu^{-1} L$ 是一个仿射测地向量场, 我们有

$$D_L L = \mu D_{\hat{L}}(\mu \hat{L}) = L(\mu)\hat{L} = \mu^{-1}(L\mu)L \tag{3.10}$$

记 $\chi_{AB} = \chi(X_A, X_B)$. 我们将导出一个 χ_{AB} 沿 C_u 的传输方程. 首先我们有

$$L\chi_{AB} = g(D_L D_{X_A} L, X_B) + g(D_{X_A} L, D_L X_B) \tag{3.11}$$

现在 $D_L X_A - D_{X_A} L = [L, X_A] = 0$, 如果记 R 为 g 的曲率张量, 我们有

$$D_L D_{X_A} L - D_{X_A} D_L L = R(L, X_A) L$$

其中曲率张量变换定义为

$$R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z$$

从而

$$g(D_L D_{X_A} L, X_B) = \mu^{-1}(L\mu)\chi_{AB} - \alpha_{AB} \tag{3.12}$$

其中 $\alpha_{AB} = R(X_A, L, X_B, L)$. 回忆曲率张量通过曲率变换如下定义:

$$R(W,Z,X,Y) := g(W, R(X,Y)Z) \tag{3.13}$$

(3.11) 右边的第二项等于 $g(D_{X_A}L, D_{X_B}L)$.

因为 L 相对于 g 是类声的, 所以对任意向量场 X, D_XL 在 g 下与 L 正交, 从而它与 C_u 相切. 所以如果设 $W_A = D_{X_A}L$, $A=1,2$, 我们有

$$g(W_A, W_B) = \not{g}(\Pi W_A, \Pi W_B) \tag{3.14}$$

现在我们可以在基底 $X_B, B=1,2$ 下展开 ΠW_A. X_B 的系数为

$$(\not{g}^{-1})^{BC}\not{g}(\Pi W_A, X_C) = (\not{g}^{-1})^{BC}g(D_{X_A}L, X_C) = (\not{g}^{-1})^{BC}\chi_{AC} \tag{3.15}$$

从而

$$\not{g}(\Pi W_A, \Pi W_B) = \not{g}(\chi_A^C X_C, \chi_B^D X_D) = \chi_A^C \chi_{BC}$$

这里大写指标的升降都是相对于 $\not{g}_{AB}$ 而言的. 所以

$$\chi_A^B = (\not{g}^{-1})^{BC}\chi_{AC}$$

我们得到了如下的传输方程:

$$L\chi_{AB} = \mu^{-1}(L\mu)\chi_{AB} + \chi_A^C\chi_{BC} - \alpha_{AB} \tag{3.16}$$

从这里我们可以得到一个关于 $\mathrm{tr}\chi$ 的传输方程. 记 Ricci 张量为 $S_{\mu\nu}$:

$$S_{\mu\nu} := (g^{-1})^{\kappa\lambda}R_{\mu\kappa\nu\lambda} \tag{3.17}$$

我们可以在标架 L, T, X_1, X_2 下表示 $(g^{-1})^{\kappa\lambda}$. 我们有

$$(g^{-1})^{\mu\nu} = -\alpha^{-2}L^\mu L^\nu - \mu^{-1}(L^\mu T^\nu + L^\nu T^\mu) + (\not{g}^{-1})^{AB}X_A^\mu X_B^\nu \tag{3.18}$$

由 (3.18) 我们有

$$\mathrm{tr}\alpha = (\not{g}^{-1})^{AB}R_{\mu\kappa\nu\lambda}X_A^\mu L^\kappa X_B^\nu L^\lambda = (g^{-1})^{\mu\nu}R_{\mu\kappa\nu\lambda}L^\kappa L^\lambda = S_{\kappa\lambda}L^\kappa L^\lambda \tag{3.19}$$

另一方面

$$L(\mathrm{tr}\chi) = L[(\not{g}^{-1})^{AB}\chi_{AB}] = (\not{g}^{-1})^{AB}L(\chi_{AB}) + \chi_{AB}L[(\not{g}^{-1})^{AB}] \tag{3.20}$$

这等于

$$(\not{g}^{-1})^{AB}L(\chi_{AB}) - \chi_{AB}(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}L(\not{g}_{CD}) \tag{3.21}$$

即

$$(\not{g}^{-1})^{AB}L(\chi_{AB})-2\chi_{AB}(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}\chi_{CD} \tag{3.22}$$

这里我们运用了如下事实:

$$L[(\not{g}^{-1})^{AB}]=-(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}L(\not{g}_{CD})$$

这仅仅只是逆矩阵的求导法则:

$$\frac{dM^{-1}}{dt}=-M^{-1}\frac{dM}{dt}M^{-1}$$

因为

$$2\chi_{AB}=L(\not{g}_{AB}) \tag{3.23}$$

对 (3.16) 取迹我们得到

$$L(\mathrm{tr}\chi)=\mu^{-1}(L\mu)\mathrm{tr}\chi-|\chi|^2_{\not{g}}-S(L,L) \tag{3.24}$$

我们接下来推导 $S_{t,u}$ 在声学时空中的 Gauss 方程和 Codazzi 方程. 首先我们将 $S_{t,u}$ 视为 Σ_t 的子流形. 这时法向量场为 T.

我们定义 $S_{t,u}$ 关于 Σ_t 的第二基本形式 θ:

$$2\kappa\theta:=\not{\mathcal{L}}_T\bar{g} \tag{3.25}$$

对任意两个在某一点与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, 我们有

$$\kappa\theta(X,Y)=\bar{g}(\bar{D}_XT,Y)=\bar{g}(\bar{D}_YT,X) \tag{3.26}$$

记 $\not{k}$ 为 k 在 $TS_{t,u}$ 上的限制, 则由 (2.53) 我们有

$$\chi=\alpha(\not{k}-\theta) \tag{3.27}$$

在标架 (X_1,X_2) 下, $S_{t,u}$ 相对于 Σ_t 的 Gauss 方程可以表示为

$$\not{R}_{ABCD}-\theta_{AC}\theta_{BD}+\theta_{AD}\theta_{BC}=0 \tag{3.28}$$

$\not{R}$ 是 $\not{g}$ 的曲率张量. 由于 $\dim S_{t,u}=2$, 我们有

$$\not{R}_{ABCD}=K(\not{g}_{AC}\not{g}_{BD}-\not{g}_{AD}\not{g}_{BC}) \tag{3.29}$$

这里 K 是 $S_{t,u}$ 的 Gauss 曲率. 从而我们有

$$\theta_{AC}\theta_{BD} - \theta_{AD}\theta_{BC} = K(\not{g}_{AC}\not{g}_{BD} - \not{g}_{AD}\not{g}_{BC}) \tag{3.30}$$

与 $\frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}$ 缩并:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\not{g}}\theta)^2 - \frac{1}{2}|\theta|^2_{\not{g}} = K \tag{3.31}$$

同样由 Σ_t 在声学时空中的 Gauss 方程, 我们有

$$\not{k}_{AC}\not{k}_{BD} - \not{k}_{BC}\not{k}_{AD} = R_{ABCD} \tag{3.32}$$

由曲率张量的对称性,

$$R_{ABCD} = \rho\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} \tag{3.33}$$

其中 ϵ_{AB} 是 $(S_{t,u}, \not{g})$ 的体积元:

$$\epsilon_{AB} = \sqrt{\det \not{g}}[AB] \tag{3.34}$$

将 (3.33) 与 $\frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}$ 缩并同时考虑如下事实:

$$(\not{g}^{-1})^{BD}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} = \not{g}_{AC} \tag{3.35}$$

我们得到

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\not{g}}\not{k})^2 - \frac{1}{2}|\not{k}|^2_{\not{g}} = \rho \tag{3.36}$$

这正是 $S_{t,u}$ 在声学时空中的 Gauss 方程.

我们接下来推导 Codazzi 方程. 设 X, Y, Z 是与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, 我们可以用 L 的单参数群将它们延拓到 C_u. 这样对任意的 $t \in [0, t_{*\epsilon_0})$, 它们就与每个 $S_{t,u}$ 相切. 我们有

$$X(\chi(Y,Z)) = X(g(D_Y L, Z)) = g(D_X D_Y L, Z) + g(D_Y L, D_X Z) \tag{3.37}$$

另一方面

$$(\not{D}_X\chi)(Y,Z) = X(\chi(Y,Z)) - \chi(\not{D}_X Y, Z) - \chi(Y, \not{D}_X Z) \tag{3.38}$$

这里 $\not{D}$ 是 $S_{t,u}$ 相对于诱导度量 $\not{g}$ 的协变导数. 从而

$$(\not{D}_X\chi)(Y,Z) = g(D_X D_Y L, Z) + g(D_Y L, D_X Z) - \chi(\not{D}_X Y, Z) - \chi(Y, \not{D}_X Z) \tag{3.39}$$

交换 X, Y, 注意到

$$D_X D_Y L - D_Y D_X L = R(X,Y)L + D_{[X,Y]}L \tag{3.40}$$

而 $g(R(X,Y)L, Z) = R(Z, L, X, Y)$ 并且 $\not{D}_X Y - \not{D}_Y X = [X, Y]$, 我们有

$$\begin{aligned}
&(\not{D}_X \chi)(Y, Z) - (\not{D}_Y \chi)(X, Z) \\
&= R(Z, L, X, Y) + g(D_{[X,Y]}L, Z) + g(D_Y L, D_X Z) - g(D_X L, D_Y Z) \\
&\quad -\chi(\not{D}_X Y, Z) + \chi(\not{D}_Y X, Z) - \chi(Y, \not{D}_X Z) + \chi(X, \not{D}_Y Z) \\
&= R(Z, L, X, Y) + g(D_Y L, D_X Z) - g(D_X L, D_Y Z) - \chi(Y, \not{D}_X Z) + \chi(X, \not{D}_Y Z)
\end{aligned}$$

对任意与 $S_{t,u}$ 在某一点相切的向量 X, 定义 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ζ:

$$\zeta(X) = g(D_X L, T) \tag{3.41}$$

我们将导出一个 ζ 的表达式. 为此, 我们设 $D_X L = xL + yT + z^A X_A$, 则

$$g(D_X L, T) = -\mu x + \kappa^2 y, \quad g(D_X L, L) = -\mu y, \quad g(D_X L, X_A) = z^B \not{g}_{AB} \tag{3.42}$$

求解这些系数 x, y, z^A, 我们得到

$$D_X L = -\mu^{-1}\zeta(X)L + \chi \cdot X \tag{3.43}$$

其中 $\not{g}(\chi \cdot X, Y) = \chi(X, Y)$. 从而

$$\begin{aligned}
&g(D_X L, D_Y Z) \\
&= \mu^{-1}\zeta(X)\chi(Y, Z) + g(\chi \cdot X, D_Y Z) \\
&= \mu^{-1}\zeta(X)\chi(Y, Z) + \chi(X, \not{D}_Y Z)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

把此式代入上面的表达式当中, 我们得到

$$\begin{aligned}
&(\not{D}_X \chi)(Y, Z) - (\not{D}_Y \chi)(X, Z) \\
&= R(Z, L, X, Y) - \mu^{-1}(\zeta(X)\chi(Y, Z) - \zeta(Y)\chi(X, Z))
\end{aligned} \tag{3.45}$$

在这个方程中设 $X = X_A, Y = X_B, Z = X_C$, 然后定义 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 β:

$$R(X_C, L, X_A, X_B) = \beta_C \epsilon_{AB} \tag{3.46}$$

我们就得到了 Codazzi 方程:

$$\not{D}_A\chi_{BC} - \not{D}_B\chi_{AC} = \beta_C\epsilon_{AB} - \mu^{-1}(\zeta_A\chi_{BC} - \zeta_B\chi_{AC}) \tag{3.47}$$

记 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\text{c}\not{\text{u}}\text{rl}\chi$ 为

$$\text{c}\not{\text{u}}\text{rl}\chi_C := \frac{1}{2}\epsilon^{AB}(\not{D}_A\chi_{BC} - \not{D}_B\chi_{AC}) \tag{3.48}$$

其中 $\epsilon^{AB} = (\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}\epsilon_{CD} = (\sqrt{\det\not{g}})^{-1}[AB]$, 我们可以把 Codazzi 方程写成如下形式:

$$\text{c}\not{\text{u}}\text{rl}\chi = \beta - \mu^{-1}\zeta\wedge\chi \tag{3.49}$$

这里 $(\zeta\wedge\chi)_C = \frac{1}{2}\epsilon^{AB}(\zeta_A\chi_{BC} - \zeta_B\chi_{AC})$, 这个方程包含了 (3.47) 的所有内容. 将 (3.47) 与 $(\not{g}^{-1})^{AC}$ 缩并, 我们得到了缩并形式的 Codazzi 方程

$$\text{d}\not{\text{i}}\text{v}\chi - \not{d}\text{tr}\chi = \beta^* - \mu^{-1}(\zeta\cdot\chi - \zeta\text{tr}\chi) \tag{3.50}$$

它与 (3.49) 等价. 这里 $(\zeta\cdot\chi)_B = (\not{g}^{-1})^{AC}\zeta_A\chi_{BC}, \beta^*_B = (\not{g}^{-1})^{AC}\beta_C\epsilon_{AB}$.

我们现在可以由 L 的表达式导出 ζ 的表达式,

$$\zeta(X) = g(D_XB,T) - \alpha\kappa^{-1}g(D_XT,T) - g(T,T)X(\alpha\kappa^{-1}) \tag{3.51}$$

而 $g(T,T) = \kappa^2$, 我们有 $g(D_XT,T) = \kappa X\kappa$, 所以这个化为

$$\zeta(X) = g(D_XB,T) - \kappa X\alpha \tag{3.52}$$

定义 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ε: $\kappa\varepsilon(X) = k(X,T)$, 则

$$\zeta = \kappa(\alpha\varepsilon - \not{d}\alpha) \tag{3.53}$$

定义 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式

$$\eta := \zeta + \not{d}\mu \tag{3.54}$$

显然我们有

$$\eta(X) = -g(D_XT,L) \tag{3.55}$$

我们可以用 ζ 和 η 表示 L 和 T 的交换子 Λ. 我们有

$$\Lambda = \Lambda^AX_A, \quad \Lambda^A\not{g}_{AB} = g(X_B,D_LT) - g(X_B,D_TL) \tag{3.56}$$

以及

$$g(X_B, D_L T) = -g(D_L X_B, T) = -g(D_{X_B} L, T) = -\zeta_B \tag{3.57}$$

为了计算 $g(X_B, D_T L)$, 我们用 $\hat{L}$ 表示测地向量场 L. 我们有

$$\begin{aligned} g(X_B, D_T L) &= g(X_B, D_T(\mu \hat{L})) = \mu g(X_B, D_T \hat{L}) \\ &= \mu g(T, D_{X_B} \hat{L}) = \mu g(T, D_{X_B}(\mu^{-1} L)) \end{aligned} \tag{3.58}$$

这里用到了 $\hat{L}^\mu = -(g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\nu u$, 也就是 $\hat{L}$ 是某个函数的梯度, 所以我们可以交换 T 和 X_B. 上述表达式化为

$$g(T, D_{X_B} L) - \mu^{-1}(X_B \mu) g(T, L) = \zeta_B + X_B \mu = \eta_B \tag{3.59}$$

所以我们得到

$$\Lambda^A = -(\not{g}^{-1})^{AB}(\zeta_B + \eta_B) \tag{3.60}$$

我们将在标架 (L, T, X_1, X_2) 下表示 $D_T L$ 和 $D_L T$. 首先由 (3.59) 和 (3.60), 我们有

$$g(D_T L, X_B) = \eta_B \tag{3.61}$$

以及

$$g(D_T L, T) = g(D_L T, T) = L(\frac{1}{2}\kappa^2), \quad g(D_T L, L) = 0 \tag{3.62}$$

从而

$$D_T L = (\not{g}^{-1})^{AB} \eta_B X_A - \alpha^{-1}(L\kappa) L \tag{3.63}$$

同时

$$g(D_L T, X_B) = -g(D_L X_B, T) = -g(D_{X_B} L, T) = -\zeta_B \tag{3.64}$$

以及

$$g(D_L T, L) = g(D_T L, L) = 0, \quad g(D_L T, T) = \frac{1}{2} L(\kappa^2) \tag{3.65}$$

其中我们用到了 $[L, T]$ 与 $S_{t,u}$ 相切的事实. 所以我们得到

$$D_L T = -\not{g}^{AB} \zeta_B X_A - \alpha^{-1}(L\kappa) L \tag{3.66}$$

接下来我们计算 $D_{X_A} T$. 设

$$D_{X_A} T = a_A L + b_A T + c_A^B X_B \tag{3.67}$$

与 L 做内积:

$$-\mu b_A = g(D_{X_A}T, L) = -\eta_A \Rightarrow b_A = \mu^{-1}\eta_A \tag{3.68}$$

与 T 做内积:

$$-\mu a_A + \kappa^2 b_A = g(D_{X_A}T, T) = \frac{1}{2}X_A(\kappa^2) \tag{3.69}$$

所以我们得到

$$\begin{aligned} a_A &= \alpha^{-2}\eta_A - \alpha^{-1}X_A(\kappa) \\ &= \alpha^{-2}(\eta_A - X_A(\mu) + \kappa X_A(\alpha)) = \alpha^{-2}(\zeta_A + \kappa X_A(\alpha)) = \alpha^{-1}\kappa\varepsilon_A \end{aligned} \tag{3.70}$$

最后与 X_C 做内积:

$$c_A^B \not{g}_{BC} = g(D_{X_A}T, X_C) = \kappa\theta_{AC} \tag{3.71}$$

我们得到

$$D_{X_A}T = \alpha^{-1}\kappa\varepsilon_A L + \mu^{-1}\eta_A T + \kappa\theta_{AB}(\not{g}^{-1})^{BC}X_C \tag{3.72}$$

接下来我们计算 $D_T T$. 可以做如下分解:

$$D_T T = \bar{D}_T T + aB \tag{3.73}$$

其中 $\bar{D}$ 是 Σ_t 关于诱导度量 $\bar{g}$, 同时也是 Euclid 度量的协变导数. 与 B 做内积:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 a = g(D_T T, B) &= g(D_T T, L) + \alpha\kappa^{-1}g(D_T T, T) \\ &= -T\mu - g(T, D_T L) + \alpha\kappa^{-1}T(\frac{1}{2}\kappa^2) \end{aligned} \tag{3.74}$$

其中我们用到了如下事实: $g(D_T T, L) = T(g(T, L)) - g(T, D_T L)$. (3.74) 的右边等于

$$-T\mu - \kappa L\kappa + \alpha T\kappa = -\kappa(T\alpha + L\kappa) \tag{3.75}$$

运用 $[L, T]$ 与 $S_{t,u}$ 相切的事实, 所以有 $g(T, D_T L) = g(T, D_L T) = \frac{1}{2}L(\kappa^2)$.

我们可以运用 Σ_t 上的直角坐标, 这样诱导度量 $\bar{g}$ 是 Euclid 度量. 对任意一对与 Σ_t 相切的向量场 X, Y, 我们在直角坐标下有

$$(\bar{D}_X Y)^i = X^j \partial_j Y^i \tag{3.76}$$

所以我们有

$$(\bar{D}_T T)^i = T^j \bar{D}_j T^i = T^j \partial_j T^i \tag{3.77}$$

以及

$$\bar{g}_{ij}T^j = \kappa^2\partial_i u, \quad \bar{g}_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow T^i = \kappa^2\partial_i u \tag{3.78}$$

从而

$$(\bar{D}_T T)^i = \kappa^2\partial_j u\partial_j(\kappa^2\partial_i u) = \kappa^2\partial_j u\partial_j\kappa^2\partial_i u + \kappa^4\partial_j u\partial_j\partial_i u \tag{3.79}$$

由 (3.78), $\sum_i(\partial_i u)^2 = \kappa^{-2}$, 从而

$$(\bar{D}_T T)^i = \kappa^{-2}T^iT^j\partial_j(\kappa^2) + \frac{1}{2}\kappa^4\partial_i(\kappa^{-2}) \tag{3.80}$$

这等于

$$\kappa^{-2}T^iT^j\partial_j(\kappa^2) - \frac{1}{2}\partial_i(\kappa^2) \tag{3.81}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_T T = \frac{1}{2}\kappa^{-2}T(\kappa^2)T - \frac{1}{2}\not{g}^{AB}X_B(\kappa^2)X_A \tag{3.82}$$

由 (3.74), (3.75) 和 (3.82), 我们得到

$$D_T T = \kappa\alpha^{-2}(T\alpha + L\kappa)L + (\alpha^{-1}(T\alpha + L\kappa) + \kappa^{-1}T\kappa)T - \frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}X_B(\kappa^2)X_A$$

对于 (3.74),

$$g(D_T T, B) = -g(T, D_T B) = -\alpha k(T, T) \tag{3.83}$$

与 (3.75) 比较, 我们可以看到

$$L(\frac{1}{2}\kappa^2) = -\kappa T\alpha + \alpha k(T, T) \tag{3.84}$$

运用这个方程, 我们可以导出一个关于 μ 沿 C_u 生成子的传输方程:

$$L\mu = \kappa L\alpha + \alpha L\kappa = \kappa L\alpha - \alpha T\alpha + \alpha\mu k(\hat{T}, \hat{T}) \tag{3.85}$$

首先,

$$\alpha\mu k(\hat{T}, \hat{T}) = -\mu\hat{T}^i\hat{T}^j\partial_i\psi_j = -\alpha\hat{T}^i(T\psi_i) \tag{3.86}$$

我们用到了事实 $\alpha k_{ij} = -\partial_i\psi_j$(见 (3.5)).

为了计算 (3.85) 右端的前面两项, 我们将运用 $\alpha d\alpha = \frac{1}{2}d\alpha^2 = \frac{1}{2}d\eta^2$. 而

$$\eta^2 = \frac{\rho}{\rho'} \Rightarrow d\eta^2 = (\frac{\rho}{\rho'})'dh \tag{3.87}$$

从而

$$\kappa L\alpha - \alpha T\alpha = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\alpha^2}(\frac{\rho}{\rho'})'Lh - \frac{1}{2}(\frac{\rho}{\rho'})'Th \tag{3.88}$$

将 (3.88) 和 (3.86) 代入 (3.85) 我们得到

$$L\mu = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\alpha^2}(\frac{\rho}{\rho'})'Lh - \frac{1}{2}(\frac{\rho}{\rho'})'Th - \alpha\hat{T}^i(T\psi_i) \tag{3.89}$$

注意到

$$L = \partial_t - (\alpha\hat{T}^i + \psi_i)\partial_i \Rightarrow -\alpha\hat{T}^i = L^i + \psi_i \tag{3.90}$$

我们有

$$-\alpha\hat{T}^i(T\psi_i) = L^i(T\psi_i) + \sum_i \psi_i T\psi_i = T^i(L\psi_i) - Th = \alpha^{-1}\mu\hat{T}^i(L\psi_i) - Th \tag{3.91}$$

这样我们就得到了一个关于 μ 的传输方程:

$$L\mu = m + \mu e \tag{3.92}$$

其中

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}Th, \quad H = -2h - \eta^2 \tag{3.93}$$

以及

$$e = \frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'Lh + \eta^{-1}\hat{T}^i(L\psi_i) \tag{3.94}$$

为了计算标架 (L, T, X_1, X_2) 的联络系数, 我们必须计算 $D_{X_A}X_B$. 可作如下分解:

$$D_{X_A}X_B = \not{D}_{X_A}X_B + a_{AB}L + b_{AB}T \tag{3.95}$$

则

$$-\mu b_{AB} = g(D_{X_A}X_B, L) = -\chi_{AB} \tag{3.96}$$

以及

$$-\mu a_{AB} + \kappa^2 b_{AB} = g(T, D_{X_A}X_B) = -\kappa\theta_{AB} \tag{3.97}$$

由 $\chi = \alpha(\not{k} - \theta)$, 我们得到

$$b_{AB} = \mu^{-1}\chi_{AB}, \quad a_{AB} = \alpha^{-1}\not{k}_{AB} \tag{3.98}$$

所以我们有如下列表:

$$D_L L = \mu^{-1}(L\mu)L \tag{3.99}$$

$$D_T L = (\not{g}^{-1})^{AB}\eta_B X_A - \alpha^{-1}(L\kappa)L \tag{3.100}$$

$$D_L T = -(\not{g}^{-1})^{AB}\zeta_B X_A - \alpha^{-1}(L\kappa)L \tag{3.101}$$

$$D_{X_A} L = -\mu^{-1}\zeta_A L + \chi_A^B X_B \tag{3.102}$$

$$D_T T = \alpha^{-2}\kappa(T\alpha + L\kappa)L + (\alpha^{-1}L\kappa + \mu^{-1}T\mu)T - \frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}X_B(\kappa^2)X_A \tag{3.103}$$

$$D_{X_A} T = \alpha^{-1}\kappa\varepsilon_A L + \mu^{-1}\eta_A T + \kappa\theta_{AB}(\not{g}^{-1})^{BC}X_C \tag{3.104}$$

$$D_L X_A = D_{X_A} L \tag{3.105}$$

$$D_{X_A} X_B = \not{D}_{X_A} X_B + \alpha^{-1}\not{k}_{AB} L + \mu^{-1}\chi_{AB} T \tag{3.106}$$

我们接下来研究 χ 关于 T 的 Lie 导数与 η 的 $S_{t,u}$- 导数之间的联系.

首先对任意的 t, u 我们可以将 χ 从 $TS_{t,u}$ 按如下方式延拓至 $TW^*_{\epsilon_0}$:

$$\chi(X, L) = \chi(X, T) = 0 \tag{3.107}$$

定义 $\not{\mathcal{L}}_T\chi$ 为 $\mathcal{L}_T\chi$ 在 $S_{t,u}$ 的限制:

$$(\not{\mathcal{L}}_T\chi)(X_A, X_B) = (D_T\chi)(X_A, X_B) + \chi(X_A, D_{X_B}T) + \chi(X_B, D_{X_A}T) \tag{3.108}$$

由 χ 的延拓方式以及 (3.99)—(3.106), 上式等于

$$(D_T\chi)(X_A, X_B) + \kappa\theta_{BC}\chi_A^C + \kappa\theta_{AC}\chi_B^C \tag{3.109}$$

为了计算 $(D_T\chi)(X_A, X_B)$,

$$(D_T\chi)(X_A, X_B) = T(\chi_{AB}) - \chi(\Pi D_T X_A, X_B) - \chi(\Pi D_T X_B, X_A) \tag{3.110}$$

其中 Π 是到 $S_{t,u}$ 的 g- 投影. 现在

$$T(\chi_{AB}) = T(g(D_{X_A}L, X_B)) = g(D_T D_{X_A}L, X_B) + g(D_{X_A}L, D_T X_B) \tag{3.111}$$

而

$$g(D_T D_{X_A}L, X_B) = g(D_{X_A}D_T L, X_B) + g(D_{[T,X_A]}L, X_B) + R(X_B, L, T, X_A) \tag{3.112}$$

由 (3.100),

$$g(D_{X_A}D_TL, X_B) = g(D_{X_A}(\eta^C X_C - \alpha^{-1}(L\kappa)L), X_B) \tag{3.113}$$

这等于

$$-\alpha^{-1}(L\kappa)\chi_{AB} + X_A(\eta_B) - \eta(\not{D}_{X_A}X_B) = -\alpha^{-1}(L\kappa)\chi_{AB} + \not{D}_A\eta_B \tag{3.114}$$

由于 $[T, X_A]$ 与 $S_{t,u}$ 相切, 我们有

$$g(D_{[T,X_A]}L, X_B) = \chi([T, X_A], X_B) = \chi(\Pi D_T X_A, X_B) - \chi(\Pi D_{X_A}T, X_B) \tag{3.115}$$

$$= \chi(\Pi D_T X_A, X_B) - \kappa\theta_{AC}\chi_B^C \tag{3.116}$$

同样

$$g(D_{X_A}L, D_T X_B) = -\mu^{-1}\zeta_A g(L, D_T X_B) + g(\chi_{AC}X^C, \Pi D_T X_B) \tag{3.117}$$

这等于

$$\mu^{-1}\zeta_A\eta_B + \chi(X_A, \Pi D_T X_B) \tag{3.118}$$

所以我们得到

$$(D_T\chi)(X_A, X_B)$$
$$= \not{D}_A\eta_B + \mu^{-1}\zeta_A\eta_B - \alpha^{-1}(L\kappa)\chi_{AB} - \kappa\theta_{AC}\chi_B^C - R(X_A, T, X_B, L) \tag{3.119}$$

这个方程的对称部分为

$$(D_T\chi)(X_A, X_B) = \frac{1}{2}(\not{D}_A\eta_B + \not{D}_B\eta_A) + \frac{1}{2}\mu^{-1}(\zeta_A\eta_B + \zeta_B\eta_A) \tag{3.120}$$

$$-\alpha^{-1}(L\kappa)\chi_{AB} - \frac{1}{2}\kappa(\theta_{AC}\chi_B^C + \theta_{BC}\chi_A^C) \tag{3.121}$$

$$-\frac{1}{2}(R(X_A, T, X_B, L) + R(X_B, T, X_A, L)) \tag{3.122}$$

反对称部分没有给出新的信息.

记

$$(\not{\mathcal{L}}_T\chi)(X_A, X_B) = \not{\mathcal{L}}_T\chi_{AB} \tag{3.123}$$

我们的结论是

$$\not{\mathcal{L}}_T\chi_{AB} = \frac{1}{2}(\not{D}_A\eta_B + \not{D}_B\eta_A) + \frac{1}{2}\mu^{-1}(\zeta_A\eta_B + \zeta_B\eta_A) \tag{3.124}$$

$$-\alpha^{-1}(L\kappa)\chi_{AB} + \frac{1}{2}\kappa(\theta_{AC}\chi_B^C + \theta_{BC}\chi_A^C) - \gamma_{AB} \tag{3.125}$$

其中

$$\gamma_{AB} = \frac{1}{2}(R(X_A, T, X_B, L) + R(X_B, T, X_A, L)) \tag{3.126}$$

接下来我们将使用类声标架 $(L, \underline{L}, X_1, X_2)$, 其中

$$\underline{L} = \alpha^{-1}\kappa L + 2T \tag{3.127}$$

容易验证 $\underline{L}$ 是一个内向的指向未来的类声向量, 并且满足如下条件:

$$g(L, \underline{L}) = -2\mu \tag{3.128}$$

声学度量的逆矩阵在这个标架下表示为

$$(g^{-1})^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\mu}(L^\mu \underline{L}^\nu + L^\nu \underline{L}^\mu) + (\not{g}^{-1})^{AB} X_A^\mu X_B^\nu \tag{3.129}$$

由 (3.99)—(3.106), 我们有如下列表:

$$D_L L = \mu^{-1}(L\mu)L \tag{3.130}$$

$$D_{\underline{L}} L = -L(\alpha^{-1}\kappa)L + 2\eta^A X_A \tag{3.131}$$

$$D_{X_A} L = -\mu^{-1}\zeta_A L + \chi_A^B X_B \tag{3.132}$$

$$D_L \underline{L} = -2\zeta^A X_A \tag{3.133}$$

$$D_{\underline{L}} \underline{L} = (\mu^{-1}\underline{L}\mu + L(\alpha^{-1}\kappa))\underline{L} - 2\mu(\not{g}^{-1})^{AB} X_B(\alpha^{-1}\kappa) X_A \tag{3.134}$$

$$D_{X_A} \underline{L} = \mu^{-1}\eta_A \underline{L} + \underline{\chi}_A^B X_B \tag{3.135}$$

$$D_L X_A = D_{X_A} L \tag{3.136}$$

$$D_{X_A} X_B = \not{D}_{X_A} X_B + \frac{1}{2}\mu^{-1}\underline{\chi}_{AB} L + \frac{1}{2}\mu^{-1}\chi_{AB}\underline{L} \tag{3.137}$$

类似地, 我们有

$$\underline{\chi} = \kappa(\not{k} + \theta) \tag{3.138}$$

这样我们就写出了所有的声学结构方程.

我们将导出 $\Box_g$ 和 $\Box_{\tilde{g}}$ 的表达式. 我们有

$$\Box_g f = \mathrm{tr}(D^2 f) \tag{3.139}$$

其中 tr 是关于 g 的迹, 而 $D^2 f$ 表示 f 关于 g 的 Hessian. 由 (3.129),

$$\Box_g f = (g^{-1})^{\mu\nu}(D^2 f)_{\mu\nu} = -\mu^{-1}(D^2 f)_{\underline{L}L} + (\not{g}^{-1})^{AB}(D^2 f)_{AB} \tag{3.140}$$

同样我们可以考虑 f 的 Hessian 在 $S_{t,u}$ 上关于诱导度量 $\not{g}$ 的限制:

$$\not{D}^2 f \tag{3.141}$$

则算子 $\not{\Delta} = \Delta_{\not{g}}$ 可以表示为

$$\not{\Delta} = \mathrm{tr}(\not{D}^2 f) \tag{3.142}$$

这里 tr 是关于 $\not{g}$ 的迹. 在标架下我们有

$$(D^2 f)_{AB} = X_A(X_B f) - (D_{X_A} X_B) f \tag{3.143}$$

以及

$$(\not{D}^2 f)_{AB} = X_A(X_B f) - (\not{D}_{X_A} X_B) f \tag{3.144}$$

由 (3.137), 我们有

$$(D^2 f)_{AB} = (\not{D}^2 f)_{AB} - \frac{1}{2}\mu^{-1}\underline{\chi}_{AB}(Lf) - \frac{1}{2}\mu^{-1}\chi_{AB}(\underline{L}f) \tag{3.145}$$

从而

$$(\not{g}^{-1})^{AB}(D^2 f)_{AB} = \not{\Delta} f - \frac{1}{2}\mu^{-1}\mathrm{tr}\underline{\chi}(Lf) - \frac{1}{2}\mu^{-1}\mathrm{tr}\chi(\underline{L}f) \tag{3.146}$$

同样由 (3.133),

$$(D^2 f)_{\underline{L}L} = L(\underline{L}f) - (D_L \underline{L}) f = L(\underline{L}f) + 2\zeta \cdot \not{d} f \tag{3.147}$$

所以我们得到了 $\Box_g$ 的表达式

$$\Box_g f = \not{\Delta} f - \frac{1}{2}\mu^{-1}\mathrm{tr}\underline{\chi}(Lf) - \frac{1}{2}\mu^{-1}\mathrm{tr}\chi(\underline{L}f) - \mu^{-1}L(\underline{L}f) - 2\mu^{-1}\zeta \cdot \not{d} f \tag{3.148}$$

由于共形声学度量 $\tilde{g}$ 由

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu} \tag{3.149}$$

给出, 我们有

$$\Box_{\tilde{g}} = \Omega^{-1}\Box_g f + \Omega^{-2}(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu \Omega \partial_\nu f = \Omega^{-1}\Box_g f + \Omega^{-2}\frac{d\Omega}{dh}(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu h \partial_\nu f \tag{3.150}$$

由 (3.129), 我们有

$$(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu h \partial_\nu f = -\frac{1}{2}\mu^{-1}(\underline{L}h)(Lf) - \frac{1}{2}\mu^{-1}(\underline{L}f)(Lh) + \not{d}h \cdot \not{d}f \tag{3.151}$$

所以, 若设

$$\nu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi + \Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}(Lh)) \tag{3.152}$$

$$\underline{\nu} = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\underline{\chi} + \Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}(\underline{L}h)) \tag{3.153}$$

我们得到如下公式:

$$\Omega\Box_{\tilde{g}} f = \not{\Delta} f - \mu^{-1}L(\underline{L}f) - \mu^{-1}(\nu\underline{L}f + \underline{\nu}Lf) - 2\mu^{-1}\zeta\cdot \not{d}f + \Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}\not{d}h\cdot\not{d}f \tag{3.154}$$

3.2 L 和 $\hat{T}$ 的直角坐标分量的导数

我们将要看到 L 和 $\hat{T}$ 的直角坐标分量 L^i, $\hat{T}^i$ 沿 L, T 和 X_A 方向的导数当 $\mu \to 0$ 时是正则的. 接下来我们将用 ∇ 表示 Galileo 时空 $\mathcal{G}$ 作为仿射空间自然诱导的那个联络. 若 t 和 x^i, $i = 1, 2, 3$ 是 $\mathcal{G}$ 的线性坐标, 则 ∇ 则是这些坐标下的普通偏导数. 我们有

$$D_\mu W^\nu = \nabla_\mu W^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}W^\lambda \tag{3.155}$$

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = (g^{-1})^{\nu\kappa}\Gamma_{\mu\lambda\kappa} \tag{3.156}$$

$$\Gamma_{\mu\lambda\kappa} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \tag{3.157}$$

在等熵无旋的情形有 $v^i = -\partial_i\phi$, 则声学度量可以写成如下形式:

$$g = -\eta^2 dt^2 + \sum_i (dx^i + \partial_i\phi dt)^2 \tag{3.158}$$

直接计算我们就得到了联络系数 (Christoffel 记号) 的表达式:

$$\Gamma_{000} = \frac{1}{2}\partial_0(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) \tag{3.159}$$

$$\Gamma_{0i0} = \frac{1}{2}\partial_i(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) \tag{3.160}$$

$$\Gamma_{ij0} = \partial_i\partial_j\phi \tag{3.161}$$

$$\Gamma_{00k} = \partial_0\partial_k\phi - \frac{1}{2}\partial_k(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) \tag{3.162}$$

$$\Gamma_{i0k} = \Gamma_{ijk} = 0 \tag{3.163}$$

现在考虑向量场

$$L(L^\mu)\partial_\mu \tag{3.164}$$

由 $L(L^0) = 0$, 它可以展开为

$$a_L \hat{T} + b_L \tag{3.165}$$

其中 $b_L \in TS_{t,u}$. 同时 (3.165) 也是 $\nabla_L L$, 所以 $\nabla_L L = a_L \hat{T} + b_L$.

与 $\hat{T}$ 做内积:

$$a_L = g(\nabla_L L, \hat{T}) \tag{3.166}$$

把 b_L 在基底下展开:

$$b_L = b_L^A X_A \tag{3.167}$$

与 X_B 做内积:

$$g(\nabla_L L, X_B) = b_L^A \not{g}_{AB} \tag{3.168}$$

而

$$g(\nabla_L L, \hat{T}) = g(D_L L, \hat{T}) - \Gamma_{\alpha\beta\nu} L^\alpha L^\beta \hat{T}^\nu \tag{3.169}$$

由 (3.92) 和 (3.99),

$$g(D_L L, \hat{T}) = -\kappa^{-1}(L\mu) = -\kappa^{-1} m - \alpha e \tag{3.170}$$

同样

$$\Gamma_{\alpha\beta\nu} L^\alpha L^\beta \hat{T}^\nu = \Gamma_{00k} \hat{T}^k = \hat{T}(\psi_0) - \frac{1}{2}\hat{T}(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\hat{T}(h) \tag{3.171}$$

$$\Rightarrow g(\nabla_L L, \hat{T}) = -\alpha e \tag{3.172}$$

κ^{-1} 这一项就没有了! 由 (3.94), 我们有

$$a_L = -\alpha e = -\frac{1}{2\alpha} L(\eta^2) - \hat{T}^i (L\psi_i) \tag{3.173}$$

由于 $g(D_L L, X_B) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} g(\nabla_L L, X_B) &= -\Gamma_{\alpha\beta\nu} L^\alpha L^\beta X_B^\nu = -\Gamma_{00k} X_B^k \\ &= -X_B(\psi_0) + \frac{1}{2} X_B(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{dH}{dh} X_B(h) \end{aligned} \tag{3.174}$$

所以

$$b_L^A = (\not{g}^{-1})^{AB} g(\nabla_L L, X_B) = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh} X^A(h) \tag{3.175}$$

接下来考虑向量场 $L(\hat{T}^\mu)\partial_\mu$. 同样可以将其展开为

$$\nabla_L \hat{T} = p_L \hat{T} + q_L \tag{3.176}$$

显然

$$p_L = g(\nabla_L \hat{T}, \hat{T}) \tag{3.177}$$

在基底下展开:

$$q_L = q_L^A X_A \tag{3.178}$$

与 X_B 作内积:

$$q_L^A \not{g}_{AB} = g(\nabla_L \hat{T}, X_B) \tag{3.179}$$

由于 $g(D_L\hat{T}, \hat{T}) = \frac{1}{2}L(g(\hat{T}, \hat{T})) = 0$, 我们有

$$g(\nabla_L \hat{T}, \hat{T}) = -\Gamma_{\alpha\beta\nu} L^\alpha \hat{T}^\beta \hat{T}^\nu = 0 \Rightarrow p_L = 0 \tag{3.180}$$

同样我们有

$$\begin{aligned}
g(\nabla_L \hat{T}, X_B) &= g(D_L \hat{T}, X_B) - \Gamma_{\alpha\beta\nu} L^\alpha \hat{T}^\beta X_B^\nu \\
&= g(D_L \hat{T}, X_B) = \kappa^{-1} g(D_L T, X_B) \\
&= -\kappa^{-1} \zeta^A \not{g}_{AB} \qquad (3.181) \\
&\Rightarrow q_L^A = -\kappa^{-1}\zeta^A = -\alpha\varepsilon^A + X^A(\alpha) \\
&= -\alpha k_{ij} X^{Ai} \hat{T}^j + X^A(\alpha) \\
&= -\hat{T}^j (X^A \psi_j) + X^A(\alpha) \qquad (3.182)
\end{aligned}$$

上式当 $\mu \to 0$ 时是正则的. 考虑向量场

$$T(L^\mu)\partial_\mu \tag{3.183}$$

同样可以展开为

$$\nabla_T L = a_T \hat{T} + b_T \tag{3.184}$$

$$\Rightarrow a_T = g(\nabla_T L, \hat{T}), \quad b_T = b_T^A X_A, \quad b_T^A \not{g}_{AB} = g(\nabla_T L, X_B) \tag{3.185}$$

我们有 $g(\nabla_T L, \hat{T}) = g(D_T L, \hat{T}) - \Gamma_{\alpha\beta\nu} T^\alpha L^\beta \hat{T}^\nu$. 由 (3.100), 我们有

$$g(D_T L, \hat{T}) = g(-\alpha^{-1}(L\kappa)L, \hat{T}) = L\kappa \tag{3.186}$$

而 $-\Gamma_{\alpha\beta\nu}T^\alpha L^\beta \hat{T}^\nu = 0$, 我们得到

$$a_T = L\kappa \tag{3.187}$$

同样

$$g(\nabla_T L, X_B) = g(D_T L, X_B) - \Gamma_{\alpha\beta\nu}T^\alpha L^\beta X_B^\nu = g(D_T L, X_B) = \eta_B \tag{3.188}$$

$$\Rightarrow b_T^A = \eta^A \tag{3.189}$$

最后考虑向量场

$$T(\hat{T}^\mu)\partial_\mu \tag{3.190}$$

它可以展开为

$$\nabla_T \hat{T} = p_T \hat{T} + q_T \tag{3.191}$$

$$\Rightarrow p_T = g(\nabla_T \hat{T}, \hat{T}) = g(D_T \hat{T}, \hat{T}) - \Gamma_{\alpha\beta\nu}T^\alpha \hat{T}^\beta \hat{T}^\nu = 0 \tag{3.192}$$

展开 $q_T = q_T^A X_A$, 我们有

$$q_T^A \not{g}_{AB} = g(\nabla_T \hat{T}, X_B) = g(D_T \hat{T}, X_B) - \Gamma_{\alpha\beta\nu}T^\alpha \hat{T}^\beta X_B^\nu \tag{3.193}$$

这等于

$$g(D_T \hat{T}, X_B) = \kappa^{-1} g(D_T T, X_B) = -\frac{1}{2\kappa}(\not{g}^{-1})^{AC} X_C(\kappa^2)\not{g}_{AB} = -X_B(\kappa) \tag{3.194}$$

我们接下来算

$$\nabla_{X_A} L = X_A(L^\mu)\partial_\mu \tag{3.195}$$

和

$$\nabla_{X_A} \hat{T} = X_A(\hat{T}^\mu)\partial_\mu \tag{3.196}$$

的表达式. 首先展开

$$\nabla_{X_A} L = \not{a}_A \hat{T} + \not{b}_A \tag{3.197}$$

则我们有

$$\not{a}_A = g(\nabla_{X_A} L, \hat{T}) = g(D_{X_A} L, \hat{T}) - \Gamma_{\alpha\beta\nu}X_A^\alpha L^\beta \hat{T}^\nu = g(D_{X_A} L, \hat{T}) = \kappa^{-1}\zeta_A \tag{3.198}$$

由 (3.102), 上式在 $\mu \to 0$ 时是正则的. 另一方面

$$
\begin{aligned}
\not{d}_{BC}\not{b}_A^B &= g(\nabla_{X_A} L, X_C) = g(D_{X_A} L, X_C) - \Gamma_{\alpha\beta\nu} X_A^\alpha L^\beta X_C^\nu \\
&= g(D_{X_A} L, X_C) = \chi_{AC}
\end{aligned}
\tag{3.199}
$$

最终

$$
\nabla_{X_A} \hat{T} = \not{p}_A \hat{T} + \not{q}_A \tag{3.200}
$$

$$
\Rightarrow \not{p}_A = g(\nabla_{X_A} \hat{T}, \hat{T}) = g(D_{X_A} \hat{T}, \hat{T}) - \Gamma_{\alpha\beta\nu} X_A^\alpha \hat{T}^\beta \hat{T}^\nu = 0 \tag{3.201}
$$

$$
\begin{aligned}
\not{q}_A^B \not{d}_{BC} &= g(\nabla_{X_A} \hat{T}, X_C) = g(D_{X_A} \hat{T}, X_C) - \Gamma_{\alpha\beta\nu} X_A^\alpha \hat{T}^\beta X_C^\nu \\
&= \kappa^{-1} g(D_{X_A} T, X_C) = \theta_{AC}
\end{aligned}
\tag{3.202}
$$

第四章 声学曲率

我们将导出声学度量 g 的曲率张量的表达式.

在这一章中我们将要使用上一章中给出的 Christoffel 记号的表达式

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{000} &= \frac{1}{2}\partial_0(-\eta^2+|\mathbf{v}|^2) \\
\Gamma_{0i0} &= \frac{1}{2}\partial_i(-\eta^2+|\mathbf{v}|^2) \\
\Gamma_{ij0} &= \partial_i\partial_j\phi \\
\Gamma_{00k} &= \frac{1}{2}(2\partial_0\partial_k\phi-\partial_k(-\eta^2+|\mathbf{v}|^2)) \\
\Gamma_{i0k} &= \Gamma_{ijk}=0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

4.1 曲率张量的表达式

我们有如下的曲率张量表达式:

$$
R_{\mu\nu\alpha\beta}=R^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}+R^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{4.2}
$$

其中

$$
R^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\nu g_{\beta\mu}+\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu}-\partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}-\partial_\beta\partial_\nu g_{\alpha\mu}) \tag{4.3}
$$

$$
R^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}=-(g^{-1})^{\kappa\lambda}(\Gamma_{\alpha\mu\kappa}\Gamma_{\beta\nu\lambda}-\Gamma_{\beta\mu\kappa}\Gamma_{\alpha\nu\lambda}) \tag{4.4}
$$

由这些表达式以及 Christoffel 记号的表达式, 我们有

$$R_{ijkl} = R^{(1)}_{ijkl} = \eta^{-2}(\partial_i\partial_k\phi\partial_j\partial_l\phi - \partial_i\partial_l\phi\partial_j\partial_k\phi) \tag{4.5}$$

同样我们有

$$R_{0i0j} = R^{(2)}_{0i0j} + R^{(1)}_{0i0j} \tag{4.6}$$

其中

$$R^{(2)}_{0i0j} = \frac{1}{2}(\partial_0\partial_i g_{0j} + \partial_0\partial_j g_{0i} - \partial_0^2 g_{ij} - \partial_i\partial_j g_{00}) = \partial^2_{ij}(\partial_0\phi - \frac{1}{2}\sum_k(\partial_k\phi)^2 + \frac{1}{2}\eta^2) \tag{4.7}$$

即

$$R^{(2)}_{0i0j} = \partial^2_{ij}h + \frac{1}{2}\partial^2_{ij}\eta^2 = -\frac{1}{2}\partial^2_{ij}H = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\partial^2_{ij}h - \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}\partial_i h\partial_j h \tag{4.8}$$

所以 R_{0i0j} 中真正的主部是 $-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\partial^2_{ij}h$. 我们可以用 $D^2_{ij}h$ 表示主部:

$$R_{0i0j} = R^{[P]}_{0i0j} + R^{[N]}_{0i0j} \tag{4.9}$$

其中

$$R^{[P]}_{0i0j} = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}D^2_{ij}h \tag{4.10}$$

因为

$$R^{(2)}_{0i0j} = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}D^2_{ij}h - \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\Gamma^{\alpha}_{ij}\partial_\alpha h - \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}\partial_i h\partial_j h$$

我们有

$$R^{[N]}_{0i0j} = -\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}\partial_i h\partial_j h - \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\Gamma^{\alpha}_{ij}\partial_\alpha h + R^{(1)}_{0i0j} \tag{4.11}$$

其中

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{0i0j} = \eta^{-2}(&\frac{1}{2}\partial_0(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)\partial_i\partial_j\phi - \frac{1}{4}\partial_i(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)\partial_j(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)) \\ &-\eta^{-2}\partial_k\phi(\partial_i\partial_j\phi)\frac{1}{2}(2\partial_0\partial_k\phi - \partial_k(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)) \end{aligned} \tag{4.12}$$

最后我们考虑如下分量:

$$R_{0ijk} = R^{(2)}_{0ijk} + R^{(1)}_{0ijk} \tag{4.13}$$

并且

$$R^{(2)}_{0ijk} = \frac{1}{2}(\partial^2_{ij}g_{0k} + \partial^2_{0k}g_{ij} - \partial^2_{0j}g_{ki} - \partial^2_{ki}g_{0j}) = 0 \tag{4.14}$$

而

$$R^{(1)}_{0ijk} = -(g^{-1})^{\sigma\lambda}(\Gamma_{j0\sigma}\Gamma_{ik\lambda} - \Gamma_{k0\sigma}\Gamma_{ij\lambda}) \tag{4.15}$$

从而

$$R_{0ijk} = R^{(1)}_{0ijk} = \eta^{-2}(\frac{1}{2}\partial_j(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)\partial^2_{ik}\phi - \frac{1}{2}\partial_k(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)\partial^2_{ij}\phi) \tag{4.16}$$

现在我们已经计算了所有的曲率张量, 我们将更加系统地把它们表示出来. 所以我们要引入下面的一些记号:

$$\tau_\mu = \partial_\mu h$$
$$v_{\mu\nu} = D_\mu \tau_\nu = (D^2 h)_{\mu\nu}$$
$$w_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi_\nu = w_{\nu\mu}$$

首先只有 R_{0i0j} 这个分量中才有主部, 我们有

$$R^{[P]}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\delta^0_\mu\delta^0_\beta v_{\alpha\nu} + \delta^0_\alpha\delta^0_\nu v_{\mu\beta} - \delta^0_\nu\delta^0_\beta v_{\alpha\mu} - \delta^0_\alpha\delta^0_\mu v_{\nu\beta}) \tag{4.17}$$

低阶项更加复杂一些. 首先由 (4.5),

$$R^{[N]}_{ijkl} = \eta^{-2}(w_{ik}w_{jl} - w_{il}w_{jk}) \tag{4.18}$$

再由 (4.11) 和 (4.12),

$$\begin{aligned} R^{[N]}_{0i0j} = & -\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}\tau_i\tau_j - \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\Gamma^0_{ij}\tau_0 + \Gamma^k_{ij}\tau_k) \\ & + \eta^{-2}(\frac{1}{2}\partial_0(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)w_{ij} - \frac{1}{4}\partial_i(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)\partial_j(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)) \\ & - \eta^{-2}\tau_k(w_{ij})\frac{1}{2}(2w_{0k} - \partial_k(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)) \end{aligned}$$

由 (4.1),

$$\Gamma^0_{ij} = (g^{-1})^{00}\Gamma_{ij0} = -\eta^{-2}\omega_{ij}$$
$$\Gamma^k_{ij} = (g^{-1})^{k0}\Gamma_{ij0} = -\eta^{-2}v^k\omega_{ij}$$

同样, 因为

$$h = \psi_0 - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \quad 且 \quad H = -2h - \eta^2$$

我们有

$$-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2 = H + 2\psi_0 \tag{4.19}$$

把这些代入 $R^{[N]}_{0i0j}$ 的表达式中, 由 $\psi_k = -v^k$ 我们得到

$$\begin{aligned} R^{[N]}_{0i0j} = &-\frac{1}{2}(\frac{d^2H}{dh^2} + \frac{1}{2}\eta^{-2}(\frac{dH}{dh})^2)\tau_i\tau_j \\ &+\frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh}(2\tau_0 w_{ij} - \tau_i w_{j0} - \tau_j w_{i0}) \\ &+\eta^{-2}(w_{00}w_{ij} - w_{i0}w_{j0}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

(4.16) 表明

$$R^{[N]}_{0ijk} = \frac{1}{2}\eta^{-2}(\partial_j(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)w_{ik} - \partial_k(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)w_{ij})$$

代入得到

$$R^{[N]}_{0ijk} = \frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh}(\tau_j w_{ik} - \tau_k w_{ij}) + \eta^{-2}(w_{j0}w_{ik} - w_{k0}w_{ij}) \tag{4.21}$$

最后综合 $R^{[N]}_{ijkl}, R^{[N]}_{0ijk}$ 和 $R^{[N]}_{0i0j}$ 的表达式, 我们得到了 $R^{[N]}_{\mu\nu\alpha\beta}$ 的表达式

$$R^{[N]}_{\mu\nu\alpha\beta} = \eta^{-2}A_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh}C_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}H_2B_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{4.22}$$

其中

$$A_{\mu\nu\alpha\beta} = w_{\mu\alpha}w_{\nu\beta} = w_{\mu\beta}w_{\nu\alpha}$$

$$B_{\mu\nu\alpha\beta} = (\delta^0_\mu\tau_\nu - \delta^0_\nu\tau_\mu)(\delta^0_\alpha\tau_\beta - \delta^0_\beta\tau_\alpha)$$

并且由

$$\xi_{\mu\alpha\beta} = \delta^0_\alpha w_{\beta\mu} - \delta^0_\beta w_{\alpha\mu}$$

我们有

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = \tau_\mu\xi_{\nu\alpha\beta} - \tau_\nu\xi_{\mu\alpha\beta} + \tau_\alpha\xi_{\beta\mu\nu} - \tau_\beta\xi_{\alpha\mu\nu}$$

同样, 函数 H_2 定义为

$$H_2 = \frac{d^2H}{dh^2} + \frac{1}{2}\eta^{-2}(\frac{dH}{dh})^2$$

$A_{\mu\nu\alpha\beta}, B_{\mu\nu\alpha\beta}, C_{\mu\nu\alpha\beta}$ 的表达式有着和曲率张量相同的代数性质, 即前面和后面两组指标是分别反对称的, 以及 Bianchi 恒等式的性质, 所以前后两组指标是可交换的. 特别地, $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ 的 Bianchi 恒等式性质是从 $\xi_{\mu\alpha\beta}$ 继承来的:

$$\xi_{\mu\alpha\beta} + \xi_{\alpha\beta\mu} + \xi_{\beta\mu\alpha} = 0$$

4.2 声学结构方程当 $\mu \to 0$ 时的正则性

首先我们计算 α_{AB}, 它出现在了 χ_{AB} 的传输方程中. 由定义,

$$\begin{aligned}
\alpha_{AB} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} X_A^\mu L^\nu X_B^\alpha L^\beta \\
&= R_{i0j0} X_A^i X_B^j + R_{ijkl} X_A^i L^j X_B^k L^l + R_{i0jk} X_A^i X_B^j L^k + R_{i0jk} X_A^j X_B^i L^k
\end{aligned}$$

由 (3.106), α_{AB} 的主部是

$$\begin{aligned}
\alpha_{AB}^{[P]} = R_{0i0j}^{[P]} X_A^i X_B^j &= -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh} D^2 h(X_A, X_B) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(X_A(X_B h) - (D_{X_A} X_B) h) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\not{D}^2 h(X_A, X_B) - \alpha^{-1} \not{k}_{AB} L h - \mu^{-1} \chi_{AB} T h)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

所以当 $\mu \to 0$ 时 $\alpha_{AB}^{[P]}$ 中的奇异项是

$$\frac{1}{2\mu}\frac{dH}{dh}\chi_{AB} T(h) \tag{4.24}$$

对于低阶项我们有

$$\alpha_{AB}^{[N]} = \eta^{-2}\alpha_{AB}^{[A]} + \frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh}\alpha_{AB}^{[C]} - \frac{1}{2}H_2 \alpha_{AB}^{[B]} \tag{4.25}$$

和

$$\begin{aligned}
\alpha_{AB}^{[A]} &= (w_{\mu\alpha} w_{\nu\beta} - w_{\mu\beta} w_{\nu\alpha}) X_A^\mu L^\nu X_B^\alpha L^\beta = \not{\psi}_{AB} w_{LL} - (\not{\psi}_L)_A (\not{\psi}_L)_B \\
\alpha_{AB}^{[B]} &= (\delta_\mu^0 \tau_\nu - \delta_\nu^0 \tau_\mu)(\delta_\alpha^0 \tau_\beta - \delta_\beta^0 \tau_\alpha) X_A^\mu L^\nu X_B^\alpha L^\beta = \not{\tau}_A \not{\tau}_B \\
\alpha_{AB}^{[C]} &= (\tau_\mu \xi_{\nu\alpha\beta} - \tau_\nu \xi_{\mu\alpha\beta} + \tau_\alpha \xi_{\beta\mu\nu} - \tau_\beta \xi_{\alpha\mu\nu}) X_A^\mu L^\nu X_B^\alpha L^\beta \\
&= 2\tau_L \not{\psi}_{AB} - \not{\tau}_A (\not{\psi}_L)_B - \not{\tau}_B (\not{\psi}_L)_A
\end{aligned} \tag{4.26}$$

所以当 $\mu \to 0$ 时 $\alpha_{AB}^{[C]}$ 是正则的. α_{AB} 中唯一的奇异项是 (4.24).

回忆上一章中关于 χ 的传输方程:

$$L\chi_{AB} = \mu^{-1}(L\mu)\chi_{AB} + \chi_A^C\chi_{BC} - \alpha_{AB} = e\chi_{AB} + \mu^{-1}m\chi_{AB} + \chi_A^C\chi_{BC} - \alpha_{AB} \quad (4.27)$$

这里我们运用了关于 μ 的传输方程

$$L\mu = m + \mu e \quad (4.28)$$

其中

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}T(h), \quad e = \frac{1}{2\eta}\frac{d(\eta^2)}{dh}L(h) + \frac{1}{\eta}\hat{T}^i(L\psi_i) \quad (4.29)$$

所以我们知道 (4.27) 的右端当 $\mu \to 0$ 时是正则的.

接下来我们将分析 Gauss 方程和 Codazzi 方程右端的正则性.

回忆 Codazzi 方程 (3.50):

$$(\mathrm{d}\!\!/\mathrm{iv}\chi)_A - \not{d}_A\mathrm{tr}\chi = \beta_A^* - \mu^{-1}(\zeta_B\chi_A^B - \zeta_A\mathrm{tr}\chi) \quad (4.30)$$

这里 $\beta_B^* = (\not{g}^{-1})^{AC}\beta_C\epsilon_{AB}$.

回忆 (3.53) 和 k_{ij} 的定义, 我们知道 $\mu^{-1}\zeta_A$ 当 $\mu \to 0$ 时是正则的. 从而 (4.30) 右端的正则性就归结为下述表达式的正则性:

$$R(X_C, L, X_A, X_B) = \beta_C\epsilon_{AB} \quad (4.31)$$

我们有

$$\epsilon_{AB}\beta_C^{[P]} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^{[P]}X_C^\mu L^\nu X_A^\alpha X_B^\beta = 0 \quad (4.32)$$

和

$$\beta_A^{[N]} = \eta^{-2}\beta_A^{[A]} + \frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh}\beta_A^{[C]} - \frac{1}{2}H_2\beta_A^{[B]} \quad (4.33)$$

其中

$$\epsilon_{AB}\beta_C^{[A]} = \psi_{CA}(\psi_L)_B - \psi_{CB}(\psi_L)_A$$
$$\epsilon_{AB}\beta_C^{[B]} = 0$$
$$\epsilon_{AB}\beta_C^{[C]} = -\not{t}_A\psi_{BC} + \not{t}_B\psi_{AC}$$

所以当 $\mu \to 0$ 时 β_A 是正则的.

我们转到 Gauss 方程 (3.36). 因为

$$R_{ABCD} = \rho \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} \tag{4.34}$$

所以只需证明当 $\mu \to 0$ 时 R_{ABCD} 是正则的. 我们有

$$R^{[P]}_{ABCD} = R^{[P]}_{\mu\nu\alpha\beta} X^\mu_A X^\nu_B X^\alpha_C X^\beta_D = 0 \tag{4.35}$$

和

$$R^{[N]}_{ABCD} = -\eta^{-2} R^{[A]}_{ABCD} + \frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh} R^{[C]}_{ABCD} - \frac{1}{2} H_2 R^{[B]}_{ABCD} \tag{4.36}$$

其中

$$\begin{aligned}
R^{[A]}_{ABCD} &= \psi_{AC}\psi_{BD} - \psi_{AD}\psi_{BC} \\
R^{[B]}_{ABCD} &= R^{[C]}_{ABCD} = 0
\end{aligned}$$

当 $\mu \to 0$ 时 ρ 是正则的.

最后我们讨论方程 (3.124)—(3.125). 正如我们已经看到的当 $\mu \to 0$ 时 $\mu^{-1}\zeta$ 是正则的. 我们将讨论 γ_{AB}. 我们有

$$\gamma^{[P]}_{AB} = \frac{1}{2}(R^{[P]}(X_A, T, X_B, L) + R^{[P]}(X_B, T, X_A, L)) \tag{4.37}$$

和

$$\gamma^{[N]}_{AB} = \eta^{-2}\gamma^{[A]}_{AB} + \frac{1}{2}\eta^{-2}\frac{dH}{dh}\gamma^{[C]}_{AB} - \frac{1}{2}H_2\gamma^{[B]}_{AB} \tag{4.38}$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma^{[A]}_{AB} &= \frac{\kappa}{2}(2\psi_{AB} w_{L\hat{T}} - (\psi_L)_A(\psi_{\hat{T}})_B - (\psi_L)_B(\psi_{\hat{T}})_A) \\
\gamma^{[B]}_{AB} &= 0 \\
\gamma^{[C]}_{AB} &= \frac{1}{2}(2\tau_T\psi_{AB} - \kappa \not{\tau}_A(\psi_{\hat{T}})_B - \kappa \not{\tau}_B(\psi_{\hat{T}})_A)
\end{aligned}$$

当 $\mu \to 0$ 时 γ_{AB} 是正则的.

注意到 τ 在标架 (L, T, X_1, X_2) 下的所有分量, 即 $\tau_L, \tau_T, \not{\tau}_A$ 当 $\mu \to 0$ 都是正则的. 同样 w 在 $(L, \hat{T}, X_1, X_2)$ 的所有分量, 即 $w_{LL}, w_{L\hat{T}}, (\psi_{\hat{T}})_A, \psi_{AB}$, 除了 $w_{\hat{T}\hat{T}}$ 当 $\mu \to 0$ 时都是正则的. 最后一项是 $\kappa^{-1} w_{T\hat{T}}$, 而当 $\mu \to 0$ 时 $w_{T\hat{T}}$ 是正则的.

4.3 一个注记

我们以一个注记结束这一章. 由 (4.15), 我们可以看到若 $H = \text{const}$, 则声学曲率张量的主部为 0. 这个事实也可以由第二章中 H 的几何解释所得到. 由 Gauss 方程,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} - \tilde{k}_{\alpha\mu}\tilde{k}_{\beta\nu} + \tilde{k}_{\beta\mu}\tilde{k}_{\alpha\nu} = \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{4.39}$$

其中 R 和 $\tilde{R}$ 分别是 $(\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3, g)$ 和 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$ 的曲率张量. $\tilde{k}$ 是 $(\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3, g)$ 在 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$ 中的第二基本形式, 它只包含声学度量的一阶导数. 而 $(\mathbb{R}^{1+4}, \tilde{g})$ 是一个平坦时空, 所以 R 只包含声学度量的一阶导数, 从而 R 的主部为 0.

第五章　基本能量估计

5.1　连续性假设和定理的陈述

本章将在以共形声学度量 $\tilde{g}$ 为度量的时空中考虑波方程

$$\Box_{\tilde{g}}\psi = 0 \tag{5.1}$$

我们在第一章中已经看到位势函数 ϕ 的一阶变分满足这个方程. $\tilde{g}$ 与 g 的关系为

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu} \tag{5.2}$$

其中

$$\Omega = \frac{\rho/\rho_0}{\eta/\eta_0} = \frac{\rho}{\eta} \tag{5.3}$$

ρ_0 和 η_0 分别是常状态的密度和声速, 我们可以把它们都取为 1. 更一般地, 我们考虑非齐次波方程

$$\Box_{\tilde{g}}\psi = \rho \tag{5.4}$$

其中度量 $\tilde{g}$, ψ 和 ρ 都定义在最大解的定义域 M_{ϵ_0} 上.

在一阶估计中, 我们将取 ψ 为如下形式:

$$\psi_1 = \partial_0\phi - h_0 = \psi_0; \quad \partial_i\phi, i = 1, 2, 3; \quad \Omega_{ij}\phi, i < j = 1, 2, 3; \quad S\phi \tag{5.5}$$

在第二章中我们已经设

$$h_0 = 0$$

我们知道任意一个 ψ_1 在特征超曲面 C_0 的外部都为 0. 在做高阶估计时我们取 ψ 为如下形式:

$$\psi_n = Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} \psi_1 \tag{5.6}$$

其中 ψ_1 是任意一个一阶变分, 而指标 $i_1, \cdots, i_{n-1}$ 则在 $1, 2, 3, 4, 5$ 中取值. 我们将在下一章详细讨论集合 $\{Y_i : i = 1, 2, 3, 4, 5\}$. 同样地, 每个 ψ_n 也在 C_0 外部为 0. 所以我们不妨设 ψ 在 C_0 的外部为 0. 我们可以把注意力集中在时空区域 W_{ϵ_0}. 对任意的 $s \in (0, t_{*\epsilon_0})$, 我们设

$$W_{\epsilon_0}^s = \bigcup_{(t,u) \in [0,s] \times [0,\epsilon_0]} S_{t,u} \tag{5.7}$$

特别地, 我们有

$$\bigcup_{s \in (0, t_{*\epsilon_0})} W_{\epsilon_0}^s = W_{\epsilon_0}^* \tag{5.8}$$

接下来的所有结论都依赖于第二章中的几何构造. 注意到特征超曲面 C_u 只依赖于度量 g 的共形类. 所以由 $S_{t,u}$ 给出的 $W_{\epsilon_0}^*$ 的双参数叶状结构也只依赖于 g 的共形类. 所以这个叶状结构的几何性质既可以针对 g 而言, 也可以针对共形度量 $\tilde{g}$ 而言. 因为我们现在是学习度量 $\tilde{g}$ 下的波方程, 所以讨论 $\tilde{g}$ 的几何性质更自然一些. 但我们的连续性假设却是相对于 g 来构造的, 不过我们还会有一个关于 Ω 的连续性假设.

连续性假设如下:

存在一个不依赖于 s 的正常数 C 使得在 $W_{\epsilon_0}^*$ 中,

$$\mathbf{A1} : C^{-1} \leqslant \Omega \leqslant C$$

$$\mathbf{A2} : C^{-1} \leqslant \eta \leqslant C$$

$$\mathbf{A3} : \mu \leqslant C(1 + \log(1 + t))$$

以及

$$\mathbf{B1} : C^{-1}(1 + t)^{-1} \leqslant \nu \leqslant C(1 + t)^{-1}$$

$$\mathbf{B2} : |\underline{\nu}| \leqslant C(1 + t)^{-1}(1 + \log(1 + t))^4$$

$$\mathbf{B3}: |\hat{\chi}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2}$$

$$\mathbf{B4}: |\underline{\hat{\chi}}| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-6}$$

这里

$$\nu = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\chi = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi + L\log\Omega) \tag{5.9}$$

$$\underline{\nu} = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\underline{\chi} = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\underline{\chi} + \underline{L}\log\Omega) \tag{5.10}$$

$\hat{\chi}$ 和 $\underline{\hat{\chi}}$ 分别是 χ 和 $\underline{\chi}$ 的无迹部分, 而在 $S_{t,u}$ 上定义的逐点张量模则是针对诱导度量 $\not{g}$ 而言.

然后我们有如下假设:

$$\mathbf{B5}: |L\log\Omega| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2}$$

$$\mathbf{B6}: |\underline{L}\log\Omega| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-6}$$

以及

$$\mathbf{B7}: |\zeta+\eta| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

$$\mathbf{B8}: |\not{d}(\eta^{-1}\kappa)| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

$$\mathbf{B9}: |L\eta| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{2}$$

$$\mathbf{B10}: |L(\eta^{-1}\kappa)| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{3}$$

$$\mathbf{B11}: |\underline{L}(\eta^{-1}\kappa)| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-2}$$

和

$$\mathbf{B12}: |L\nu+\nu^2| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{-2}$$

$$\mathbf{B13}: |\underline{L}\nu| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{3}$$

$$\mathbf{B14}: |\not{d}\nu| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{\frac{1}{2}}$$

接下来的连续性假设是关于 μ 的. 我们记 f_+ 和 f_- 分别是函数 f 的正部和负部:

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}, f_- = \min\{f(x), 0\} \tag{5.11}$$

$$\mathbf{C1}: \mu^{-1}(L\mu)_+ \leqslant (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1} + A(t)$$

其中 $A(t)$ 是一个非负函数使得

$$\int_0^s A(t)dt \leqslant C \tag{5.12}$$

(C 不依赖于 s.)

$$\mathbf{C2}: \mu^{-1}(L\mu + \underline{L}\mu)_+ \leqslant B(t)$$

其中 $B(t)$ 是一个非负函数使得

$$\int_0^s (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B(t)dt \leqslant C \tag{5.13}$$

(C 同样不依赖于 s.)

记 $\mathcal{U}$ 为

$$\mathcal{U} = \{x \in W^*_{\epsilon_0} : \mu < 1/4\} \tag{5.14}$$

在 $\mathcal{U} \bigcap W^s_{\epsilon_0}$ 中, 我们有

$$\mathbf{C3}: L\mu \leqslant -C^{-1}(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1}$$

最后一组连续性假设是说存在满足如下条件的函数 ω:

$$\mathbf{D1}: C^{-1}(1+t) \leqslant \omega \leqslant C(1+t)$$

$$\mathbf{D2}: |L\omega - \nu\omega| \leqslant C(1+\log(1+t))^{-2}$$

$$\mathbf{D3}: |\underline{L}\omega| \leqslant C(1+\log(1+t))^3$$

$$\mathbf{D4}: |\not{d}\omega| \leqslant C(1+\log(1+t))^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{D5}: \int_0^s (\int_0^{\epsilon_0} \sup_{S_{t,u}}(\mu|\Box_{\tilde{g}}\omega|)du)dt \leqslant C(1+\log(1+s))^4$$

这里由 (5.3), 模去 **A2**, **A1** 与如下条件等价:

$$\mathbf{A1'}: C^{-1} \leqslant \rho \leqslant C$$

这一章的主要定理是

定理 5.1 设 ψ 是度量 $\tilde{g}$ 下波方程的一个解, 其定义域为 M_{ϵ_0}, 并且在 C_0 外为 0. 对某个 $s \in (0, t_{*\epsilon_0}]$, 设连续性假设 **A1** − **A3**, **B1** − **B14**, **C1** − **C3**, **D1** − **D5** 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 记

$$D_0 = \int_0^{\epsilon_0} (\int_{S_{0,u}} ((L\psi)^2 + (\underline{L}\psi)^2 + |\not{d}\psi|^2)d\mu_{\not{g}})du. \tag{5.15}$$

则存在不依赖于 s 的常数 C 使得

(i) $\sup_{t\in[0,s]}\int_0^{\epsilon_0}(\int_{S_{t,u}}(\mu(1+\mu)((L\psi)^2+|\not{d}\psi|^2)+(\underline{L}\psi)^2)d\mu_{\not{g}})du \leqslant CD_0$

(ii) $\int_{S_{t,u}}\psi^2 d\mu_{\not{g}} \leqslant C\epsilon_0 D_0$

(iii) $\sup_{u\in[0,\epsilon_0]}\int_0^s(\int_{S_{t,u}}((1+\mu)(L\psi)^2+\mu|\not{d}\psi|^2)d\mu_{\not{g}})dt \leqslant CD_0$

(iv) $\sup_{t\in[0,s]}(1+\log(1+t))^{-4}(1+t)^2\int_0^{\epsilon_0}(\int_{S_{t,u}}\mu((L\psi+\nu\psi)^2+|\not{d}\psi|^2)d\mu_{\not{g}})du \leqslant CD_0$

(v) $\sup_{u\in[0,\epsilon_0]}(1+\log(1+t))^{-4}\int_0^s(1+t)^2(\int_{S_{t,u}}(L\psi+\nu\psi)^2 d\mu_{\not{g}})dt \leqslant CD_0$

(vi) $\int_{\mathcal{U}\bigcup W^s_{\epsilon_0}}(1+t)(1+\log(1+t))^{-1}|\not{d}\psi|^2 d\mu_{\not{g}}dudt \leqslant CD_0(1+\log(1+s))^4$

5.2 乘子 K_0 和 K_1 及其相关的能量动量张量

我们首先研究在度量 $\tilde{g}$ 下函数 ψ 的能动压力张量 $\tilde{T}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu} &:= \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{g}^{-1})^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\psi\partial_\lambda\psi \\ &= \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g^{-1})^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\psi\partial_\lambda\psi = T_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{5.16}$$

我们有

$$\tilde{D}^\mu\tilde{T}_{\mu\nu} := (\tilde{g}^{-1})^{\mu\lambda}\tilde{D}_\mu\tilde{T}_{\lambda\nu} = \partial_\nu\psi\Box_{\tilde{g}}\psi$$

其中 $\tilde{D}$ 是度量 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 的协变导数. 所以对于方程 (5.1) 的解, $\tilde{T}_{\mu\nu}$ 关于度量 $\tilde{g}$ 的散度为 0. 而对于非齐次波方程 (5.4) 的解,

$$\tilde{D}^\mu\tilde{T}_{\mu\nu} = \rho\partial_\nu\psi \tag{5.17}$$

我们考虑指向未来的类时向量场 K_0:

$$K_0 = (1+\alpha^{-1}\kappa)L+\underline{L} \tag{5.18}$$

同样, 对于一个给定的满足 **D1**—**D5** 的函数 ω, 我们考虑指向未来的类声向量场 K_1:

$$K_1 = (\omega/\nu)L \tag{5.19}$$

在这里我们稍微解释一下为什么取这两个乘子. 首先乘子必须是非类空的, 从而应该是 L 和 $\underline{L}$ 的线性组合. 因为在做估计的时候我们要分部积分, 所以 L 和 $\underline{L}$ 的系数应该是光滑的. 当我们研究平坦时空的波方程时, 我们总是取对应于时间方向平移的向量场 ∂_t 作为乘子. 所以此时我们也试着取时间平移的向量场 $B = L + \alpha\kappa^{-1}T = \frac{1}{2}(L + \alpha^2\hat{\underline{L}})$, 其中

$$\hat{\underline{L}} = \mu^{-1}\underline{L}$$

我们看到在 B 中当 $\mu \to 0$ 时 $\underline{L}$ 的系数是不光滑的. 另一方面, 在我们设 $\eta_0 = 1$ 之前, L 和 $\underline{L}$ 有着不同的量纲, L 是 T^{-1} 而 $\underline{L}$ 是 L^{-1} (这里 "L" 和 "T" 分别表示长度和时间的量纲). 但是当我们设了 $\eta_0 = 1$ 之后, 单位时间是声音在常状态下走了单位长度所花去的时间. 所以这时时间和长度的单位相同, L 和 $\underline{L}$ 的量纲都是 L^{-1}. 所以很自然地我们会选取 $L + \underline{L}$ 代替 B 作为乘子. 为了处理 μ 的增长, 我们需要加上 $\alpha^{-1}\kappa L$. 这就是 K_0 的由来.

K_1 则类似于平坦时空中反向时间平移的生成子:

$$K = u^2\underline{L} + \underline{u}^2 L$$

其中

$$L = \partial_t + \partial_r, \quad \underline{L} = \partial_t - \partial_r$$

以及

$$\underline{u} = t + r, \quad u = t - r$$

此时我们希望取一个类似的向量场. 与 $t - r$ 类似的是声学函数 u, 它在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中是有界的. 而当 t 很大的时候, $\underline{u} \sim t$. 既然 K 的第一项已经包含在 K_0 中, 所以由 **B1** 和 **D1**, 我们很自然地选取

$$K_1 = (\omega/\nu)L$$

我们将在后面看到为什么恰好选择这种形式.

记 $\tilde{\pi}_0$ 和 $\tilde{\pi}_1$ 分别是共形度量 $\tilde{g}$ 关于 K_0 和 K_1 的 Lie 导数:

$$\tilde{\pi}_0 = \mathcal{L}_{K_0}\tilde{g}, \quad \tilde{\pi}_1 = \mathcal{L}_{K_1}\tilde{g} \tag{5.20}$$

对 K_0 我们考虑向量场

$$\tilde{P}_0^\mu = -\tilde{T}_\nu^\mu K_0^\nu \tag{5.21}$$

其中

$$\tilde{T}_\nu^\mu = (\tilde{g}^{-1})^{\mu\kappa} T_{\kappa\nu}$$

对 K_1 我们考虑向量场

$$\tilde{P}_1^\mu = -\tilde{T}_\nu^\mu K_1^\nu - (\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}(\omega\psi\partial_\nu\psi - \frac{1}{2}\psi^2\partial_\nu\omega) \tag{5.22}$$

设

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = (\tilde{g}^{-1})^{\nu\lambda}\tilde{T}_\lambda^\mu = (\tilde{g}^{-1})^{\mu\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{\nu\lambda}\tilde{T}_{\kappa\lambda} \tag{5.23}$$

对任意向量场 X, 由 $\tilde{T}^{\mu\nu}$ 的对称性有

$$\begin{aligned}\tilde{D}_\mu(\tilde{T}_\nu^\mu X^\nu) &= (\tilde{D}_\mu\tilde{T}_\nu^\mu)X^\nu + \tilde{T}^{\mu\lambda}(\tilde{g}_{\lambda\nu}\tilde{D}_\mu X^\nu) \\ &= \rho X\psi + \frac{1}{2}\tilde{T}^{\mu\lambda}(\tilde{g}_{\lambda\nu}\tilde{D}_\mu X^\nu + \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{D}_\lambda X^\nu) = \rho X\psi + \frac{1}{2}\tilde{T}^{\mu\lambda}\mathcal{L}_X\tilde{g}_{\mu\lambda}\end{aligned} \tag{5.24}$$

所以我们有

$$\tilde{D}_\mu\tilde{P}_0^\mu = -\rho K_0\psi - \frac{1}{2}\tilde{T}^{\mu\nu}\tilde{\pi}_{0,\mu\nu} := \tilde{Q}_0 \tag{5.25}$$

同样, 我们有

$$\tilde{D}_\mu\tilde{P}_1^\mu = -\rho(K_1\psi + \omega\psi) - \frac{1}{2}\tilde{T}^{\mu\nu}\tilde{\pi}_{1,\mu\nu} - \omega(\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + \frac{1}{2}\psi^2\Box_{\tilde{g}}\omega$$

考虑如下事实:

$$\mathrm{tr}\tilde{T} := \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} = -(\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi$$

并且引入

$$\tilde{\pi}_1' = \tilde{\pi}_1 - 2\omega\tilde{g} \tag{5.26}$$

我们可以将上述式子写成如下形式:

$$\tilde{D}_\mu\tilde{P}_1^\mu = -\rho(K_1\psi + \omega\psi) - \frac{1}{2}\tilde{T}^{\mu\nu}\tilde{\pi}_{1,\mu\nu}' + \frac{1}{2}\psi^2\Box_{\tilde{g}}\omega := \tilde{Q}_1 \tag{5.27}$$

对任意向量场 $\tilde{P}$ 和函数 $\tilde{Q}$, 考虑方程

$$\tilde{D}_\mu\tilde{P}^\mu = \tilde{Q} \tag{5.28}$$

在任意一个局部坐标中

$$\tilde{D}_\mu \tilde{P}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det \tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\det \tilde{g}}\tilde{P}^\mu) = \frac{1}{\Omega^2\sqrt{-\det g}}\partial_\mu(\Omega^2\sqrt{-\det g}\tilde{P}^\mu) = \Omega^{-2}D_\mu P^\mu$$

其中

$$P^\mu = \Omega^2 \tilde{P}^\mu \tag{5.29}$$

所以由

$$Q = \Omega^2 \tilde{Q} \tag{5.30}$$

方程 (5.28) 等价于方程

$$D_\mu P^\mu = Q \tag{5.31}$$

我们可以把 (5.31) 在声学坐标 $(t, u, \vartheta^1, \vartheta^2)$ 下表示出来. 把 P 在相应的标架下展开:

$$(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^1}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^2})$$
$$P = P^t \frac{\partial}{\partial t} + P^u \frac{\partial}{\partial u} + \sum_A (P^\vartheta)^A \frac{\partial}{\partial \vartheta^A}$$

注意到由 (2.41), 我们有

$$\sqrt{-\det g} = \mu\sqrt{\det \not{g}} \tag{5.32}$$

所以 (5.31) 有如下形式:

$$\frac{1}{\sqrt{\det \not{g}}}(\frac{\partial}{\partial t}(\mu\sqrt{\det \not{g}}P^t) + \frac{\partial}{\partial u}(\mu\sqrt{\det \not{g}}P^u)) + \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv} M = \mu Q \tag{5.33}$$

其中 M 是 S^2 上的向量场:

$$M = \mu \sum_A (P^\vartheta)^A \frac{\partial}{\partial \vartheta^A}$$

这可以由如下事实得到:

$$\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv} M = \frac{1}{\sqrt{\det \not{g}}}\frac{\partial}{\partial \vartheta^A}(\sqrt{\det \not{g}} M^A)$$

将 (5.33) 在 S^2 相对于测度

$$d\mu_{\not{g}} = \sqrt{\det \not{g}}\, d\vartheta^1 d\vartheta^2 \tag{5.34}$$

积分得到方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{S_{t,u}} \mu P^t d\mu_{\not g}) + \frac{\partial}{\partial u}(\int_{S_{t,u}} \mu P^u d\mu_{\not g}) = \int_{S_{t,u}} \mu Q d\mu_{\not g} \tag{5.35}$$

将 (t,u) 换成 (t',u') 并对 (t',u') 在 $[0,t]\times[0,u]$ 上积分, 若 P 在 C_0 的外部为 0, 我们得到,

$$\mathcal{E}^u(t) - \mathcal{E}^u(0) + \mathcal{F}^t(u) = \int_{W_u^t} Q d\mu_g \tag{5.36}$$

这里 $\mathcal{E}^u$ 是如下定义的 "能量":

$$\mathcal{E}^u(t) = \int_{\Sigma_t^u} \mu P^t d\mu_{\not g} du' = \int_0^u (\int_{S_{t,u'}} \mu P^t d\mu_{\not g}) du' \tag{5.37}$$

而 $\mathcal{F}^t$ 则是 "侧面能量":

$$\mathcal{F}^t(u) = \int_{C_u^t} \mu P^u d\mu_{\not g} dt' = \int_0^t (\int_{S_{t',u}} \mu P^u d\mu_{\not g}) dt' \tag{5.38}$$

在推导 (5.36) 的过程中我们运用了如下事实:

$$\int_{W_u^t} Q d\mu_g = \iint_{[0,t]\times[0,u]} (\int_{S_{t',u'}} \mu Q d\mu_{\not g}) du' dt' \tag{5.39}$$

其中 Σ_t^u 是 Σ_t 中的环状区域:

$$\Sigma_t^u = \bigcup_{u'\in[0,u]} S_{t,u'} \tag{5.40}$$

C_u^t 则是由 C_u 从上方被 Σ_t 所截而得到的:

$$C_u^t = \bigcup_{t'\in[0,t]} S_{t',u} \tag{5.41}$$

而 W_u^t 是被 C_u 和 C_0 以及 Σ_t 和 Σ_0 包围的时空区域:

$$W_u^t = \bigcup_{(t',u')\in[0,t]\times[0,u]} S_{t',u'} \tag{5.42}$$

现在我们可以在标架 $(L, \underline{L}, X_1, X_2)$ 下展开 P:

$$P = P^L L + P^{\underline{L}} \underline{L} + \sum_A P^A X_A$$

由第二章和第三章中的结论我们有

$$L=\frac{\partial}{\partial t} \tag{5.43}$$

$$\underline{L}=\eta^{-1}\kappa\frac{\partial}{\partial t}+2(\frac{\partial}{\partial u}-\Xi^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}) \tag{5.44}$$

$$X_A=\frac{\partial}{\partial\vartheta^A} \tag{5.45}$$

由直接计算可知

$$P^t=P^L+\eta^{-1}\kappa P^{\underline{L}} \tag{5.46}$$

$$P^u=2P^{\underline{L}} \tag{5.47}$$

$$(P^\vartheta)^A=P^A-2P^{\underline{L}}\Xi^A \tag{5.48}$$

我们将写下与 P_0 和 P_1 相对应的能量和侧面能量.

我们从在标架 $(L,\underline{L},X_1,X_2)$ 下能动张量的分量开始:

$$\begin{aligned}
&T_{LL}=(L\psi)^2,\quad T_{\underline{L}\underline{L}}=(\underline{L}\psi)^2,\quad T_{L\underline{L}}=\mu|\not{d}\psi|^2\\
&T_{LA}=(L\psi)(\not{d}_A\psi),\quad T_{\underline{L}A}=(\underline{L}\psi)(\not{d}_A\psi)\\
&T_{AB}=(\not{d}_A\psi)(\not{d}_B\psi)-\frac{1}{2}\not{g}_{AB}(-\mu^{-1}(L\psi)(\underline{L}\psi)+|\not{d}\psi|^2)
\end{aligned} \tag{5.49}$$

这里 $\not{d}_A\psi=X_A\psi$, $S_{t,u}$ 上张量的逐点定义的模是针对诱导度量 $\not{g}$ 的.

我们同样给出张量 $T^{\mu\nu}$ 的分量. 由 (3.130), 我们有

$$\begin{aligned}
&T^{LL}=\frac{(\underline{L}\psi)^2}{4\mu^2},\quad T^{\underline{L}\underline{L}}=\frac{(L\psi)^2}{4\mu^2},\quad T^{L\underline{L}}=\frac{|\not{d}\psi|^2}{4\mu}\\
&T^{LA}=-\frac{1}{2\mu}(\underline{L}\psi)(\not{d}^A\psi),\quad T^{\underline{L}A}=-\frac{1}{2\mu}(L\psi)(\not{d}^A\psi)\\
&T^{AB}=\frac{1}{2\mu}(\not{g}^{-1})^{AB}(L\psi)(\underline{L}\psi)+((\not{d}^A\psi)(\not{d}^B\psi)-\frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}|\not{d}\psi|^2)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

其中 $\not{d}^A\psi=(\not{g}^{-1})^{AB}\not{d}_B\psi$.

我们考虑 P_0. 由 (5.21) 和 (5.29), 我们有

$$P_0^\mu=\Omega^2\tilde{P}_0^\mu=-\Omega^2\tilde{T}^\mu_\nu K_0^\nu=-\Omega T^\mu_\nu K_0^\nu \tag{5.51}$$

从而

$$\begin{aligned}
&P_0^{\underline{L}}=-\Omega T^{\underline{L}}_L(1+\eta^{-1}\kappa)-\Omega T^{\underline{L}}_{\underline{L}}=\frac{\Omega}{2\mu}((1+\eta^{-1}\kappa)T_{LL}+T_{L\underline{L}})\\
&P_0^{L}=-\Omega T^{L}_L(1+\eta^{-1}\kappa)-\Omega T^{L}_{\underline{L}}=\frac{\Omega}{2\mu}((1+\eta^{-1}\kappa)T_{L\underline{L}}+T_{\underline{L}\underline{L}})
\end{aligned}$$

由 (3.91), 我们有

$$
\begin{aligned}
P_0^{\underline{L}} &= \frac{\Omega}{2\mu}((1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi)^2 + \mu|\not{d}\psi|^2) \\
P_0^{L} &= \frac{\Omega}{2\mu}((1+\eta^{-1}\kappa)\mu|\not{d}\psi|^2 + (\underline{L}\psi)^2)
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

所以我们得到

$$
\mathcal{E}_0^u(t) = \int_{\Sigma_t^u} \frac{\Omega}{2}(\eta^{-1}\kappa(1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi)^2 + (\underline{L}\psi)^2 + (1+2\eta^{-1}\kappa)\mu|\not{d}\psi|^2)d\mu_{\not{g}}du' \tag{5.53}
$$

$$
\mathcal{F}_0^t(u) = \int_{C_u^t} \Omega((1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi)^2 + \mu|\not{d}\psi|^2)d\mu_{\not{g}}dt' \tag{5.54}
$$

现在考虑 P_1. 由相似的计算, 我们有

$$
P_1^{\mu} = -\Omega(T_{\nu}^{\mu}K_1^{\nu} + (g^{-1})^{\mu\nu}(\omega\psi\partial_{\nu}\psi - \frac{1}{2}\psi^2\partial_{\nu}\omega)) \tag{5.55}
$$

则

$$
\begin{aligned}
P_1^{\underline{L}} &= \frac{\Omega}{2\mu}(\omega\nu^{-1}T_{LL} + \omega\psi(L\psi) - \frac{1}{2}\psi^2(L\omega)) \\
P_1^{L} &= \frac{\Omega}{2\mu}(\omega\nu^{-1}T_{L\underline{L}} + \omega\psi(\underline{L}\psi) - \frac{1}{2}\psi^2(\underline{L}\omega))
\end{aligned}
$$

由 (5.49),

$$
\begin{aligned}
P_1^{\underline{L}} &= \frac{\Omega}{2\mu}(\omega\nu^{-1}(L\psi)^2 + \omega\psi(L\psi) - \frac{1}{2}\psi^2(L\omega)) \\
P_1^{L} &= \frac{\Omega}{2\mu}(\omega\nu^{-1}\mu|\not{d}\psi|^2 + \omega\psi(\underline{L}\psi) - \frac{1}{2}\psi^2(\underline{L}\omega))
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1^u(t) = \int_{\Sigma_t^u} \frac{\Omega}{2}&(\omega\nu^{-1}(\eta^{-1}\kappa(L\psi)^2 + \mu|\not{d}\psi|^2) + \omega\psi(\eta^{-1}\kappa(L\psi) + (\underline{L}\psi)) \\
&-\frac{1}{2}\psi^2(\eta^{-1}\kappa(L\omega) + (\underline{L}\omega)))d\mu_{\not{g}}du'
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

$$
\mathcal{F}_1^t(u) = \int_{C_u^t} \Omega(\omega\nu^{-1}(L\psi)^2 + \omega\psi(L\psi) - \frac{1}{2}\psi^2(L\omega))d\mu_{\not{g}}dt' \tag{5.58}
$$

对于 K_1 我们实际上是运用如下侧面能量:

$$
\mathcal{F}_1'^t(u) = \int_{C_u^t} \Omega\omega\nu^{-1}(L\psi + \nu\psi)^2 d\mu_{\not{g}}dt' \tag{5.59}
$$

由直接计算可知

$$
\mathcal{F}_1^t(u) - \mathcal{F}_1'^t(u) = -\int_{C_u^t} \frac{1}{2}\Omega(L(\omega\psi^2) + 2\nu\omega\psi^2)d\mu_{\not{g}}dt' \tag{5.60}
$$

现在我们有

$$\not{\mathcal{L}}_L d\mu_{\not{g}} = \mathrm{tr}\chi d\mu_{\not{g}} \tag{5.61}$$

由 (5.9), 对任意定义在 $W^*_{\epsilon_0}$ 上的函数 f, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{S_{t,u}} \Omega f d\mu_{\not{g}}) = \int_{S_{t,u}} \Omega(Lf + 2\nu f) d\mu_{\not{g}} \tag{5.62}$$

设 $f = \frac{1}{2}\omega\psi^2$, 由 (5.60),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^t(u) - \mathcal{F}_1'^t(u) &= -\int_0^t \frac{\partial}{\partial t'}(\int_{S_{t',u}} \frac{1}{2}\Omega\omega\psi^2 d\mu_{\not{g}})dt' \\ &= -\int_{S_{t,u}} \frac{1}{2}\Omega\omega\psi^2 d\mu_{\not{g}} + \int_{S_{0,u}} \frac{1}{2}\Omega\omega\psi^2 d\mu_{\not{g}}\end{aligned} \tag{5.63}$$

接下来考虑能量积分 (5.57) 与 (5.58). 对于 K_1 我们实际上是运用如下能量:

$$\mathcal{E}_1'^u(t) = \int_{\Sigma_t^u} \frac{\Omega}{2}\omega\nu^{-1}(\eta^{-1}\kappa(L\psi + \nu\psi)^2 + \mu|\not{d}\psi|^2) d\mu_{\not{g}} du' \tag{5.64}$$

考虑如下事实:

$$\underline{L} - \eta^{-1}\kappa L = 2T \tag{5.65}$$

我们得到

$$\mathcal{E}_1^u(t) - \mathcal{E}_1'^u(t) = \int_{\Sigma_t^u} \frac{\Omega}{2}(2\omega\psi(T\psi) - \frac{1}{2}(\eta^{-1}\kappa L\omega + \underline{L}\omega + 2\eta^{-1}\kappa\nu\omega)\psi^2) d\mu_{\not{g}} du' \tag{5.66}$$

由 θ 的定义, 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_T d\mu_{\not{g}} = \kappa \mathrm{tr}\theta d\mu_{\not{g}} \tag{5.67}$$

由 (5.67) 我们知道, 对任意定义在 $W^*_{\epsilon_0}$ 的函数 f,

$$\frac{\partial}{\partial u}(\int_{S_{t,u}} \Omega f d\mu_{\not{g}}) = \int_{S_{t,u}} \not{\mathcal{L}}_T(\Omega f d\mu_{\not{g}}) = \int_{S_{t,u}} \Omega(Tf + (\kappa\mathrm{tr}\theta + T(\log\Omega))f) d\mu_{\not{g}} \tag{5.68}$$

设 $f = \frac{1}{2}\omega\psi^2$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_t^u} \frac{\Omega}{2}(2\omega\psi(T\psi) + (T\omega)\psi^2 + (\kappa\mathrm{tr}\theta + T(\log\Omega))\omega\psi^2) d\mu_{\not{g}} du' \\ &= \int_0^u \frac{\partial}{\partial u'}(\int_{S_{t,u'}} \frac{\Omega}{2}\omega\psi^2 d\mu_{\not{g}}) du' = \int_{S_{t,u}} \frac{1}{2}\Omega\omega\psi^2 d\mu_{\not{g}}\end{aligned}$$

这里我们用到了 ψ 在 $S_{t,0} \subset C_0$ 为 0 的事实. 把这个与 (5.66) 比较并且由 (5.65), 我们得到

$$\mathcal{E}_1^u(t) - \mathcal{E}_1'^u(t) = \int_{S_{t,u}} \frac{1}{2}\Omega\omega\psi^2 d\mu_{\not g} - I \tag{5.69}$$

其中

$$I = \int_{\Sigma_t^u} \frac{1}{2}\Omega(2T\omega + \eta^{-1}\kappa(L\omega + (\nu + \eta \mathrm{tr}\theta)\omega) + \omega T(\log\Omega))\psi^2 d\mu_{\not g} du'$$

考虑如下事实:

$$\mathrm{tr}\chi = \eta(\mathrm{tr}\not k - \mathrm{tr}\theta), \quad \mathrm{tr}\underline{\chi} = \kappa(\mathrm{tr}\not k + \mathrm{tr}\theta) \tag{5.70}$$

我们有

$$\mathrm{tr}\underline{\chi} = \eta^{-1}\kappa(\mathrm{tr}\chi + 2\eta\mathrm{tr}\theta) \tag{5.71}$$

则

$$I = \int_{\Sigma_t^u} \frac{1}{2}\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2 d\mu_{\not g} du'$$

所以 (5.69) 有如下形式:

$$\mathcal{E}_1^u(t) - \mathcal{E}_1'^u(t) = \int_{S_{t,u}} \frac{1}{2}\Omega\omega\psi^2 d\mu_{\not g} - \int_{\Sigma_t^u} \frac{1}{2}\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2 d\mu_{\not g} du' \tag{5.72}$$

把这个和 (5.63) 代入 (5.36), 我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_1'^u(t) + \mathcal{F}_1'^t(u)\\ = &\int_{\Sigma_t^u} \frac{1}{2}\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2 d\mu_{\not g} du' - \int_{\Sigma_0^u} \frac{1}{2}\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2 d\mu_{\not g} du' + \mathcal{E}_1'^u(0) + \int_{W_u^t} Q_1 d\mu_g\end{aligned} \tag{5.73}$$

同样对于 K_0, 我们有

$$\mathcal{E}_0^u(t) + \mathcal{F}_0^t(u) = \mathcal{E}_0^u(0) + \int_{W_u^t} Q_0 d\mu_g \tag{5.74}$$

显然由 **A1** 和 **A2**, 存在一个正常数 C 使得

$$C^{-1}\mathcal{E}_0^u(t) \leqslant \int_0^u (\int_{S_{t,u'}} (\mu(1+\mu)((L\psi)^2 + |\not d\psi|^2) + (\underline{L}\psi)^2) d\mu_{\not g}) du' \leqslant C\mathcal{E}_0^u(t) \tag{5.75}$$

以及

$$C^{-1}\mathcal{F}_0^t(u) \leqslant \int_0^t (\int_{S_{t',u}} ((1+\mu)(L\psi)^2 + \mu|\not d\psi|^2) d\mu_{\not g}) dt' \leqslant C\mathcal{F}_0^t(u) \tag{5.76}$$

由 **A1**, **A2** 和 **B1**, **D1**, 存在一个正常数 C 使得

$$C^{-1}\mathcal{E}_1'^u(t) \leqslant (1+t)^2 \int_0^u (\int_{S_{t,u'}} \mu((L\psi+\nu\psi)^2 + |\not{d}\psi|^2) d\mu_{\not{g}}) du' \leqslant C\mathcal{E}_1'^u(t) \tag{5.77}$$

以及

$$C^{-1}\mathcal{F}_1'^t(u) \leqslant \int_0^t (1+t')^2 (\int_{S_{t',u}} (L\psi+\nu\psi)^2 d\mu_{\not{g}}) dt' \leqslant C\mathcal{F}_1'^t(u) \tag{5.78}$$

引理 5.1 存在一个绝对常数 C 使得对任意 $u \in [0, \epsilon_0]$ 有

$$\int_{S_{t,u}} \psi^2 d\mu_{\not{g}} \leqslant \epsilon_0 C \mathcal{E}_0^u(t)$$

证明 我们将运用声学坐标 $(t, u, \vartheta^1, \vartheta^2)$. 在一个给定的 Σ_t 上我们可以设 $\Xi = 0$, 则在这个 Σ_t 上我们有

$$T = \frac{\partial}{\partial u}$$

由 ψ 在 C_0 上为 0,

$$\psi(t,u,\vartheta) = \int_0^u (T\psi)(t,u',\vartheta) du' \tag{5.79}$$

那么

$$\begin{aligned}
\int_{S_{t,u}} \psi^2 d\mu_{\tilde{\not{g}}} &= \int_{S^2} \psi^2(t,u,\vartheta) d\mu_{\tilde{\not{g}}}(t,u,\vartheta) \\
&= \int_{S^2} (\int_0^u (T\psi)(t,u',\vartheta) du')^2 d\mu_{\tilde{\not{g}}}(t,u,\vartheta) \\
&\leqslant \epsilon_0 \int_{S^2} (\int_0^u (T\psi)^2(t,u',\vartheta) du') d\mu_{\tilde{\not{g}}}(t,u,\vartheta)
\end{aligned} \tag{5.80}$$

由 $\tilde{\not{g}} = \Omega \not{g}$,

$$\not{\mathcal{L}}_T d\mu_{\tilde{\not{g}}} = \Omega \not{\mathcal{L}}_T d\mu_{\not{g}} + T(\Omega) d\mu_{\not{g}} = (\kappa \mathrm{tr}\theta + T\log\Omega) d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{5.81}$$

由 (5.9) 和 (5.10),

$$\kappa \mathrm{tr}\theta + T\log\Omega = -\eta^{-1}\kappa\nu + \underline{\nu} \tag{5.82}$$

所以

$$\not{\mathcal{L}}_T d\mu_{\tilde{\not{g}}} = (-\eta^{-1}\kappa\nu + \underline{\nu}) d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{5.83}$$

由 **B1**, **B2** 和 **A3**, **A2**, 我们有

$$|-\eta^{-1}\kappa\nu + \underline{\nu}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4 \leqslant C' \tag{5.84}$$

把 (5.83) 沿 T 在 Σ_t 上积分, 由 $\epsilon_0 \leqslant \frac{1}{2}$ 我们得到

$$C^{-1} \leqslant \frac{d\mu_{\tilde{\not g}(t,u,\vartheta)}}{d\mu_{\tilde{\not g}(t,0,\vartheta)}} \leqslant C \tag{5.85}$$

对所有 $(u,\vartheta) \in [0,\epsilon_0] \times S^2$ 都成立. 所以 (5.80) 被

$$C\epsilon_0 \int_0^u (\int_{S^2} (T\psi)^2(t,u',\vartheta) d\mu_{\tilde{\not g}}(t,u',\vartheta))du' \leqslant C\epsilon_0 \int_0^u (\int_{S_{t,u'}} (T\psi)^2 d\mu_{\not g})du' \tag{5.86}$$

界定. 显然

$$(T\psi)^2 \leqslant C((\underline{L}\psi)^2 + \eta^{-2}\kappa^2(L\psi)^2) \tag{5.87}$$

从而引理得证. □

在每个 u, 我们引入如下关于 t 的非减函数:

$$\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) = \sup_{t' \in [0,t]} \mathcal{E}_0^u(t') \tag{5.88}$$

$$\mathcal{F}_0^t(u) \tag{5.89}$$

$$\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) = \sup_{t' \in [0,t]} (1+\log(1+t'))^{-4} \mathcal{E}_1'^u(t') \tag{5.90}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_1'^t(u) = \sup_{t' \in [0,t]} (1+\log(1+t'))^{-4} \mathcal{F}_1'^{t'}(u) \tag{5.91}$$

显然在每个 t, $\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)$, $\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t)$ 都是 u 非减函数. 定理 5.1 的结论 (**i**)—(**v**) 与

$$\bar{\mathcal{E}}_0^{\epsilon_0}(s), \sup_{u\in[0,\epsilon_0]} \mathcal{F}_0^s(u), \bar{\mathcal{E}}_1'^{\epsilon_0}(s), \sup_{u\in[0,\epsilon_0]} \bar{\mathcal{F}}_1'^s(u) \leqslant CD_0 \tag{5.92}$$

等价. 由 (5.73) 和 (5.74), 为了证明定理, 我们必须恰当地用 $\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)$, $\mathcal{F}_0^t(u)$, $\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t)$, $\mathcal{F}_1'^t(u)$ 估计如下*误差积分*:

$$\int_{W_u^t} Q_0 d\mu_g, \quad \int_{W_u^t} Q_1 d\mu_g \tag{5.93}$$

当估计误差积分的时候, 我们将会看到为什么我们允许 $\mathcal{E}_1'^u(t)$ 和 $\mathcal{F}_1'^t(u)$ 有 $(1+\log(1+t))^4$ 的增长.

5.3 误差积分

由 (5.25) 和 (5.30), 我们有

$$\begin{aligned} Q_0 &= -\Omega^2\rho K_0\psi - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\tilde{\pi}_{0,\mu\nu} \\ &= Q_{0,0} + Q_{0,1} + Q_{0,2} + Q_{0,3} + Q_{0,4} + Q_{0,5} + Q_{0,6} + Q_{0,7} \end{aligned} \tag{5.94}$$

其中

$$Q_{0,0} = -\Omega^2 \rho K_0 \psi \tag{5.95}$$

$$Q_{0,1} = -\frac{1}{2} T^{LL} \tilde{\pi}_{0,LL} = -\frac{1}{8} \mu^{-2} (\underline{L}\psi)^2 \tilde{\pi}_{0,LL} \tag{5.96}$$

$$Q_{0,2} = -\frac{1}{2} T^{\underline{L}\underline{L}} \tilde{\pi}_{0,\underline{L}\underline{L}} = -\frac{1}{8} \mu^{-2} (L\psi)^2 \tilde{\pi}_{0,\underline{L}\underline{L}} \tag{5.97}$$

$$Q_{0,3} = -T^{L\underline{L}} \tilde{\pi}_{0,L\underline{L}} = -\frac{1}{4} \mu^{-1} |\not{d}\psi|^2 \tilde{\pi}_{0,L\underline{L}} \tag{5.98}$$

$$Q_{0,4} = -T^{LA} \tilde{\pi}_{0,LA} = \frac{1}{2} \mu^{-1} (\underline{L}\psi)(\not{d}^A \psi) \tilde{\pi}_{0,LA} \tag{5.99}$$

$$Q_{0,5} = -T^{\underline{L}A} \tilde{\pi}_{0,\underline{L}A} = \frac{1}{2} \mu^{-1} (L\psi)(\not{d}^A \psi) \tilde{\pi}_{0,\underline{L}A} \tag{5.100}$$

以及

$$-\frac{1}{2} T^{AB} \tilde{\pi}_{0,AB} = Q_{0,6} + Q_{0,7}$$

其中

$$Q_{0,6} = -\frac{1}{2} (\not{d}^A \psi \not{d}^B \psi - \frac{1}{2} (\not{g}^{-1})^{AB} |\not{d}\psi|^2) \hat{\tilde{\not{\pi}}}_{0,AB} \tag{5.101}$$

$$Q_{0,7} = -\frac{1}{4} \mu^{-1} (L\psi)(\underline{L}\psi) \mathrm{tr} \tilde{\not{\pi}}_0 \tag{5.102}$$

这里 $\tilde{\not{\pi}}_0$ 表示 $\tilde{\pi}_0$ 在 $S_{t,u}$ 上的限制, $\hat{\tilde{\not{\pi}}}_0$ 表示 $\tilde{\not{\pi}}_0$ 的无迹部分. 我们运用了如下张量的无迹性质:

$$\not{d}^A \psi \not{d}^B \psi - \frac{1}{2} (\not{g}^{-1})^{AB} |\not{d}\psi|^2$$

我们有

$$\tilde{\pi}_0 = \Omega \pi_0 + (K_0 \Omega) g$$

由 (3.130)—(3.137),

$$\tilde{\pi}_{0,LL} = 0 \tag{5.103}$$

$$\tilde{\pi}_{0,\underline{L}\underline{L}} = -4\Omega\mu(\underline{L}(\eta^{-1}\kappa) - (\eta_0^{-1} + \alpha^{-1}\kappa) L(\eta^{-1}\kappa)) \tag{5.104}$$

$$\tilde{\pi}_{0,L\underline{L}} = -2\Omega\mu(\mu^{-1}(K_0\mu) + (K_0 \log \Omega) + 2L(\eta^{-1}\kappa)) \tag{5.105}$$

$$\tilde{\pi}_{0,LA} = -2\Omega(\zeta_A + \eta_A) \tag{5.106}$$

$$\tilde{\pi}_{0,\underline{L}A} = 2\Omega((\eta_0^{-1} + \alpha^{-1}\kappa)(\zeta_A + \eta_A) - \mu \not{d}_A (\eta^{-1}\kappa)) \tag{5.107}$$

$$\hat{\tilde{\not{\pi}}}_{0,AB} = 2\Omega((\eta_0^{-1} + \eta^{-1}\kappa)\hat{\chi}_{AB} + \underline{\hat{\chi}}_{AB}) \tag{5.108}$$

$$\mathrm{tr} \tilde{\not{\pi}}_0 = 4\Omega((\eta_0^{-1} + \eta^{-1}\kappa)\nu + \underline{\nu}) \tag{5.109}$$

由 (5.27) 和 (5.30),

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= -\Omega^2 \rho K_1 \psi - \Omega^2 \rho \omega \psi - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \tilde{\pi}'_{1,\mu\nu} + \frac{1}{2} \Omega^2 \psi^2 \Box_{\tilde{g}} \omega \\
&= Q_{1,0} + Q_{1,1} + Q_{1,2} + Q_{1,3} + Q_{1,4} + Q_{1,5} + Q_{1,6} + Q_{1,7} + Q_{1,8}
\end{aligned}
\tag{5.110}
$$

其中

$$Q_{1,0} = -\Omega^2 \rho K_1 \psi - \Omega^2 \rho \omega \psi \tag{5.111}$$

$$Q_{1,1} = -\frac{1}{2} T^{LL} \tilde{\pi}'_{1,LL} = -\frac{1}{8} \mu^{-2} (\underline{L}\psi)^2 \tilde{\pi}'_{1,LL} \tag{5.112}$$

$$Q_{1,2} = -\frac{1}{2} T^{\underline{L}\underline{L}} \tilde{\pi}'_{1,\underline{L}\underline{L}} = -\frac{1}{8} \mu^{-2} (L\psi)^2 \tilde{\pi}'_{1,\underline{L}\underline{L}} \tag{5.113}$$

$$Q_{1,3} = -T^{L\underline{L}} \tilde{\pi}'_{1,L\underline{L}} = -\frac{1}{4} \mu^{-1} |\not{d}\psi|^2 \tilde{\pi}'_{1,L\underline{L}} \tag{5.114}$$

$$Q_{1,4} = -T^{LA} \tilde{\pi}'_{1,LA} = \frac{1}{2} \mu^{-1} (\underline{L}\psi)(\not{d}^A \psi) \tilde{\pi}'_{1,LA} \tag{5.115}$$

$$Q_{1,5} = -T^{\underline{L}A} \tilde{\pi}'_{1,\underline{L}A} = \frac{1}{2} \mu^{-1} (L\psi)(\not{d}^A \psi) \tilde{\pi}'_{1,\underline{L}A} \tag{5.116}$$

以及

$$-\frac{1}{2} T^{AB} \tilde{\pi}'_{1,AB} = Q_{1,6} + Q_{1,7}$$

其中

$$Q_{1,6} = -\frac{1}{2} (\not{d}^A \psi \not{d}^B \psi - \frac{1}{2} (\not{g}^{-1})^{AB} |\not{d}\psi|^2) \hat{\tilde{\not{\pi}}}'_{1,AB} \tag{5.117}$$

$$Q_{1,7} = -\frac{1}{4} \mu^{-1} (L\psi)(\underline{L}\psi) \mathrm{tr} \tilde{\not{\pi}}'_1 \tag{5.118}$$

同样

$$Q_{1,8} = \frac{1}{2} \Omega^2 \psi^2 \Box_{\tilde{g}} \omega \tag{5.119}$$

符号与 (5.101) 和 (5.102) 类似.

因为 $\tilde{\pi}_1 = \Omega \pi_1 + (K_1 \Omega) g$, 我们有 $\tilde{\pi}'_1 = \Omega(\pi_1 + (K_1 \log \Omega - 2\omega) g)$. 所以我们得到

$$\tilde{\pi}'_{1,LL} = 0 \tag{5.120}$$

$$\tilde{\pi}'_{1,\underline{L}\underline{L}} = -4\Omega\mu(\underline{L}(\nu^{-1}\omega) - \nu^{-1}\omega L(\eta^{-1}\kappa)) \tag{5.121}$$

$$\tilde{\pi}'_{1,L\underline{L}} = -2\Omega\mu(\mu^{-1} K_1 \mu + L(\nu^{-1}\omega) - 2\omega + K_1 \log \Omega) \tag{5.122}$$

$$\tilde{\pi}'_{1,LA} = 0 \tag{5.123}$$

$$\tilde{\pi}'_{1,\underline{L}A} = 2\Omega(\nu^{-1}\omega(\zeta_A + \eta_A) - \mu \not{d}_A(\nu^{-1}\omega)) \tag{5.124}$$

$$\hat{\tilde{\not{\pi}}}'_{1,AB} = 2\Omega\nu^{-1}\omega\hat{\chi}_{AB} \tag{5.125}$$

$$\mathrm{tr}\tilde{\not{\pi}}'_1 = 0 \tag{5.126}$$

此时我们可以更清晰地看出为什么我们选取

$$K_1 = (\omega/\nu)L$$

显然, 首先我们设

$$K_1 = fL$$

其中 f 是一个待定函数.

回忆 (5.26),

$$\tilde{\pi}'_{1,AB} = \tilde{\pi}_{1,AB} - 2\omega\tilde{\not{g}}_{AB}$$

而

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_{1,AB} &= f(\tilde{g}(D_A L, e_B) + \tilde{g}(D_B L, e_A)) = 2f\tilde{\chi}_{AB} \\ &= 2f\hat{\tilde{\chi}}_{AB} + f\mathrm{tr}\tilde{\chi}\tilde{\not{g}}_{AB}\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{tr}\tilde{\chi} = 2\nu$$

我们有

$$\mathrm{tr}\tilde{\not{\pi}}'_1 = 4(\nu f - \omega)$$

所以如果取

$$f = \omega/\nu$$

则

$$\mathrm{tr}\tilde{\not{\pi}}'_1 = 0$$

因此 $Q_{1,7}$ 为 0. 这一点非常重要, 否则 ω 的增长将使得我们无法恰当地估计这一项.

5.4 误差积分的估计

我们现在估计误差积分 Q_0.

由 (5.32), 对任意函数 f 有

$$\int_{W_u^t} \mu^{-1} f d\mu_g = \int_0^t (\int_{\Sigma_t'^u} f)dt' = \int_0^u (\int_{C_{u'}^t} f)du' \tag{5.127}$$

其中

$$\int_{\Sigma_t'^u} f = \int_0^u (\int_{S_{t',u'}} f d\mu_{\not g})du', \quad \int_{C_{u'}^t} f = \int_0^t (\int_{S_{t',u'}} f d\mu_{\not g})dt' \tag{5.128}$$

由 ρ 为 0 以及 (5.103),

$$Q_{0,0} = Q_{0,1} = 0 \tag{5.129}$$

由 **B10**, **B11** 和 **A1**,

$$\mu^{-1}|\tilde{\pi}_{0,\underline{L}L}| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-2} \tag{5.130}$$

所以由 (5.97), 我们有

$$\mu|Q_{0,2}| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-2}(L\psi)^2 \tag{5.131}$$

记

$$(L\psi)^2 \leqslant 2(L\psi+\nu\psi)^2 + 2(\nu\psi)^2 \tag{5.132}$$

则

$$\int_{W_u^t} |Q_{0,2}| d\mu_g \leqslant C(J_0 + J_1) \tag{5.133}$$

其中

$$J_0 = \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_{\Sigma_{t'}^u} (\nu\psi)^2)dt' \tag{5.134}$$

$$J_1 = \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_{\Sigma_{t'}^u} (L\psi+\nu\psi)^2)dt' \tag{5.135}$$

由 **B1**,

$$J_0 \leqslant C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_{\Sigma_{t'}^u} \psi^2)dt' \tag{5.136}$$

再由引理 5.1 可得

$$J_0 \leqslant C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt' \tag{5.137}$$

另一方面

$$J_1 = \int_0^t f_0(t')\frac{dg(t')}{dt'}dt' \tag{5.138}$$

其中

$$g(t) = \int_0^t (1+t')^2(\int_{\Sigma_{t'}^u}(L\psi+\nu\psi)^2)dt' \tag{5.139}$$

以及

$$f_0(t) = (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2} \tag{5.140}$$

分部积分可得

$$J_1 = f_0(t)g(t) - \int_0^t g(t')\frac{df_0(t')}{dt'}dt' \tag{5.141}$$

由 (5.76),

$$\int_0^t\int_{S_{t',u}}(L\psi)^2 d\mu_{\not g}dt' \leqslant C\mathcal{F}_0^t(u) \tag{5.142}$$

所以

$$\int_0^t(\int_{\Sigma_{t'}^u}(L\psi)^2)dt' \leqslant C\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' \tag{5.143}$$

同样由引理 5.1 和 **B1**,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\Sigma_{t'}^u}(\nu\psi)^2 d\mu_{\not g}dt' &\leqslant C\epsilon_0\int_0^t(1+t')^{-2}\sup_{u'\in[0,u]}(\int_{S_{t',u'}}\psi^2 d\mu_{\not g})dt' \\ &\leqslant C\epsilon_0^2\int_0^t(1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt'\end{aligned} \tag{5.144}$$

设

$$F(t,u) = (\int_{\Sigma_t^u}(L\psi+\nu\psi)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.145}$$

则

$$g(t) = \int_0^t (1+t')^2F^2(t',u)dt' \tag{5.146}$$

所以

$$\begin{aligned}f_0(t)g(t) &\leqslant (1+\log(1+t))^{-2}\int_0^t(1+t')F^2(t',u)dt' \\ &\leqslant (\int_0^t F^2(t',u)dt')^{\frac{1}{2}}((1+\log(1+t))^{-4}\int_0^t(1+t')^2F^2(t',u)dt')^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{5.147}$$

由 (5.143) 和 (5.144),

$$\int_0^t F^2(t',u)dt' \leqslant C\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' + C\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt' \tag{5.148}$$

另一方面, 由 (5.78) 有

$$\int_0^t (1+t')^2 F^2(t',u)dt' \leqslant C\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du' \tag{5.149}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}&f_0(t)g(t)\\ &\leqslant C(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' + C\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt')^{\frac{1}{2}}((1+\log(1+t))^{-4}\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{5.150}$$

更进一步, 因为

$$|\frac{df_0}{dt}| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{-2} \tag{5.151}$$

由 (5.146) 和 (5.149),

$$\int_0^t g(t')|\frac{df_0}{dt}|dt' \leqslant C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_0^u \mathcal{F}_1'^{t'}(u')du')dt' \tag{5.152}$$

我们得到

$$\begin{aligned}J_1 \leqslant\ & C(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' + C\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt')^{\frac{1}{2}}\\ &((1+\log(1+t))^{-4}\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}}\\ &+C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_0^u \mathcal{F}_1'^{t'}(u')du')dt'\end{aligned} \tag{5.153}$$

这个连同 (5.137) 意味着

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t} |Q_{0,2}|d\mu_g \leqslant\ & C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt'\\ &+C(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' + C\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt')^{\frac{1}{2}}\\ &\cdot((1+\log(1+t))^{-4}\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}}\\ &+C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_0^u \mathcal{F}_1'^{t'}(u')du')dt'\end{aligned} \tag{5.154}$$

我们接下来估计 $Q_{0,6}$ 和 $Q_{0,7}$. 稍后再处理 $Q_{0,3}, Q_{0,4}, Q_{0,5}$.

由 **B3**, **B4** 和 **A1**, **A3**, 我们有

$$|\hat{\not{\pi}}_0| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-6} \tag{5.155}$$

由 (5.77) 和 (5.90), 我们可以估计

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t} |Q_{0,6}| d\mu_g &\leqslant C \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-6} \mathcal{E}_1'^u(t') dt' \\ &\leqslant C \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2} \bar{\mathcal{E}}_1'^u(t') dt'\end{aligned} \tag{5.156}$$

同样, 由 **B1**, **B2**, **A1**, **A3**, 我们有

$$|\mathrm{tr}\tilde{\not{\pi}}_0| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4 \tag{5.157}$$

由 $|L\psi| \leqslant |L\psi + \nu\psi| + |\nu\psi|$, 我们可以估计

$$\int_{W_u^t} |Q_{0,7}| d\mu_g \leqslant C(J_2 + J_3) \tag{5.158}$$

其中

$$J_2 = \int_0^t f_1(t') \int_{\Sigma_{t'}^u} |\nu\psi||\underline{L}\psi| \tag{5.159}$$

$$J_3 = \int_0^t f_1(t') \int_{\Sigma_{t'}^u} |L\psi + \nu\psi||\underline{L}\psi| \tag{5.160}$$

以及

$$f_1(t) = (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4 \tag{5.161}$$

我们有

$$J_2 \leqslant I_0^{\frac{1}{2}} I_1^{\frac{1}{2}} \tag{5.162}$$

其中

$$I_0 = \int_0^t (1+t') f_1(t') (\int_{\Sigma_{t'}^u} (\nu\psi)^2) dt' \tag{5.163}$$

$$I_1 = \int_0^t (1+t')^{-1} f_1(t') (\int_{\Sigma_{t'}^u} (\underline{L}\psi)^2) dt' \tag{5.164}$$

由 **B1** 和引理 5.1 以及

$$f_2(t) = (1+t)^{-1} f_1(t) = (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 \tag{5.165}$$

我们有

$$I_0 \leqslant C\epsilon_0 \int_0^t f_2(t')\mathcal{E}_0^u(t')dt' \tag{5.166}$$

同样, 由 (5.75),

$$I_1 \leqslant C \int_0^t f_2(t')\mathcal{E}_0^u(t')dt' \tag{5.167}$$

从而

$$J_2 \leqslant C\epsilon_0^{\frac{1}{2}} \int_0^t f_2(t')\mathcal{E}_0^u(t')dt' \tag{5.168}$$

我们有

$$J_3 \leqslant \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \tag{5.169}$$

其中

$$I_2 = \int_0^t (1+t')f_1(t')(\int_{\Sigma_{t'}^u} (L\psi + \nu\psi)^2)dt' \tag{5.170}$$

回忆 (5.139), 我们有

$$I_2 = \int_0^t f_2(t')\frac{dg(t')}{dt'}dt' \tag{5.171}$$

我们可以看到 I_2 与 J_1 相似, 而且 f_2 比 f_0 衰减得更快, 所以 I_2 与 J_1 有相同的界:

$$\begin{aligned} I_2 \leqslant\ & C(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' + C\epsilon_0^2 \int_0^t (1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt')^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot((1+\log(1+t))^{-4}\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}} \\ & +C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_0^u \mathcal{F}_1'^{t'}(u')du')dt' \end{aligned} \tag{5.172}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \int_{W_t^t} |Q_{0,7}|d\mu_g \leqslant\ & C\int_0^t f_2(t')\mathcal{E}_0^u(t')dt' \\ & +C(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' + C\epsilon_0^2 \int_0^t (1+t')^{-2}\mathcal{E}_0^u(t')dt')^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot((1+\log(1+t))^{-4}\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}} \\ & +C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{-2}(\int_0^u \mathcal{F}_1'^{t'}(u')du')dt' \end{aligned} \tag{5.173}$$

我们转向 Q_1, 由于此时 ρ 为 0, 我们有

$$Q_{1,0} = 0 \tag{5.174}$$

同样由 (5.120), (5.123) 和 (5.126), 我们有

$$Q_{1,1} = Q_{1,4} = Q_{1,7} = 0 \tag{5.175}$$

首先考虑 $Q_{1,2}$. 由 **B1**, **B10**, **B13**, **D1**, **D3**, **A1**, 我们有

$$\mu^{-1}|\tilde{\pi}'_{1,\underline{LL}}| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^3 \tag{5.176}$$

所以,

$$\mu|Q_{1,2}| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^3(L\psi)^2 \tag{5.177}$$

由 $(L\psi)^2 \leqslant 2(L\psi+\nu\psi)^2 + 2(\nu\psi)^2$, 我们有

$$\int_{W_u^t} |Q_{1,2}| d\mu_g \leqslant C(J_4 + J_5) \tag{5.178}$$

其中

$$J_4 = \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))^3 (\int_{\Sigma_{t'}^u} (\nu\psi)^2) dt' \tag{5.179}$$

$$J_5 = \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))^3 (\int_{\Sigma_{t'}^u} (L\psi+\nu\psi)^2) dt' \tag{5.180}$$

由 **B1** 和引理 5.1 有

$$J_4 \leqslant C\epsilon_0^2 \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3 \mathcal{E}_0^u(t')dt' \leqslant C\epsilon_0^2 \bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 \tag{5.181}$$

由 (5.139), 我们有

$$J_5 = \int_0^t f_3(t') \frac{dg(t')}{dt'} dt' \tag{5.182}$$

其中

$$f_3(t) = (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^3 \tag{5.183}$$

那么

$$\begin{aligned} J_5 &= f_3(t)g(t) - \int_0^t g(t') \frac{df_3(t')}{dt'} dt' \\ &\leqslant g(t)(f_3(t) + \int_0^t |\frac{df_3(t')}{dt'}| dt') \leqslant C \int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du' \end{aligned} \tag{5.184}$$

我们用到了 $g(t)$ 是一个非减函数的事实. 最终

$$\int_{W_u^t} |Q_{1,2}| d\mu_g \leqslant C \int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u') du' + C\epsilon_0^2 \bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 \tag{5.185}$$

接下来考虑 $Q_{1,6}$. 由 **A1**, **B1**, **B3**, **D1**, 我们有

$$|\hat{\not{\pi}}_1'| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-2} \tag{5.186}$$

所以由 (5.77),

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t} |Q_{1,6}| d\mu_g &\leqslant C \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))^{-2} (\int_{\Sigma_{t'}^u} \mu |\not{d}\psi|^2) dt' \\ &\leqslant C \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2} \mathcal{E}_1'^u(t') dt' \end{aligned} \tag{5.187}$$

为估计 $Q_{1,8}$, 我们将运用 **D5** 和引理 5.1,

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t} |Q_{1,8}| d\mu_g &\leqslant \int_0^t (\int_0^u \sup_{S_{t',u'}} (\mu |\Box_{\tilde{g}} \omega|) \cdot (\int_{S_{t',u'}} \psi^2 d\mu_{\not{g}}) du') dt' \\ &\leqslant C\epsilon_0 \int_0^t (\int_0^u \sup_{S_{t',u'}} (\mu |\Box_{\tilde{g}} \omega|) du') \mathcal{E}_0^u(t') dt' \end{aligned} \tag{5.188}$$

所以由 **D5** 我们有

$$\int_{W_u^t} |Q_{1,8}| d\mu_g \leqslant C\epsilon_0 (1+\log(1+t))^4 \bar{\mathcal{E}}_0^u(t) \tag{5.189}$$

接下来讨论关键的两项 $Q_{0,3}$ 和 $Q_{1,3}$.

首先考虑 $Q_{1,3}$. 我们有

$$\tilde{\pi}'_{1,L\underline{L}} = -2\Omega\mu(\omega\nu^{-1})(\mu^{-1}L\mu + r_1) \tag{5.190}$$

其中

$$r_1 = \omega^{-1}(L\omega - \nu\omega) - \nu^{-1}(L\nu + \nu^2) + L\log\Omega \tag{5.191}$$

所以

$$\int_{W_u^t} Q_{1,3} d\mu_g = \int_0^t (\int_{\Sigma_{t'}^u} \frac{\Omega}{2}(\omega\nu^{-1})(\mu^{-1}L\mu + r_1)\mu |\not{d}\psi|^2) dt' \tag{5.192}$$

把 $\mu^{-1}L\mu$ 分解成正部和负部:

$$\int_{W_u^t} Q_{1,3} d\mu_g = \int_0^t (\int_{\Sigma_{t'}^u} \frac{\Omega}{2}(\omega\nu^{-1})(\mu^{-1}(L\mu)_+ + \mu^{-1}(L\mu)_- + r_1)\mu |\not{d}\psi|^2) dt' \tag{5.193}$$

则由 **C1** 和 (5.64), 我们有

$$\int_{W_u^t} Q_{1,3} d\mu_g \leqslant \int_0^t ((1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1} + A(t') + \sup_{\Sigma_{t'}^u} |r_1|)\mathcal{E}_1'^u(t')dt' - K(t,u) \tag{5.194}$$

其中 $K(t,u)$ 是如下非负时空积分:

$$K(t,u) = -\int_{W_u^t} \frac{\Omega}{2}\omega\nu^{-1}\mu^{-1}(L\mu)_-|\not{d}\psi|^2 d\mu_g \tag{5.195}$$

并且由 **B1**, **D1**, **B5**, **B12**, **D2**, 我们有

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |r_1| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2} \tag{5.196}$$

接下来考虑 $Q_{0,3}$. 由 (5.105) 和 (5.18), 我们有

$$\tilde{\pi}_{0,L\underline{L}} = -2\Omega\mu(\mu^{-1}(L\mu + \underline{L}\mu) + r_0) \tag{5.197}$$

其中

$$\begin{aligned} r_0 &= \alpha^{-2}L\mu + 2L(\alpha^{-1}\kappa) + K_0 \log\Omega \\ &= 3L(\alpha^{-1}\kappa) + 2\alpha^{-2}\kappa L\alpha + (1+\alpha^{-1}\kappa)L\log\Omega + \underline{L}\log\Omega \end{aligned} \tag{5.198}$$

所以

$$\int_{W_u^t} Q_{0,3} d\mu_g = \int_0^t (\int_{\Sigma_{t'}^u} \frac{\Omega}{2}(\mu^{-1}(L\mu + \underline{L}\mu) + r_0)\mu|\not{d}\psi|^2)dt' \tag{5.199}$$

把 $\mu^{-1}(L\mu + \underline{L}\mu)$ 分解成正部和负部, 忽略负部我们得到

$$\int_{W_u^t} Q_{0,3} d\mu_g \leqslant \int_0^t (\int_{\Sigma_{t'}^u} \frac{\Omega}{2}(\mu^{-1}(L\mu + \underline{L}\mu)_+ + |r_0|)\mu|\not{d}\psi|^2)dt' \tag{5.200}$$

再由 **C2** 和 (5.64), 我们有

$$\int_{W_u^t} Q_{0,3} d\mu_g \leqslant \int_0^t (1+t')^{-2}(B(t') + \sup_{\Sigma_{t'}^u} |r_0|)\mathcal{E}_1'^u(t')dt' \tag{5.201}$$

而且由 **B5**, **B6**, **B9**, **B10**, 我们有

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |r_0| \leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{-6} \tag{5.202}$$

最后我们考虑 $Q_{0,4}$, $Q_{0,5}$ 和 $Q_{1,5}$.

首先我们有

$$\int_{W_u^t} |Q_{1,5}| d\mu_g \leqslant M_1 + R_1 \tag{5.203}$$

其中

$$M_1 = \int_{W_u^t} \Omega(\omega\nu^{-1})|L\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1} d\mu_g \tag{5.204}$$

$$R_1 = \int_{W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi||\not{d}(\omega\nu^{-1})| d\mu_g \tag{5.205}$$

我们先估计 M_1. 做如下分解:

$$M_1 = M_1' + M_1'' \tag{5.206}$$

其中

$$M_1' = \int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \Omega(\omega\nu^{-1})|L\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1} d\mu_g \tag{5.207}$$

$$M_1'' = \int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t} \Omega(\omega\nu^{-1})|L\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1} d\mu_g \tag{5.208}$$

其中区域 $\mathcal{U}$ 由 (5.14) 定义.

由 **C3**, 在 $\mathcal{U}\bigcap W_u^t$ 中,

$$-(L\mu)_- \geqslant C^{-1}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1} \tag{5.209}$$

与 (5.195) 比较, 我们有

$$\begin{aligned} K(t,u) &\geqslant -\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \frac{\Omega}{2}\omega\nu^{-1}\mu^{-1}(L\mu)_-|\not{d}\psi|^2 d\mu_g \\ &\geqslant \frac{1}{2C}\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \Omega\omega\nu^{-1}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mu^{-1}|\not{d}\psi|^2 d\mu_g \end{aligned} \tag{5.210}$$

所以我们可以估计:

$$M_1' \leqslant CK^{\frac{1}{2}}N_1^{\frac{1}{2}} \tag{5.211}$$

其中

$$N_1 = \int_{W_u^t} \Omega\omega\nu^{-1}(1+t')(1+\log(1+t'))|\zeta+\eta|^2|L\psi|^2\mu^{-1} d\mu_g \tag{5.212}$$

由 **B7**,

$$N_1 \leqslant \int_{W_u^t} \Omega\omega\nu^{-1}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3|L\psi|^2\mu^{-1} d\mu_g \tag{5.213}$$

所以

$$N_1 \leqslant C(N_{1,0} + N_{1,1}) \tag{5.214}$$

其中

$$N_{1,0} = \int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \Omega\omega\nu^{-1}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3|\nu\psi|^2\mu^{-1}d\mu_g \tag{5.215}$$

$$N_{1,1} = \int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \Omega\omega\nu^{-1}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3|L\psi+\nu\psi|^2\mu^{-1}d\mu_g \tag{5.216}$$

由 **B1**, **D1** 和 **A1**,

$$N_{1,0} \leqslant C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3(\int_0^u(\int_{S_{t',u'}}\psi^2 d\mu_{\not g})du')dt' \tag{5.217}$$

所以由引理 5.1,

$$\begin{aligned} N_{1,0} &\leqslant C\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3\mathcal{E}_0^u(t')dt' \\ &\leqslant C\epsilon_0^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 \end{aligned} \tag{5.218}$$

同样由 (5.59),

$$N_{1,1} \leqslant C\int_0^u(\int_{C_{u'}^t}\Omega\omega\nu^{-1}(L\psi+\nu\psi)^2)du' = C\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du' \tag{5.219}$$

我们得到

$$N_1 \leqslant C\epsilon_0^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 + C\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du' \tag{5.220}$$

所以

$$M_1' \leqslant CK(t,u)^{\frac{1}{2}}(\epsilon_0^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 + C\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}} \tag{5.221}$$

另一方面, 由于在 $\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t$ 当中, 我们有 $\mu \geqslant 1/4$,

$$\begin{aligned} M_1'' &\leqslant 2\int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t}\Omega\omega\nu^{-1}|L\psi||\not d\psi||\zeta+\eta|\mu^{-\frac{1}{2}}d\mu_g \\ &\leqslant 2\int_{W_u^t}\Omega\omega\nu^{-1}|L\psi||\not d\psi||\zeta+\eta|\mu^{-\frac{1}{2}}d\mu_g \\ &\leqslant 2(\int_{W_u^t}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\Omega\omega\nu^{-1}|\not d\psi|^2 d\mu_g)^{\frac{1}{2}}N_1^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5.222}$$

其中 N_1 由 (5.212) 给出. 由 (5.64),

$$M_1'' \leqslant C(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mathcal{E}_1'^u(t')dt')^{\frac{1}{2}}N_1^{\frac{1}{2}} \tag{5.223}$$

所以由 (5.220), 我们得到

$$M_1'' \leqslant C(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mathcal{E}_1'^u(t')dt')^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot(\epsilon_0^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 + C\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}} \tag{5.224}$$

接下来我们估计 R_1, 即 (5.205). 由 **B14**, **D4**, **B1**, **D1**, 我们有

$$\omega^{-1}\nu|\not{d}(\omega\nu^{-1})| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{\frac{1}{2}} \tag{5.225}$$

所以 $\mu^{\frac{1}{2}}\omega^{-1}\nu|\not{d}(\omega\nu^{-1})|$ 和 $|\zeta+\eta|$ 有相同的界, 即 $C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$. 所以 R_1 与 M_1'' 有相同的界. 所以我们得到

$$\int_{W_u^t}|Q_{1,5}|d\mu_g \leqslant C(\epsilon_0^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 + C\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du')^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot(K(t,u) + \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mathcal{E}_1'^u(t')dt')^{\frac{1}{2}} \tag{5.226}$$

接下来考虑 $Q_{0,4}$. 显然我们有

$$\int_{W_u^t}|Q_{0,4}|d\mu_g \leqslant M_0 \tag{5.227}$$

其中

$$M_0 = \int_{W_u^t}\Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g \tag{5.228}$$

同样做分解:

$$M_0 = M_0' + M_0'' \tag{5.229}$$

其中

$$M_0' = \int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}\Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g \tag{5.230}$$

$$M_0'' = \int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t}\Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g \tag{5.231}$$

由 **B7**, 我们可以估计:

$$\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}\Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g$$
$$\leqslant C\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))|\underline{L}\psi||\not{d}\psi|d\mu_{\not{g}}du'dt' \tag{5.232}$$

由 Holder 不等式, 上式右端有如下的界:

$$C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\sqrt{\mathcal{E}_0^u(t')}\sqrt{\int_{\mathcal{U}\bigcap\Sigma_{t'}^u}|\not{d}\psi|^2 dt'} \tag{5.233}$$

$$\leqslant (\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}_0^u(t')dt')^{1/2}\cdot(\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}|\not{d}\psi|^2 d\mu_{\not{g}}du'dt')^{1/2}$$

定义

$$F(t,u) := \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))^{-1}(\int_{\mathcal{U}\bigcap\Sigma_{t'}^u}|\not{d}\psi|^2)dt' \tag{5.234}$$

由 (5.210) 和 $\mathbf{B1},\mathbf{D1}$,

$$K(t,u)\geqslant\frac{1}{C}\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}\Omega(1+t')(1+\log(1+t'))^{-1}\mu^{-1}|\not{d}\psi|^2 d\mu_g \tag{5.235}$$

定义

$$\bar{K}(t,u) = \sup_{t'\in[0,t]}(1+\log(1+t'))^{-4}K(t',u)$$

从而

$$F(t,u)\leqslant CK(t,u)\leqslant C\bar{K}(t,u)(1+\log(1+t))^4 \tag{5.236}$$

以及

$$\frac{dF}{dt}(t,u) = (1+t)(1+\log(1+t))^{-1}\int_{\mathcal{U}\bigcap\Sigma_t^u}|\not{d}\psi|^2 \tag{5.237}$$

我们只需估计如下积分:

$$I(t) := \int_0^t (\int_{\mathcal{U}\bigcap\Sigma_{t'}^u}|\not{d}\psi|^2)dt' \tag{5.238}$$

我们有

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\frac{dF}{dt'}(t')dt' \\ &= (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))F(t) \\ &\quad + \int_0^t F(t')((1+t')^{-2}(1+\log(1+t')) - (1+t')^{-2})dt' \end{aligned} \tag{5.239}$$

由 (5.236),

$$I(t)\leqslant C'\bar{K}(t,u) \tag{5.240}$$

从而

$$M_0' \leqslant C\bar{K}(t,u)^{1/2}(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')^{1/2} \tag{5.241}$$

为估计 M_0'', 注意到由于在 $\mathcal{U}^c$ 中 $\mu \geqslant \eta_0/4$,

$$\begin{aligned}
M_0'' &\leqslant 2\int_{\mathcal{U}^c \bigcap W_u^t} \Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1/2}d\mu_g \\
&\leqslant 2\int_{W_u^t} \Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{-1/2}d\mu_g \\
&= 2\int_0^t (\int_{\Sigma_{t'}^u} \Omega|\underline{L}\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|\mu^{1/2})dt'
\end{aligned} \tag{5.242}$$

所以

$$\begin{aligned}
M_0'' &\leqslant 2\int_0^t (\int_{\Sigma_{t'}^u} \Omega\mu|\not{d}\psi|^2)^{1/2}\cdot(\int_{\Sigma_{t'}^u} \Omega|\underline{L}\psi|^2|\zeta+\eta|^2)^{1/2}dt' \\
&\leqslant C\int_0^t \frac{\mathcal{E}_1'^u(t')^{1/2}}{1+t'}\cdot\frac{(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_0^u(t')^{1/2}}{1+t'}dt' \\
&\leqslant C(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^3\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt')^{1/2} \\
&\quad \cdot(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^3\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.243}$$

由 (5.227), (5.229), (5.241) 和 (5.243), 我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{W_u^t} |Q_{0,4}|d\mu_g \leqslant\ & C\bar{K}(t,u)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')^{\frac{1}{2}} \\
&+C(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^3\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt')^{1/2} \\
&\cdot(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^3\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.244}$$

我们只剩下了 $Q_{0,5}$. 我们有

$$\int_{W_u^t} |Q_{0,5}|d\mu_g \leqslant \tilde{M}_0 + R_0 \tag{5.245}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_0 &= \int_{W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi|(1+\eta^{-1}\kappa)|\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g \\
R_0 &= \int_{W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi||\not{d}(\eta^{-1}\kappa)|d\mu_g
\end{aligned} \tag{5.246}$$

做分解:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0 &= \tilde{M}_0' + \tilde{M}_0'' \\ \tilde{M}_0' &= \int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi|(1+\eta^{-1}\kappa)|\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g \\ \tilde{M}_0'' &= \int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi|(1+\eta^{-1}\kappa)|\zeta+\eta|\mu^{-1}d\mu_g\end{aligned} \tag{5.247}$$

类似地我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi|(1+\eta^{-1}\kappa)|\zeta+\eta|d\mu_{\not{g}}du'dt' \\ &\leqslant \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{3/2}\sqrt{\mathcal{E}_0^u(t')}\sqrt{\int_{\mathcal{U}\bigcap\Sigma_{t'}^u} |\not{d}\psi|^2}dt'\end{aligned} \tag{5.248}$$

这与 (5.233) 相类似. 接下来就像估计 M_0' 一样:

$$\tilde{M}_0' \leqslant C\bar{K}(t,u)^{1/2}\left(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du'\right)^{1/2} \tag{5.249}$$

然后估计 $\tilde{M}_0''$. 由于在 $\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t$ 中 $\mu\geqslant 1/4$, 由 **A2**, **A3** 和 **B7**, 我们有

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0'' &\leqslant \frac{2}{\sqrt{\eta_0}}\int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t} \Omega|L\psi||\not{d}\psi||\zeta+\eta|(1+\eta^{-1}\kappa)\mu^{-1/2}d\mu_g \\ &\leqslant C\int_{W_u^t}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{3/2}\Omega|L\psi||\not{d}\psi|(1+\eta^{-1}\kappa)^{1/2}\mu^{-1/2}d\mu_g\end{aligned} \tag{5.250}$$

由于 $(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{3/2}$ 是有界的, 所以

$$\tilde{M}_0'' \leqslant C\int_{W_u^t} \Omega((1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi)^2+\mu|\not{d}\psi|^2)\mu^{-1}d\mu_g \tag{5.251}$$

所以由 (5.54), 我们得到

$$\tilde{M}_0'' \leqslant C\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' \tag{5.252}$$

最后我们估计 R_0. 由 **B8**,

$$R_0 \leqslant C\int_{W_u^t}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\Omega|L\psi||\not{d}\psi|(1+\eta^{-1}\kappa)^{1/2}\mu^{-1/2}d\mu_g \tag{5.253}$$

我们用了如下事实: $(1+\eta^{-1}\kappa)^{1/2}\mu^{-1/2} = ((1+\eta^{-2}\mu)/\mu)^{1/2} \geqslant \eta^{-1} \geqslant C^{-1}$.

由于 $(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))$ 有界,

$$R_0 \leqslant C\int_{W_u^t} \Omega((1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi)^2+\mu|\not{d}\psi|^2)\mu^{-1}d\mu_g \leqslant C\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' \tag{5.254}$$

所以我们得到

$$\int_{W_u^t} |Q_{0,5}| d\mu_g \leqslant C\bar{K}(t,u)^{1/2}(\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du')^{1/2} + C\int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' \tag{5.255}$$

5.5 依赖于 t 和 u 双变量不等式的处理. 证明的完成

我们首先处理 (5.73). 由 (5.174), (5.175), (5.185), (5.187), (5.189), (5.194), (5.196) 和 (5.226), (5.73) 右端的时空积分被

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t} Q_1 d\mu_g \leqslant\ & CM(t,u) + L(t,u) + \int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{E}_1'^u(t')dt' \\ & - K(t,u) + C(K(t,u)^{1/2} + L(t,u)^{1/2})M(t,u)^{1/2}\end{aligned} \tag{5.256}$$

界定. 这里

$$\begin{aligned} M(t,u) &= \bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4 + \int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du' \\ L(t,u) &= \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mathcal{E}_1'^u(t')dt' \\ \tilde{A}(t) &= A(t) + C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2} \end{aligned} \tag{5.257}$$

由 **C1**,

$$\int_0^t \tilde{A}(t')dt' \leqslant C \tag{5.258}$$

其中 C 不依赖于 t.

由不等式

$$-K + CK^{1/2}M^{1/2} \leqslant -\frac{1}{2}K + CM, \quad CL^{1/2}M^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}L + CM \tag{5.259}$$

我们得到

$$\int_{W_u^t} Q_1 d\mu_g \leqslant -\frac{1}{2}K(t,u) + CM(t,u) + \frac{3}{2}L(t,u) + \int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{E}_1'^u(t')dt' \tag{5.260}$$

我们有

$$L(t,u) \leqslant \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt' \leqslant \frac{1}{4}(1+\log(1+t))^4\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) \tag{5.261}$$

同样, 由于

$$\mathcal{F}_1'^t(u) \leqslant (1+\log(1+t))^4 \bar{\mathcal{F}}_1'^t(u) \tag{5.262}$$

定义

$$V_1'(t,u) = \int_0^u \bar{\mathcal{F}}_1'^t(u')du' \tag{5.263}$$

我们有

$$\int_0^u \mathcal{F}_1'^t(u')du' \leqslant (1+\log(1+t))^4 V_1'(t,u) \tag{5.264}$$

注意到对每个固定的 u, $V_1'(t,u)$ 是 t 的非减函数, 而对每个固定的 t, 它也是 u 的非减函数. 所以

$$M(t,u) \leqslant (1+\log(1+t))^4 (\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) + V_1'(t,u)) \tag{5.265}$$

并且

$$\int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{E}_1'^u(t')dt' \leqslant (1+\log(1+t))^4 \int_0^t \tilde{A}(t')\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt' \tag{5.266}$$

由 **A1**, **B2**, **D1**, **D3** 和引理 5.1, (5.73) 右端在类空超曲面上的积分被

$$|\int_{\Sigma_t^u} \frac{1}{2}\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2| \leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)(1+\log(1+t))^4, \quad |\int_{\Sigma_0^u} \frac{1}{2}\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2| \leqslant CD_0 \tag{5.267}$$

界定. 同样由 $t=0$ 的 (5.75) 和 (5.77), (5.73) 右端的其他项被

$$\mathcal{E}_1'^u(0) \leqslant CD_0 \tag{5.268}$$

界定. 由 (5.260)—(5.268), (5.73) 意味着

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_1'^u(t) + \mathcal{F}_1'^t(u) + \frac{1}{2}K(t,u) \\ \leqslant &(1+\log(1+t))^4 (\frac{3}{8}\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) + C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) + V_1'(t,u)) + \int_0^t \tilde{A}(t')\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt') + CD_0 \end{aligned} \tag{5.269}$$

仅保留上式左端第一项, 我们有

$$\begin{aligned} &(1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{E}_1'^u(t) \\ \leqslant &\frac{3}{8}\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) + C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) + V_1'(t,u)) + \int_0^t \tilde{A}(t')\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt' + CD_0 \end{aligned} \tag{5.270}$$

把 t 换成 $t' \in [0,t]$ 结论同样成立. 由于对每个 u, 上式右端是 t 的非减函数, 我们得到

$$\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) \leqslant C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) + V_1'(t,u)) + \int_0^t \tilde{A}(t')\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt' + CD_0 \tag{5.271}$$

由于对每个 u, $\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+V_1'(t,u)$ 是 t 的非减函数, 我们可以运用 Gronwall 不等式, 由 (5.259) 可得

$$\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) \leqslant C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+V_1'(t,u))+CD_0 \tag{5.272}$$

所以同样有

$$\int_0^t \tilde{A}(t')\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt' \leqslant \bar{\mathcal{E}}_1'^u(t)\int_0^t \tilde{A}(t')dt' \leqslant C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+V_1'(t,u)) \tag{5.273}$$

将 (5.272) 与 (5.273) 代入 (5.269), 仅保留左端第二项, 我们得到

$$(1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{F}_1'^t(u) \leqslant C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+V_1'(t,u))+CD_0 \tag{5.274}$$

把 t 换成 $t'\in[0,t]$ 结论同样成立. 由于对每个 u, 上式右端是 t 的非减函数, 我们得到

$$\bar{\mathcal{F}}_1'^t(u) \leqslant C(\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+V_1'(t,u))+CD_0 \tag{5.275}$$

由 $V_1'(t,u)$ 的定义, 这是

$$\bar{\mathcal{F}}_1'^t(u) \leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+C\int_0^u \bar{\mathcal{F}}_1'^t(u')du'+CD_0 \tag{5.276}$$

对每个 t, $\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)$ 是 u 的非减函数, 而 $[0,\epsilon_0]$ 是一个有界区间, 我们可以用 Gronwall 不等式得到

$$\bar{\mathcal{F}}_1'^t(u) \leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+CD_0 \tag{5.277}$$

所以同样有

$$V_1'(t,u) \leqslant C\epsilon_0\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+CD_0 \tag{5.278}$$

将 (5.278) 代入 (5.272), 我们得到

$$\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t) \leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+CD_0 \tag{5.279}$$

将 (5.273), (5.278) 和 (5.279) 代入 (5.269), 仅保留左端第三项, 我们得到

$$(1+\log(1+t))^{-4}K(t,u) \leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+CD_0 \tag{5.280}$$

这意味着

$$\bar{K}(t,u) \leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+CD_0 \tag{5.281}$$

我们接着研究 (5.74). 由 (5.129), (5.154), (5.156), (5.173), (5.201)—(5.202), (5.244) 和 (5.255), 再由 (5.264), (5.74) 右端的时空积分被

$$
\begin{aligned}
&\int_{W_u^t} Q_0 d\mu_g \\
\leqslant &\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^4 B(t')\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')dt' \\
&+C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}(\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t')+\bar{\mathcal{E}}_0^u(t'))dt' + CV_0(t,u) \\
&+C(V_0(t,u)+\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0'^u(t')dt')^{1/2}(V_1'(t,u))^{1/2} \\
&+C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 V_1'(t',u)dt' \\
&+C\bar{K}(t,u)^{1/2}(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')^{1/2} \\
&+C\bar{K}(t,u)^{1/2}(V_0(t,u))^{1/2}
\end{aligned}
\tag{5.282}
$$

界定. 这里我们定义

$$
V_0(t,u) = \int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' \tag{5.283}
$$

将 (5.278), (5.279) 和 (5.281) 代入上式. 右端第四项被

$$
\begin{aligned}
&C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)^{1/2}(V_0(t,u)+\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0'^u(t')dt')^{1/2} \\
\leqslant &\frac{\delta}{2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+\frac{C^2}{2\delta}(V_0(t,u)+\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0'^u(t')dt')
\end{aligned}
\tag{5.284}
$$

界定, 而第六项被

$$
\begin{aligned}
&C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)^{1/2}(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')^{1/2} \\
\leqslant &\frac{\delta}{2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+\frac{C^2}{2\delta}(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt')
\end{aligned}
\tag{5.285}
$$

界定, 第七项被

$$
C\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)^{1/2}(V_0(t,u))^{1/2} \leqslant \frac{\delta}{2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+\frac{C^2}{2\delta}V_0(t,u) \tag{5.286}
$$

界定. 将所有这些估计代入, 我们得到

$$
\int_{W_u^t} Q_0 d\mu_g \leqslant \frac{3\delta}{2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t)+C(1+\frac{1}{\delta})V_0(t,u)+C(1+\frac{1}{\delta})\int_0^t \tilde{B}(t')\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt' + CD_0 \tag{5.287}
$$

常数 C 都不依赖于 δ. 这里

$$\tilde{B}(t) = (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B(t) + C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2} \tag{5.288}$$

由 **C2**, 我们有

$$\int_0^t \tilde{B}(t')dt' \leqslant C \tag{5.289}$$

由 (5.287), 等式 (5.74) 意味着

$$\mathcal{E}_0^u(t) + \mathcal{F}_0^t(u) \leqslant \mathcal{E}_0^u(0) + \frac{3\delta}{2}\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) + C(1+\frac{1}{\delta})(V_0(t,u) + \int_0^t \tilde{B}(t')\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt') \tag{5.290}$$

设 $\delta = \frac{1}{3}$. 把 t 换成 $t' \in [0,t]$, 注意到对每个 u, 右端是 t 的非减函数, 仅保留左端第一项, 我们得到

$$\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) \leqslant \mathcal{E}_0^u(0) + CV_0(t,u) + C\int_0^t \tilde{B}(t')\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt' \tag{5.291}$$

由于对每个 u, $V_0(t,u)$ 是 t 的非减函数, 我们可以用 Gronwall 不等式得到

$$\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) \leqslant C(\mathcal{E}_0^u(0) + V_0(t,u)) \tag{5.292}$$

所以

$$\int_0^t \tilde{B}(t')\bar{\mathcal{E}}_0^u(t')dt' \leqslant \bar{\mathcal{E}}_0^u(t)\int_0^t \tilde{B}(t')dt' \leqslant C(\mathcal{E}_0^u(0) + V_0(t,u)) \tag{5.293}$$

仅保留 (5.290) 左端第二项, 我们得到

$$\mathcal{F}_0^t(u) \leqslant C(\mathcal{E}_0^u(0) + V_0(t,u)) = C(\mathcal{E}_0^u(0) + \int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du') \tag{5.294}$$

由 $\mathcal{E}_0^u(0)$ 是 u 的非减函数, $[0,\epsilon_0]$ 是一个有界区间, 我们可以用 Gronwall 不等式得到

$$\mathcal{F}_0^t(u) \leqslant C\mathcal{E}_0^u(0) \tag{5.295}$$

所以

$$V_0(t,u) \leqslant C\epsilon_0\mathcal{E}_0^u(0) \tag{5.296}$$

把这个代入 (5.292), 我们得到

$$\bar{\mathcal{E}}_0^u(t) \leqslant C\mathcal{E}_0^u(0) \tag{5.297}$$

最后把 (5.297) 代入 (5.277), (5.279), (5.281), 我们得到

$$\bar{\mathcal{E}}_1'^u(t), \bar{\mathcal{F}}_1'^t(u), \bar{K}(t,u) \leqslant C\mathcal{E}_0^u(0) \tag{5.298}$$

这样定理 5.1 的证明就完成了. □

关于误差时空积分我们有一些注记.

(i) 当我们估计 $Q_{1,3}$ 时, 我们不是简单地用绝对值来估计 $L\mu$, 而是把 $L\mu$ 分成正部和负部. 因为由 **C3** 和 (5.195), 我们可以用 $L\mu$ 的负部来估计变分在 μ 较小的区域 $\mathcal{U}$ 中的切向导数. 在估计 $Q_{0,3}$ 时, 我们同样将 $L\mu + \underline{L}\mu$ 分成正部和负部, 使得我们可以运用连续性假设 **C1** 和 **C2**.

(ii) 让我们重新回到 (5.218) 关于 $N_{1,0}$ 的估计, 这一项原本是来自于 $Q_{1,5}$. 这里右端有一个不能改进的 $(1+\log(1+t))^4$ 的增长, 这就是我们为什么要在 $\mathcal{E}_1'^u(t)$ 和 $\mathcal{F}_1'^t(u)$ 以及 $K(t,u)$ 引入一个权的原因, 见 (5.90), (5.91) 和 (5.235). 这样我们就可以完成 K_1 的误差估计了, 因为这个权已经足够估计 $L(t,u)$ 了 (见 (5.257)), 它的增长类似于 $\log(\log(1+t))$.

(iii) 最后, 5.5 节的处理不是标准的, 因为我们在积分不等式中有两个变量 t, u, 其中 u 在一个有界区间内取值. 然而当一个变量固定时, 我们可以对另一个变量用 Gronwall 不等式, 从而完成证明.

第六章 交换向量场的构造

6.1 交换向量场的构造和它们的形变张量

在这一章中我们将构造用来定义位势函数 ϕ 的高阶变分的向量场 $Y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$. 即,

$$\psi_n = Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} \psi_1 \tag{6.1}$$

其中 ψ_1 是一阶变分, 即 (5.5) 中的某一个函数. 这里 $i_1, \cdots, i_{n-1} = 1, 2, 3, 4, 5$. 由于 ψ_1 满足

$$\square_{\tilde{g}} \psi_1 = 0 \tag{6.2}$$

则 ψ_n 满足

$$\square_{\tilde{g}} \psi_n = \rho_n \tag{6.3}$$

其中 ρ_n 由把向量场 $Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}}$ 与 $\square_{\tilde{g}}$ 相交换所得到. 所以我们称 $Y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 为交换向量场.

我们要求在每一点, 这些交换向量场张成时空流形在那一点的切空间. 所以对固定的 n 和给定的 ψ_1, ψ_n 包含了 ψ_1 的所有 $n-1$ 阶导数.

我们取

$$Y_1 = T \tag{6.4}$$

因为它不与 C_u 相切, 我们要求 $Y_i, i=2,3,4,5$ 与 C_u 相切. 进一步, 对每个 $u \in [0,\epsilon_0]$ 和每个 $x \in C_u$, 集合 $\{Y_i(x) : i=2,3,4,5\}$ 张成了 C_u 在 x 的切空间.

接下来我们取

$$Y_2 = Q := (1+t)L \tag{6.5}$$

由于在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中, u 是在有界区间 $[0,\epsilon_0]$ 中取值, 所以 Q 在声学时空中的角色有点类似于 D 在平坦时空中的角色. 由于 Y_2 不与 $S_{t,u}$ 相切, 我们要求 $Y_i, i=3,4,5$ 与 $S_{t,u}$ 相切. 进一步, 对每个 t,u 和每个 $x \in S_{t,u}$, 集合 $\{Y_i(x) : i=3,4,5\}$ 张成了 $S_{t,u}$ 的切空间.

我们设

$$Y_{i+2} = R_i := \Pi \mathring{R}_i, i=1,2,3 \tag{6.6}$$

这里 $\mathring{R}_i$ 是以三个坐标轴为轴的旋转的生成子:

$$\mathring{R}_i = \epsilon_{ijk} x^j \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk} \tag{6.7}$$

取值 ϵ_{ijk} 是三维反对称指标. 在 (6.6) 中 Π 是 Σ_t 关于诱导声学度量 $\bar{g}$, 即 Euclid 度量, 到 $S_{t,u}$ 的投影.

当我们考虑交换子 $[Y, \Box_{\tilde{g}}]$ 时, 形变张量 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 就会出现. 由于

$${}^{(Y)}\tilde{\pi} = \Omega^{(Y)}\pi + (Y\Omega)g \tag{6.8}$$

我们必须考虑 ${}^{(Y)}\pi$ 的表达式

$${}^{(Y)}\pi(Z_1, Z_2) = g(D_{Z_1}Y, Z_2) + g(D_{Z_2}Y, Z_1) \tag{6.9}$$

形变张量 ${}^{(T)}\pi, {}^{(Q)}\pi$ 在标架 $(L, \underline{L}, X_1, X_2)$ 下的分量可以直接由 (3.99)—(3.106) 和 (3.130)—(3.137) 得到:

$${}^{(T)}\tilde{\pi}_{LL} = 0 \tag{6.10}$$

$${}^{(T)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}} = 4\Omega\mu T(\eta^{-1}\kappa) \tag{6.11}$$

$${}^{(T)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}} = -2\Omega(T\mu + \mu T\log\Omega) \tag{6.12}$$

$${}^{(T)}\tilde{\pi}_{LA} = -\Omega(\zeta_A + \eta_A) \tag{6.13}$$

$${}^{(T)}\tilde{\pi}_{\underline{L}A} = -\Omega\alpha^{-1}\kappa(\zeta_A + \eta_A) \tag{6.14}$$

$${}^{(T)}\hat{\tilde{\pi\!\!\!/}}_{AB} = \Omega(\hat{\underline{\chi}}_{AB} - \eta^{-1}\kappa\hat{\chi}_{AB}) \tag{6.15}$$

$$\mathrm{tr}\,{}^{(T)}\tilde{\pi\!\!\!/} = 2\Omega(\underline{\nu} - \eta^{-1}\kappa\nu) \tag{6.16}$$

以及

$$^{(Q)}\tilde{\pi}_{LL} = 0 \tag{6.17}$$

$$^{(Q)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}} = 4\Omega\mu(Q(\eta^{-1}\kappa) - \eta^{-1}\kappa) \tag{6.18}$$

$$^{(Q)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}} = -2\Omega(Q\mu + \mu Q\log\Omega + \mu) \tag{6.19}$$

$$^{(Q)}\tilde{\pi}_{LA} = 0 \tag{6.20}$$

$$^{(Q)}\tilde{\pi}_{\underline{L}A} = 2\Omega(1+t)(\zeta_A + \eta_A) \tag{6.21}$$

$$^{(Q)}\hat{\tilde{\not\pi}}_{AB} = 2\Omega(1+t)\hat{\chi}_{AB} \tag{6.22}$$

$$\mathrm{tr}^{(Q)}\tilde{\not\pi} = 4\Omega(1+t)\nu \tag{6.23}$$

这里我们记 $^{(Y)}\tilde{\not\pi}$ 为 $^{(Y)}\tilde{\pi}$ 在 $S_{t,u}$ 上的限制, 记 $^{(Y)}\hat{\tilde{\not\pi}}$ 为 $^{(Y)}\tilde{\not\pi}$ 的无迹部分.

注意到 $R_i, i = 1,2,3$ 的定义关于类空超曲面 Σ_t 是内蕴的, 我们将导出 $^{(R_i)}\pi$ 在标架 (L, T, X_1, X_2) 下的分量, 因为 (T, X_1, X_2) 是 Σ_t 的标架. 由 (3.99)—(3.106), 我们有

$$^{(R_i)}\pi_{LL} = 2g(D_L R_i, L) = -2g(R_i, D_L L) = 0 \tag{6.24}$$

这是因为 R_i 与 $S_{t,u}$ 相切, 而 L 与 $S_{t,u}$ 正交. 由同样的原因 T 也与 R_i 正交, 所以

$$^{(R_i)}\pi_{TT} = 2g(D_T R_i, T) = -2g(R_i, D_T T) \tag{6.25}$$

由于 R_i 与 $S_{t,u}$ 相切, 我们可以展开

$$R_i = R_i^A X_A \tag{6.26}$$

得到

$$^{(R_i)}\pi_{TT} = 2\kappa R_i\kappa \tag{6.27}$$

然后

$$\begin{aligned} ^{(R_i)}\pi_{LT} &= g(D_L R_i, T) + g(D_T R_i, L) \\ &= -g(R_i, D_L T) - g(R_i, D_T L) \\ &= -\eta_A R_i^A + \zeta_A R_i^A = -R_i\mu \end{aligned} \tag{6.28}$$

这里我们用到了 (3.55).

接下来我们有

$$ {}^{(R_i)}\pi_{LA} = g(D_L R_i, X_A) + g(D_{X_A} R_i, L) \tag{6.29} $$

而

$$ g(D_{X_A} R_i, L) = -g(R_i, D_{X_A} L) = -\chi_{AB} R_i^B \tag{6.30} $$

另一方面, 由 (6.6), 我们有

$$ D_L R_i = (D_L \Pi)\mathring{R}_i + \Pi(D_L \mathring{R}_i) \tag{6.31} $$

注意到对任意向量场 Z

$$ g(\Pi Z, X_A) = g(Z, X_A) \tag{6.32} $$

我们得到

$$ g(D_L R_i, X_A) = g((D_L \Pi)\mathring{R}_i, X_A) + g(D_L \mathring{R}_i, X_A) \tag{6.33} $$

所以

$$ {}^{(R_i)}\pi_{LA} = g((D_L \Pi)\mathring{R}_i, X_A) + g(D_L \mathring{R}_i, X_A) - \chi_{AB} R_i^B \tag{6.34} $$

类似地, 我们有

$$ {}^{(R_i)}\pi_{TA} = g((D_T \Pi)\mathring{R}_i, X_A) + g(D_T \mathring{R}_i, X_A) - \kappa\theta_{AB} R_i^B \tag{6.35} $$

以及

$$ \begin{aligned} {}^{(R_i)}\pi_{AB} = & g((D_{X_A}\Pi)\mathring{R}_i, X_B) + g((D_{X_B}\Pi)\mathring{R}_i, X_A) \\ & + g(D_{X_A}\mathring{R}_i, X_B) + g(D_{X_B}\mathring{R}_i, X_A) \end{aligned} \tag{6.36} $$

现在我们必须计算 $(D\Pi)\mathring{R}_i$ 和 $D\mathring{R}_i$. 由于 $\mathring{R}_i$ 与 Σ_t 相切, 我们可以展开:

$$ \mathring{R}_i = R_i^A X_A + \lambda_i \hat{T}, \quad \hat{T} = \kappa^{-1} T \tag{6.37} $$

其中 λ_i 是一个光滑函数. 由于 $\Pi T = 0$, 对任意向量场 Z 我们有

$$ (D_Z \Pi)T = D_Z(\Pi T) - \Pi(D_Z T) = -\Pi(D_Z T) \tag{6.38} $$

分别设 Z 等于 $L, T, X_A, A = 1, 2$, 由 (3.99)—(3.106),

$$ (D_L \Pi)T = \zeta^A X_A \tag{6.39} $$

$$ (D_T \Pi)T = \kappa(\not{d}^A \kappa) X_A \tag{6.40} $$

$$ (D_{X_A} \Pi)T = -\kappa\theta_A^B X_B \tag{6.41} $$

由于 $\Pi X_A = X_A$, 对任意向量场 Z 我们有

$$(D_Z\Pi)X_A = D_Z(\Pi X_A) - \Pi(D_Z X_A) = D_Z X_A - \Pi(D_Z X_A) \tag{6.42}$$

显然上式右端与 $S_{t,u}$ 正交. 所以我们得到

$$g((D_L\Pi)\mathring{R}_i, X_A) = \kappa^{-1}\lambda_i\zeta_A \tag{6.43}$$

$$g((D_T\Pi)\mathring{R}_i, X_A) = \lambda_i \not{d}_A \kappa \tag{6.44}$$

$$g((D_{X_A}\Pi)\mathring{R}_i, X_B) = -\lambda_i\theta_{AB} \tag{6.45}$$

接下来我们计算 $D\mathring{R}_i$. 在任意一个局部坐标下我们有

$$D_\mu \mathring{R}_i^\nu = \frac{\partial \mathring{R}_i^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\mathring{R}_i^\lambda \tag{6.46}$$

其中 $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ 是声学度量 g 在给定坐标下的联络系数 (Christoffel 符号), 并且我们有

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = (g^{-1})^{\nu\kappa}\Gamma_{\mu\lambda\kappa} \tag{6.47}$$

回忆第三章, 在 Galileo 坐标下我们有

$$\Gamma_{000} = \frac{1}{2}\partial_0(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) \tag{6.48}$$

$$\Gamma_{0i0} = \frac{1}{2}\partial_i(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2) \tag{6.49}$$

$$\Gamma_{ij0} = \partial_i\partial_j\phi \tag{6.50}$$

$$\Gamma_{00k} = \frac{1}{2}(2\partial_t\partial_k\phi - \partial_k(-\eta^2 + |\mathbf{v}|^2)) \tag{6.51}$$

$$\Gamma_{i0k} = \Gamma_{ijk} = 0 \tag{6.52}$$

现在我们可以计算 $g(D_L\mathring{R}_i, X_A), g(D_T\mathring{R}_i, X_A)$ 和 $g(D_{X_A}\mathring{R}_i, X_B)$.

$$g(D_L\mathring{R}_i, X_A) = g_{\mu\nu}L^\lambda D_\lambda \mathring{R}_i^\mu X_A^\nu = g_{\mu\nu}L^\lambda(\frac{\partial \mathring{R}_i^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\gamma}\mathring{R}_i^\gamma)X_A^\nu \tag{6.53}$$

这是

$$L^\lambda(g_{\mu\nu}\frac{\partial \mathring{R}_i^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\mathring{R}_i^\mu)X_A^\nu = L^l\bar{g}_{mn}\frac{\partial \mathring{R}_i^m}{\partial x^l}X_A^n = L^l\delta_{mn}\epsilon_{ilm}X_A^n = L^l\epsilon_{ilm}X_A^m \tag{6.54}$$

其中我们用到了联络系数的表达式和 $\mathring{R}_i^0 = X_A^0 = 0$.

类似地, 我们有

$$g(D_T\mathring{R}_i, X_A) = T^l\epsilon_{ilm}X_A^m \tag{6.55}$$

以及

$$g(D_{X_A}\mathring{R}_i, X_B) = X_A^l\epsilon_{ilm}X_B^m \tag{6.56}$$

把上面这些代入 (6.35)—(6.37), 我们得到

$$^{(R_i)}\pi_{LA} = -\chi_{AB}R_i^B + L^l\epsilon_{ilm}X_A^m + \kappa^{-1}\lambda_i\zeta_A \tag{6.57}$$

$$^{(R_i)}\pi_{TA} = -\kappa\theta_{AB}R_i^B + T^l\epsilon_{ilm}X_A^m + \lambda_i \not{d}_A\kappa \tag{6.58}$$

注意到 ϵ_{ilm} 关于 l, m 反对称, 而 $X_A^l X_B^m + X_A^m X_B^l$ 关于 l, m 对称, 所以

$$^{(R_i)}\pi_{AB} = -2\lambda_i\theta_{AB} \tag{6.59}$$

由于 λ_i 在 (6.57) 的系数是 $\kappa^{-1}\zeta_A$, 回忆第三章, $\kappa^{-1}\zeta_A$, θ_{AB} 当 $\mu \to 0$ 是正则的, 所以这些表达式当 $\mu \to 0$ 时是正则的.

我们引入函数 y^i:

$$\hat{T}^i = -\frac{x^i}{1-u+t} + y^i \tag{6.60}$$

运用这个以及事实

$$\epsilon_{ilm}x^l X_A^m = \sum_m \mathring{R}_i^m X_A^m = \not{g}_{AB}R_i^B \tag{6.61}$$

我们可以把 (6.58) 右端的前两项写成

$$-\kappa\theta_{AB}R_i^B + T^l\epsilon_{ilm}X_A^m = -\kappa(\theta_{AB} + \frac{\not{g}_{AB}}{1-u+t})R_i^B + \kappa\epsilon_{ilm}y^l X_A^m \tag{6.62}$$

则 (6.58) 有如下形式:

$$^{(R_i)}\pi_{TA} = -\kappa(\theta_{AB} + \frac{\not{g}_{AB}}{1-u+t})R_i^B + \kappa\epsilon_{ilm}y^l X_A^m + \lambda_i\not{d}_A\kappa \tag{6.63}$$

同样我们定义函数 z^i:

$$L^i = \frac{x^i}{1-u+t} + z^i \tag{6.64}$$

由 (6.60) 和 (6.64) 并且回忆: $L = \partial_0 - (\eta\hat{T}^i + \psi_i)\partial_i$, 我们得到

$$z^i = -\eta y^i + \frac{(\eta-1)x^i}{1-u+t} - \psi_i \tag{6.65}$$

由 (6.62) 和 (6.65), 我们把 (6.57) 的前两项写成

$$-\chi_{AB}R_i^B + L^l\epsilon_{ilm}X_A^m = -(\chi_{AB} - \frac{\not{g}_{AB}}{1-u+t})R_i^B + \epsilon_{ilm}z^l X_A^m \tag{6.66}$$

所以 (6.57) 有如下形式:

$$^{(R_i)}\pi_{LA} = -(\chi_{AB} - \frac{\not{g}_{AB}}{1-u+t})R_i^B + \epsilon_{ilm}z^l X_A^m + \lambda_i(\kappa^{-1}\zeta_A) \tag{6.67}$$

6.2 形变张量的初步估计

在这一章剩下的部分, 我们将看到交换向量场的形变张量 $^{(Y)}\pi$ 如何由 χ, μ 和 ψ_μ 所估计.

接下来我们假设 **A1**, **A2**, **A3** 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立.

$$\mathbf{A1}: C^{-1} \leqslant \Omega \leqslant C$$

$$\mathbf{A2}: C^{-1} \leqslant \eta \leqslant C$$

$$\mathbf{A3}: \mu \leqslant C(1+\log(1+t))$$

其中常数 C 不依赖于 s.

回忆定义

$$\psi_\mu = \partial_\mu\phi \tag{6.68}$$

我们将运用关于 ψ_μ 及其一阶导数的连续性假设. 接下来我们记 δ_0 是一个小于 1 的正常数. 这个常数将用来追踪各个量的大小. 另一方面, 除了 $\epsilon_0 \leqslant \frac{1}{2}$, ϵ_0 没有任何小性.

存在一个不依赖于 s 的常数 C 使得在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中,

$$\mathbf{E1}: |\psi_0 - h_0|, \quad |\psi_i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

$$\mathbf{E2}: |T\psi_\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad |L\psi_\mu|, \quad |\not{d}\psi_\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}$$

E2 中的第二个假设是由 $|Q\psi_\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$ 得来, 而第三个则是由 $|R_i\psi_\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, i=1,2,3$ 得来. 我们将会在第 十、十一和十二章中得出这些估计.

关于 μ 和 χ, 我们在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中也有连续性假设:

$$\mathbf{F1}: |T\mu| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)), \quad |\not{d}\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

$$\mathbf{F2}: |\chi - \frac{\not{g}}{1-u+t}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

这里正常数 C 同样不依赖于 s.

在假设 $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ 下, 我们将要导出的在 $W_{\epsilon_0}^s$ 成立的估计中的常数也与 s 无关.

首先回忆焓的定义 $h = \psi_0 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \psi_i^2$, 由 $\mathbf{E}$ 我们有

$$|h| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad |Th| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad |Lh|, \quad |\not{d}h| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.69}$$

回忆 $\hat{T}$ 是 $S_{t,u}$ 在 Σ_t 在诱导度量 $\bar{g}$ 下的单位法向, 同时它也是 Euclid 度量, 所以

$$|\hat{T}| = 1 \tag{6.70}$$

从而由 **E1** 有

$$|\psi_{\hat{T}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.71}$$

回忆定义 $L = \partial_0 - (\alpha\hat{T}^i + \psi_i)\partial_i$, 由 **E1** 和 (6.70), 我们有

$$|L^i| \leqslant C \tag{6.72}$$

由于 $L^0 = 1$, 我们有

$$|\psi_L| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.73}$$

我们将 $\bar{g}^{-1}$ 在标架 $\hat{T}, X_1, X_2$ 下表示出来:

$$\delta^{ij} = (\bar{g}^{-1})^{ij} = \hat{T}^i\hat{T}^j + (\not{g}^{-1})^{AB}X_A^i X_B^j \tag{6.74}$$

由 **E1** 可得

$$\begin{aligned}|\not{\psi}|^2 &= (\not{g}^{-1})^{AB}\not{\psi}_A\not{\psi}_B = (\not{g}^{-1})^{AB}X_A^i X_B^j \psi_i\psi_j \\ &\leqslant (\bar{g}^{-1})^{ij}\psi_i\psi_j = \sum_i (\psi_i)^2 \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-2}\end{aligned} \tag{6.75}$$

也就是

$$|\not{\psi}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.76}$$

对于 $S_{t,u}$ 一点处切空间上的双线性形式 ω, 它的模长 $|\omega|$ 为

$$|\omega|^2 = (\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}\omega_{AB}\omega_{CD} \tag{6.77}$$

回忆 $\not{k}_{AB} = X_A^i X_B^j k_{ij} = -\eta^{-1} X_A^i X_B^j \partial_i \psi_j$. 所以

$$\begin{aligned}
|\not{k}|^2 &= (\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}\not{k}_{AB}\not{k}_{CD} = (\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD} X_A^i X_B^j k_{ij} X_C^l X_D^m k_{lm} \\
&= \eta^{-2}(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD} X_A^i \not{d}_B \psi_i X_C^l \not{d}_D \psi_l \\
&\leqslant C\eta^{-2}(\bar{g}^{-1})^{ij}(\not{g}^{-1})^{BD}(\not{d}_B\psi_i)(\not{d}_D\psi_j) \\
&= \eta^{-2}\sum_i (\not{g}^{-1})^{BD}(\not{d}_B\psi_i)(\not{d}_D\psi_i) \\
&= \eta^{-2}\sum_i |\not{d}\psi_i|^2 \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-4}
\end{aligned} \tag{6.78}$$

也就是

$$|\not{k}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.79}$$

由 **A2** 和 **A3**, 这蕴涵着

$$\kappa|\not{k}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{6.80}$$

对于 $S_{t,u}$ 一点处切空间上的线性形式 v, 它的模长 $|v|$ 为

$$|v|^2 = (\not{g}^{-1})^{AB} v_A v_B \tag{6.81}$$

由第三章中的定义, $\epsilon_A = \kappa^{-1} k(X_A, T)$, 我们有

$$\begin{aligned}
|\epsilon|^2 &= (\not{g}^{-1})^{AB}\epsilon_A\epsilon_B = (\not{g}^{-1})^{AB} k_{A\hat{T}} k_{B\hat{T}} = (\not{g}^{-1})^{AB} X_A^i X_B^j \hat{T}^l \hat{T}^m k_{il} k_{jm} \\
&= \eta^{-2}(\not{g}^{-1})^{AB}\hat{T}^l\hat{T}^m \not{d}_A\psi_l \not{d}_B\psi_m \leqslant \eta^{-2}\sum_i |\not{d}\psi_i|^2 \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-4}
\end{aligned} \tag{6.82}$$

也就是

$$|\epsilon| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.83}$$

接下来我们估计 η. 回忆

$$\eta = \left(\frac{\rho'(h)}{\rho(h)}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6.84}$$

由 (6.69) 第一式有

$$|\eta - 1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.85}$$

对 (6.84) 在 $S_{t,u}$ 的切空间上求微分, 我们有 $\not{d}\eta = \left(\frac{\rho'(h)}{\rho(h)}\right)^{-\frac{1}{2}\prime}\not{d}h$, 从而由 (6.69) 的最后一式有

$$|\not{d}\eta| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.86}$$

类似地我们有

$$|T\eta| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad |L\eta| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.87}$$

由 $\kappa^{-1}\zeta_A = \eta\epsilon_A - \not{d}_A\alpha$, 我们得到

$$|\kappa^{-1}\zeta| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.88}$$

所以

$$|\zeta| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{6.89}$$

我们同样可以求 $L\mu$ 的界, 由第三章的 (3.92),

$$L\mu = m + \mu e \tag{6.90}$$

其中

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}Th, \quad e = \frac{1}{2\alpha^2}(\frac{\rho'}{\rho})'Lh + \alpha^{-1}\hat{T}^i(L\psi_i) \tag{6.91}$$

由 (6.69), 我们有

$$|m| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.92}$$

由 (6.69), (6.70) 和 **E2**, 我们有

$$|e| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.93}$$

从而

$$|L\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.94}$$

由 $\kappa = \alpha^{-1}\mu$ 和 (6.87) 的第二式, 我们有

$$|L\kappa| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.95}$$

沿着 L 的积分曲线积分有

$$|\kappa - \kappa_0| \leqslant C\delta_0\log(1+t) \tag{6.96}$$

这里 κ_0 在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中某一点处的取值是 κ 在 Σ_0 上沿着 L 的同一积分曲线的对应点的取值. 由 (6.96) 和在 Σ_0 上 $\kappa_0 = 1$ 这一事实我们得到了在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中的如下估计:

$$|\kappa - 1| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.97}$$

由 **F1** 和 (6.86) 以及 (6.87) 的第一式, 我们可以估计 κ 在 Σ_t 的导数:

$$|T\kappa| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)), \quad |\not{d}\kappa| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.98}$$

由 $\eta = \zeta + \not{d}\mu$, **F1** 和 (6.89) 有

$$|\eta| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.99}$$

然后我们用 **F2** 估计

$$\nu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi + \frac{d\log\Omega}{dh}Lh), \quad \underline{\nu} = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\underline{\chi} + \frac{d\log\Omega}{dh}\underline{L}h) \tag{6.100}$$

若 δ_0 足够小, 则 **F2** 意味着

$$\mathrm{tr}\chi \geqslant C^{-1}(1+t)^{-1} \tag{6.101}$$

这是加在 δ_0 上的第一个条件.

回忆

$$\chi = \eta(\not{k} - \theta), \quad \underline{\chi} = \kappa(\not{k} + \theta) \tag{6.102}$$

所以我们有

$$\mathrm{tr}\underline{\chi} = 2\kappa\mathrm{tr}\not{k} - \eta^{-1}\kappa\mathrm{tr}\chi, \quad \hat{\underline{\chi}} = 2\kappa\hat{\not{k}} - \eta^{-1}\kappa\hat{\chi} \tag{6.103}$$

由 (6.80), (6.96) 和 **F2**, 我们有

$$|\mathrm{tr}\underline{\chi}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)), \quad |\hat{\underline{\chi}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.104}$$

同样由 (6.79), (6.85) 和 **F2**, 我们有

$$|\theta + \frac{\not{g}}{1-u+t}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{6.105}$$

最后由 **F2**, (6.69) 和 (6.101), 我们得到

$$\begin{gathered} C^{-1}(1+t)^{-1} \leqslant \nu \leqslant C(1+t)^{-1} \\ |\nu - (1-u+t)^{-1}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \end{gathered} \tag{6.106}$$

同样由 (6.69) 和 (6.104), 我们有

$$|\underline{\nu}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.107}$$

现在我们可以给出 T 和 Q 的形变张量的界. 接下来我们记 ${}^{(Y)}\not\pi_L$ 和 ${}^{(Y)}\not\pi_{\underline{L}}$ 为 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$
{}^{(Y)}\not\pi_L(X_A) = {}^{(Y)}\not\pi_{LA}, \quad {}^{(Y)}\not\pi_{\underline{L}}(X_A) = {}^{(Y)}\not\pi_{\underline{L}A} \tag{6.108}
$$

对 ${}^{(Y)}\tilde{\not\pi}_L$ 和 ${}^{(Y)}\tilde{\not\pi}_{\underline{L}}$ 也是类似的.

首先我们估计 T 的形变张量. 由 (6.11), (6.97), (6.98) 和 (6.87), 我们有

$$
\mu^{-1}|{}^{(T)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.109}
$$

由 (6.12), **F1**, **A** 和 (6.69), 我们有

$$
|{}^{(T)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.110}
$$

由 (6.13), (6.89) 和 (6.99), 我们有

$$
|{}^{(T)}\tilde{\not\pi}_L| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.111}
$$

由 (6.14), (6.89), (6.97) 和 (6.99), 我们有

$$
\mu^{-1}|{}^{(T)}\tilde{\not\pi}_{\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.112}
$$

由 (6.15), (6.97), (6.104) 和 **F2**, 我们有

$$
|{}^{(T)}\hat{\tilde{\not\pi}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.113}
$$

最后由 (6.16), (6.97), (6.106) 和 (6.107), 我们有

$$
|\mathrm{tr}\,{}^{(T)}\tilde{\not\pi}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.114}
$$

接下来我们估计 Q 的形变张量. 由 (6.18), (6.87), (6.95) 和 (6.97), 我们有

$$
\mu^{-1}|{}^{(Q)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}| \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{6.115}
$$

由 (6.19), (6.69), (6.94), 我们有

$$
|{}^{(Q)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}| \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{6.116}
$$

由 (6.21), (6.89) 和 (6.99), 我们有

$$
|{}^{(Q)}\tilde{\not\pi}_{\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.117}
$$

由 (6.22), **F2**, 我们有

$$|{}^{(Q)}\hat{\tilde{\not\pi}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.118}$$

由 (6.23), (6.106), 我们有

$$|\mathrm{tr}^{(Q)}\tilde{\not\pi}| \leqslant C \tag{6.119}$$

实际上我们可以得到一个关于 $\mathrm{tr}^{(Q)}\tilde{\not\pi}$ 更精确的估计:

$$\mathrm{tr}^{(Q)}\tilde{\not\pi} - 4 = 4(\Omega-1)(1+t)\nu + 4(1+t)(\nu - \frac{1}{1+t}) \tag{6.120}$$

由 $\Omega(0)=1$, 即在常状态 $\Omega=1$, (6.69) 意味着

$$|\Omega - 1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.121}$$

那么由 (6.106),

$$|\mathrm{tr}^{(Q)}\tilde{\not\pi} - 4| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.122}$$

其中我们用到了如下事实: $(1+t)^{-1}$ 与 $(1-u+t)^{-1}$ 的差大概为 $(1+t)^{-2}$.

为了求 R_i 的形变张量的界, 我们必须估计由 (6.37) 式定义的 λ_i, 以及分别由 (6.60) 和 (6.64) 定义的函数 y_i 和 z_i.

首先我们要给出如下函数的上界和下界:

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2} \tag{6.123}$$

由于 r 在 $\Sigma_t \bigcap W^*_{\epsilon_0}$ 的最大值是在 $\Sigma_t \bigcap C_0 = S_{t,0}$ 取到, 所以最大值应该是 $1+t$, 从而在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中,

$$r \leqslant 1+t \tag{6.124}$$

对于下界, 我们有

$$Tr = \sum_{i=1}^{3}\frac{x^i T^i}{r} = \kappa \sum_{i=1}^{3}\frac{x^i \hat{T}^i}{r} \tag{6.125}$$

由 (6.70), 我们有

$$|Tr| \leqslant \kappa \tag{6.126}$$

再由 (6.97), 我们有

$$|Tr| \leqslant 1 + C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.127}$$

沿着 T 的积分曲线对 (6.127) 从 $\Sigma_t \bigcap C_0 = S_{t,0}$, 也就是 $r = 1 + t$ 处, 积到 $S_{t,u}$, 我们得到: 在 $W^*_{\epsilon_0}$, $u \in [0, \epsilon_0]$ 中,

$$r \geqslant 1 - u + t - C\delta_0 u(1 + \log(1 + t)) \tag{6.128}$$

若取 δ_0 足够小, 我们得到

$$r \geqslant C^{-1}(1 + t) \tag{6.129}$$

我们接下来推导 λ_i 的估计, 由 (6.37), 我们有

$$\lambda_i = \bar{g}(\mathring{R}_i, \hat{T}) \tag{6.130}$$

首先我们导出 $\mathring{R}_i$ 和 R_i 的估计:

$$|\mathring{R}_i| = \sqrt{r^2 - (x_i)^2} \leqslant r \leqslant 1 + t \tag{6.131}$$

由 (6.37), 我们有

$$|R_i| \leqslant |\mathring{R}_i| \leqslant 1 + t \tag{6.132}$$

接下来我们导出一个 λ_i 沿 L 积分曲线的常微分方程. 注意到 $S_{0,u}$ 是球心在原点的球面而且在 Σ_0 上我们有 $\hat{T} = -\frac{\partial}{\partial r}$, 所以在 Σ_0 上,

$$\lambda_i = 0 \tag{6.133}$$

现在我们有

$$L\lambda_i = \sum_m (L\mathring{R}_i^m)\hat{T}^m + \sum_m \mathring{R}_i^m L\hat{T}^m \tag{6.134}$$

回忆 $L = \partial_t - (\eta\hat{T}^i + \psi_i)\partial_i$ 和 $\mathring{R}_i^m = \epsilon_{ijm}x^j$,

$$\Rightarrow L\mathring{R}_i^m = -(\eta\hat{T}^j + \psi_j)\epsilon_{ijm} \tag{6.135}$$

而 $L\hat{T}^m$ 由 (3.176) 给出:

$$L\hat{T}^m = p_L\hat{T}^m + q_L^m \tag{6.136}$$

由第三章的结论 $p_L = 0$, 然后由 (3.179), 我们有

$$q_L = q_L^A X_A = q_L^A X_A^m \partial_m \Rightarrow q_L^m = q_L^A X_A^m \tag{6.137}$$

所以我们得到

$$L\lambda_i = -\psi_j \hat{T}^m \epsilon_{ijm} + \epsilon_{ijm} q_L^A X_A^m x^j \tag{6.138}$$

这里我们运用了如下事实: $\epsilon_{ijm}\hat{T}^j\hat{T}^m = 0$.

回忆 (3.182),

$$q_L^A = -\kappa^{-1}\zeta^A \tag{6.139}$$

(6.88) 给出

$$|q_L| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{6.140}$$

(6.138) 右端第二项为 $\bar{g}(\mathring{R}_i, q_L)$.

由 (6.131) 和 (6.140),

$$|\bar{g}(\mathring{R}_i, q_L)| \leqslant |\mathring{R}_i||q_L| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.141}$$

再由 **E1** 我们得到

$$|L\lambda_i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{6.142}$$

沿着 L 的积分曲线积分, 我们有

$$|\lambda_i| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.143}$$

接下来我们将导出 λ_i 与 Σ_t 相切的导数的估计. 我们有

$$T\lambda_i = \sum_m (T\mathring{R}_i^m)\hat{T}^m + \sum_m \mathring{R}_i^m T(\hat{T}^m) \tag{6.144}$$

由 $\mathring{R}_i^m = \epsilon_{ijm}x^j$, 我们有

$$\begin{aligned} &\hat{T}\mathring{R}_i^m = \epsilon_{ijm}\hat{T}^j \\ \Rightarrow &\sum_m (T\mathring{R}_i^m)\hat{T}^m = \epsilon_{ijm}\hat{T}^j\hat{T}^m = 0 \end{aligned} \tag{6.145}$$

所以

$$T\lambda_i = \sum_m \mathring{R}_i^m T(\hat{T}^m) \tag{6.146}$$

由 (3.191), 我们知道

$$T(\hat{T}^m) = p_T\hat{T}^m + q_T^m \tag{6.147}$$

由 (3.192), 我们有 $p_T = 0$, 然后由 (3.193) 和 (3.194), 我们有 $q_T^A = -X^A(\kappa)$. 所以

$$T\lambda_i = \bar{g}(\mathring{R}_i, q_T) \Rightarrow |T\lambda_i| \leqslant |\mathring{R}_i||q_T| \tag{6.148}$$

以及由 (6.98) 的第二式,

$$|q_T|^2 = \not{g}_{AB} q_T^A q_T^B = |\not{d}\kappa|^2 \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.149}$$

同样由 (6.131), 我们有

$$|T\lambda_i| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.150}$$

接下来我们有

$$\not{d}_A \mathring{R}_i^m = \epsilon_{ijm} \not{d}_A x^j = \epsilon_{ijm} X_A^j \tag{6.151}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \not{d}_A \lambda_i &= \sum_m (\not{d}_A \mathring{R}_i^m)\hat{T}^m + \sum_m \mathring{R}_i^m \not{d}_A \hat{T}^m \\ &= \epsilon_{ijm} X_A^j \hat{T}^m + \sum_m \mathring{R}_i^m (\not{p}_A \hat{T}^m + \not{q}_A^m)\end{aligned} \tag{6.152}$$

其中我们用到了 (3.200). 同样由 (3.201) 和 (3.202), 我们有

$$\not{p}_A = 0, \quad \not{q}_A^m = \theta_A^B X_B^m \tag{6.153}$$

从而

$$\not{d}_A \lambda_i = \epsilon_{ijm} X_A^j \hat{T}^m + \bar{g}(\mathring{R}_i, \not{q}_A) \tag{6.154}$$

由 (6.60), (6.154) 右端的第一项为

$$-\frac{\epsilon_{ijm} X_A^j x^m}{1-u+t} + \epsilon_{ijm} X_A^j y^m \tag{6.155}$$

另一方面, (6.154) 右端第二项为

$$\begin{aligned}\mathring{R}_i^m \theta_A^B X_B^m &= \epsilon_{ijm} x^j \theta_A^B X_B^m \\ &= -\frac{\epsilon_{ijm} x^j X_A^m}{1-u+t} + \epsilon_{ijm} x^j (\theta_A^B + \frac{\delta_A^B}{1-u+t}) X_B^m\end{aligned} \tag{6.156}$$

(6.155) 和 (6.156) 的第一项相互抵消, 从而我们得到

$$\not{d}_A \lambda_i = \epsilon_{ijm}(X_A^j y^m + x^j (\theta_A^B + \frac{\delta_A^B}{1-u+t}) X_B^m) \tag{6.157}$$

由 (6.105) 和 (6.124), 估计

$$|y^i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

意味着

$$|\not{d}\lambda_i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.158}$$

为了导出 y^i 和 x^i 的估计, 我们需要 r 的另一个界.

注意到对 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的任意一个向量场 V, 我们有

$$\sum_i \bar{g}(\mathring{R}_i, V)^2 = r^2|\Sigma V|^2 \tag{6.159}$$

其中 Σ 是 Euclid 空间中到 Euclid 球面的投影算子:

$$\Sigma^i_j = \delta^i_j - r^{-2}x^i x^j \tag{6.160}$$

我们可以用如下等式验证这一条:

$$\sum_i \epsilon_{ijm}\epsilon_{ikn} = \delta_{jk}\delta_{mn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \quad \sum_i \Sigma^i_m \Sigma^i_n = \Sigma^m_n \tag{6.161}$$

在 (6.159) 中取 V 为 $\hat{T}$, 由 (6.130), 我们得到

$$|\Sigma\hat{T}|^2 = r^{-2}\sum_i (\lambda_i)^2 \tag{6.162}$$

那么由 (6.129) 和 (6.143), 我们有

$$|\Sigma\hat{T}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.163}$$

考虑 Euclid 球面的外法向 N:

$$N = \frac{x^i}{r}\partial_i \tag{6.164}$$

则 (6.125) 有如下形式:

$$Tr = \kappa\bar{g}(N, \hat{T}) \tag{6.165}$$

分解

$$\begin{gathered} \hat{T} = \bar{g}(N,\hat{T})N + \Sigma\hat{T} \\ \Rightarrow |\hat{T}|^2 = |\bar{g}(N,\hat{T})|^2 + |\Sigma\hat{T}|^2 \end{gathered} \tag{6.166}$$

由 $|\hat{T}| = 1$, 我们有

$$1 - \bar{g}(N, \hat{T})^2 = |\Sigma\hat{T}|^2 \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.167}$$

如果 δ_0 足够小, 上式右端则会小于 $\frac{1}{2}$. 而在 $S_{t,0}$ 上, $\bar{g}(N, \hat{T}) = -1$, 由关于 u 的连续性, 这意味着 $\hat{T}$ 和 N 的夹角比 $\frac{\pi}{2}$ 大. 所以

$$\bar{g}(\hat{T}, N) < 0$$

从而

$$0 \leqslant 1 + \bar{g}(N, \hat{T}) \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.168}$$

由 (6.165),

$$Tr + 1 = \kappa(1 + \bar{g}(N, \hat{T})) - (\kappa - 1) \tag{6.169}$$

由 (6.97) 和 (6.168), 我们有

$$|Tr + 1| \leqslant C\delta_0(1 + \log(1+t)) \tag{6.170}$$

由于在 $S_{t,0}$ 上 $r = 1 + t$, 所以我们在 $S_{t,u}$ 上有

$$r - 1 - t + u = \int_0^u (Tr + 1)du' \tag{6.171}$$

由 (6.170), 我们得到

$$r \leqslant 1 + t - u(1 - C\delta_0(1 + \log(1+t))) \tag{6.172}$$

若 $C\delta_0(1+\log(1+t)) < 1$, (6.172) 比 (6.124) 更强, 否则就更弱.

由 (6.128) 和 (6.172), 我们有

$$|\frac{1}{r} - \frac{1}{1-u+t}| \leqslant C\delta_0 u(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{6.173}$$

现在考虑向量场

$$y' = \hat{T} + N = \Sigma\hat{T} + (1 + \bar{g}(N, \hat{T}))N \tag{6.174}$$

(6.163) 和 (6.168) 意味着

$$|y'| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.175}$$

回忆 (6.60) 和 $N^i = \frac{x^i}{r}$, 我们有

$$y'^i = -\frac{x^i}{1-u+t} + y^i + \frac{x^i}{r} \Rightarrow y^i = y'^i - x^i(\frac{1}{r} - \frac{1}{1-u+t}) \tag{6.176}$$

由 (6.124), (6.172) 和 (6.174), 我们有

$$|y^i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.177}$$

由上式和 (6.65) 以及 **E1**, 我们有

$$|z^i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.178}$$

我们同样用到了如下事实 $|\alpha - 1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$.

我们转向 R_i 的形变张量的估计. 由于 $\underline{L} = \alpha^{-1}\kappa L + 2T$, 我们由 (6.24) 和 (6.27)—(6.29),

$$^{(R_i)}\pi_{LL} = 0 \tag{6.179}$$

$$^{(R_i)}\pi_{L\underline{L}} = -2R_i\mu \tag{6.180}$$

$$^{(R_i)}\pi_{\underline{LL}} = 4\mu R_i(\alpha^{-1}\kappa) \tag{6.181}$$

由 **F1**, (6.85), (6.86), (6.97), (6.98) 和 (6.132), 我们有

$$|^{(R_i)}\pi_{L\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.182}$$

$$\mu^{-1}|^{(R_i)}\pi_{\underline{LL}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.183}$$

接下来我们估计 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $^{(R_i)}\not{\pi}_L$, 它的分量 $^{(R_i)}\pi_{LA}$ 由 (6.67) 给出. 由 **F2** 和 (6.132), (6.67) 右端的第一项被 $C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 界定. 第二项的模长平方是 $(\not{g}^{-1})^{AB}\epsilon_{ilm}z^l X_A^m \epsilon_{irp} z^r X_B^p$. 由 (6.74), 这个被 $\sum_m \epsilon_{ilm}z^l\epsilon_{irm}z^r = \sum_{l\neq i}(z^l)^2$ 界定. 我们用到了如下恒等式: $\sum_i \epsilon_{ijm}\epsilon_{ikn} = \delta_{jk}\delta_{mn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. 然后由 (6.178), (6.67) 的第二项被 $C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 界定. 由 (6.88) 和 (6.143), 第三项被 $C\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$ 界定.

$$\Rightarrow |^{(R_i)}\not{\pi}_L| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.184}$$

接下来估计 $^{(R_i)}\pi_{TA}$, 它由 (6.63) 给出.

由 (6.105), 第一项被 $C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2$ 界定.

由 (6.97) 和 (6.177), 我们知道第二项可以被 $C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2$ 界定.

最后由 (6.98) 和 (6.143), 第三项 $\lambda_i \not{d}_A \kappa$ 可以被 $C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2$ 界定.

所以我们得到

$$|{}^{(R_i)}\not{\pi}_T| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.185}$$

由 $\underline{L} = \alpha^{-1}\kappa L + 2T$, 我们有

$$|{}^{(R_i)}\not{\pi}_{\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.186}$$

最后我们估计 ${}^{(R_i)}\not{\pi}_{AB}$, 它由 (6.59) 给出. 由 **F2**, (6.80) 和 (6.143), 它被 $C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 界定. 但是我们希望分别估计它的迹部分和无迹部分.

由 $\mathrm{tr}^{(R_i)}\not{\pi} = 2\lambda_i(\alpha^{-1}\mathrm{tr}\chi - \mathrm{tr}\not{k})$, 以及 **F2**, (6.79) 和 (6.143), 有

$$|\mathrm{tr}^{(R_i)}\not{\pi}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.187}$$

和

$$|{}^{(R_i)}\hat{\not{\pi}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.188}$$

然后我们可以把所有这些估计都代入 ${}^{(R_i)}\tilde{\pi}$ 的表达式中:

$$ {}^{(R_i)}\tilde{\pi} = \Omega^{(R_i)}\pi + \frac{d\Omega}{dh}(R_i h)g \tag{6.189}$$

由 (6.69) 和 (6.132), 我们有 $|R_i h| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$, 然后我们得到

$$ {}^{(R_i)}\tilde{\pi}_{LL} = 0 \tag{6.190}$$

$$|{}^{(R_i)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.191}$$

$$\mu^{-1}|{}^{(R_i)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{6.192}$$

$$|{}^{(R_i)}\tilde{\not{\pi}}_L| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.193}$$

$$|{}^{(R_i)}\tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.194}$$

$$|\mathrm{tr}^{(R_i)}\tilde{\not{\pi}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.195}$$

$$|{}^{(R_i)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{6.196}$$

最后我们估计函数 ${}^{(R_i)}\delta$, 它的定义如下:

$$ {}^{(R_i)}\delta = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi} - \mu^{-1}Y\mu - 2\Omega^{-1}Y\Omega \tag{6.197}$$

它将在第七章中起到很关键的作用. 这里 $\tilde{\text{tr}}$ 是相对于 $\tilde{g}$ 的迹. 由于 $\tilde{g}^{-1}=\Omega^{-1}g^{-1}$, 我们有

$$\tilde{\text{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi}=\Omega^{-1}\text{tr}^{(Y)}\tilde{\pi}=\Omega^{-1}(-\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}+\text{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}) \tag{6.198}$$

所以

$$^{(Y)}\delta=-\frac{1}{2}\Omega^{-1}\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}-\mu^{-1}Y\mu+\Omega^{-1}(\frac{1}{2}\text{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}-2\frac{d\Omega}{dh}Yh) \tag{6.199}$$

由 (6.12),

$$^{(T)}\delta=\Omega^{-1}(\frac{1}{2}\text{tr}^{(T)}\tilde{\not{\pi}}-\frac{d\Omega}{dh}Th) \tag{6.200}$$

由 (6.19),

$$^{(Q)}\delta=\Omega^{-1}(\frac{1}{2}\text{tr}^{(Q)}\tilde{\not{\pi}}-\frac{d\Omega}{dh}Qh)+1 \tag{6.201}$$

由 (6.69) 和 (6.114), 我们有

$$|^{(T)}\delta|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.202}$$

由 (6.69) 和 (6.122), 我们有

$$|^{(Q)}\delta|\leqslant C \tag{6.203}$$

由 (6.180) 和 (6.189), 我们有

$$^{(R_i)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}=-2\Omega R_i\mu-2\mu R_i\Omega \tag{6.204}$$

$$\Rightarrow {}^{(R_i)}\delta=\Omega^{-1}(\frac{1}{2}\text{tr}^{(R_i)}\tilde{\not{\pi}}-\frac{d\Omega}{dh}R_ih) \tag{6.205}$$

由 (6.69) 和 (6.195), 我们有

$$|^{(R_i)}\delta|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{6.206}$$

第七章 高阶变分方程的非齐次项估计

7.1 高阶变分的非齐次波方程. 非齐次项函数的递推公式

命题 7.1 设 ψ 是如下非齐次波方程的一个解:

$$\square_{\tilde{g}}\psi = \rho \tag{7.1}$$

设 Y 是任意一个向量场. 那么

$$\psi' = Y\psi \tag{7.2}$$

满足如下非齐次波方程:

$$\square_{\tilde{g}}\psi' = \rho' \tag{7.3}$$

其中非齐次项 ρ' 与 ρ 有如下关系:

$$\rho' = \tilde{\operatorname{div}}\,{}^{(Y)}\tilde{J} + Y\rho + \frac{1}{2}\tilde{\operatorname{tr}}\,{}^{(Y)}\tilde{\pi}\rho \tag{7.4}$$

这里

$${}^{(Y)}\tilde{J}^{\mu} = \frac{1}{2}((\tilde{g}^{-1})^{\mu\alpha}(\tilde{g}^{-1})^{\nu\beta} + (\tilde{g}^{-1})^{\nu\alpha}(\tilde{g}^{-1})^{\mu\beta} - (\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}(\tilde{g}^{-1})^{\alpha\beta})\,{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\alpha\beta}\partial_{\nu}\psi \tag{7.5}$$

称为与 ψ 和 Y 相关的交换流.

证明 设 f_s 是由 Y 生成的局部单参数变换群. 记 f_{s*} 为相应的拉回. 那么我

们有

$$\Box_{f_{s*}\tilde{g}}(f_{s*}\psi) = f_{s*}(\Box_{\tilde{g}}\psi) = f_{s*}\rho \tag{7.6}$$

现在, 在任意一个局部坐标系中, 我们有

$$\Box_{\tilde{g}}\psi = \frac{1}{\sqrt{-\det\tilde{g}}}\partial_\mu((\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\sqrt{-\det\tilde{g}}\partial_\nu\psi) \tag{7.7}$$

和

$$\Box_{f_{s*}\tilde{g}}(f_{s*}\psi) = \frac{1}{\sqrt{-\det f_{s*}\tilde{g}}}\partial_\mu(((f_{s*}\tilde{g})^{-1})^{\mu\nu}\sqrt{-\det f_{s*}\tilde{g}}\partial_\nu(f_{s*}\psi)) \tag{7.8}$$

对 (7.8) 关于 s 在 $s=0$ 处微分, 由事实

$$(\frac{d}{ds}f_{s*}\tilde{g})_{s=0} = \mathcal{L}_Y\tilde{g} = {}^{(Y)}\tilde{\pi} \tag{7.9}$$

$$(\frac{d}{ds}\sqrt{-\det f_{s*}\tilde{g}})_{s=0} = \frac{1}{2}\sqrt{-\det\tilde{g}}\tilde{\mathrm{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi} \tag{7.10}$$

$$(\frac{d}{ds}((f_{s*}\tilde{g})^{-1})^{\mu\nu})_{s=0} = -(\tilde{g}^{-1})^{\mu\alpha}(\tilde{g}^{-1})^{\nu\beta(Y)}\tilde{\pi}_{\alpha\beta} \tag{7.11}$$

以及

$$(\frac{d}{ds}f_{s*}\psi)_{s=0} = (\frac{d}{ds}\psi\circ f_s)_{s=0} = Y\psi \tag{7.12}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&(\frac{d}{ds}\Box_{f_{s*}\tilde{g}}(f_{s*}\psi))_{s=0}\\
=&-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-\det\tilde{g}}}\tilde{\mathrm{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi}\partial_\mu((\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\sqrt{-\det\tilde{g}}\partial_\nu\psi)\\
&+\frac{1}{\sqrt{-\det\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\det\tilde{g}}(-(\tilde{g}^{-1})^{\mu\alpha}(\tilde{g}^{-1})^{\nu\beta(Y)}\tilde{\pi}_{\alpha\beta}\\
&+\frac{1}{2}(\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\tilde{\mathrm{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi})\partial_\nu\psi + (\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\sqrt{-\det\tilde{g}}\partial_\nu(Y\psi))
\end{aligned} \tag{7.13}$$

另一方面, 由 (7.6), 我们有

$$(\frac{d}{ds}\Box_{f_{s*}\tilde{g}}(f_{s*}\psi))_{s=0} = (\frac{d}{ds}f_{s*}\rho)_{s=0} = (\frac{d}{ds}\rho\circ f_s)_{s=0} = Y\rho \tag{7.14}$$

比较 (7.13) 和 (7.14) 再由 (7.7) 以 $Y\psi$ 代替 ψ, 则定理得证. □

设 X 是任意一个向量场. 在任意一个局部坐标中 X 关于声学度量 g 的散度可以表示为

$$\mathrm{div}X = D_\mu X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-\det g}X^\mu) \tag{7.15}$$

而它关于共形度量 $\tilde{g}$ 的散度可以表示为

$$\tilde{\text{div}}X = \tilde{D}_\mu X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det\tilde{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-\det\tilde{g}}X^\mu) \tag{7.16}$$

由于

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}, \quad \sqrt{-\det\tilde{g}} = \Omega^2\sqrt{-\det g} \tag{7.17}$$

我们有

$$\tilde{D}_\mu X^\mu = \Omega^{-2}D_\mu(\Omega^2 X^\mu) \tag{7.18}$$

把这个运用到向量场 ${}^{(Y)}\tilde{J}$, 我们得到

$$\tilde{\text{div}}^{(Y)}\tilde{J} = \Omega^{-2}\text{div}^{(Y)}J \tag{7.19}$$

其中

$${}^{(Y)}J = \Omega^{2(Y)}\tilde{J} \tag{7.20}$$

在任意一个局部坐标系中有

$${}^{(Y)}J^\mu = \frac{1}{2}((g^{-1})^{\mu\alpha}(g^{-1})^{\nu\beta} + (g^{-1})^{\nu\alpha}(g^{-1})^{\mu\beta} - (g^{-1})^{\mu\nu}(g^{-1})^{\alpha\beta})^{(Y)}\tilde{\pi}_{\alpha\beta}\partial_\nu\psi \tag{7.21}$$

设

$${}^{(Y)}\tilde{\pi}^{\mu\nu} = (g^{-1})^{\mu\alpha}(g^{-1})^{\nu\beta(Y)}\tilde{\pi}_{\alpha\beta} \tag{7.22}$$

我们有

$${}^{(Y)}J^\mu = ({}^{(Y)}\tilde{\pi}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{-1})^{\mu\nu}\text{tr}^{(Y)}\tilde{\pi})\partial_\nu\psi \tag{7.23}$$

我们现在考虑位势函数 ϕ 的 n 阶变分 ψ_n, 其定义是在 ψ_1 作用 $n-1$ 个交换向量场 $Y_i, i = 1,2,3,4,5$ (见第六章). 我们将运用命题 7.1 导出一个关于非齐次项 ρ_n 的递推公式

$$\Box_{\tilde{g}}\psi_n = \rho_n \tag{7.24}$$

首先我们有

$$\rho_1 = 0 \tag{7.25}$$

记 Y 为 $Y_i, i = 1,2,3,4,5$ 的一个向量场, 我们有

$$\psi_n = Y\psi_{n-1} \tag{7.26}$$

对 ψ_{n-1} 和 ψ_n 运用命题 7.1, 我们得到

$$\rho_n = \tilde{\text{div}}^{(Y)}\tilde{J}_{n-1} + Y\rho_{n-1} + \frac{1}{2}\tilde{\text{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi}\rho_{n-1} \tag{7.27}$$

这里

$$^{(Y)}\tilde{J}^{\mu}_{n-1} = \frac{1}{2}((\tilde{g}^{-1})^{\mu\alpha}(\tilde{g}^{-1})^{\nu\beta} + (\tilde{g}^{-1})^{\nu\alpha}(\tilde{g}^{-1})^{\mu\beta} - (\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}(\tilde{g}^{-1})^{\alpha\beta})^{(Y)}\tilde{\pi}_{\alpha\beta}\partial_\nu\psi_{n-1} \tag{7.28}$$

是关于 ψ_{n-1} 和 Y 的交换流. 方程 (7.27) 是关于非齐次项 ρ_n 的递推公式, 但它并不非常适合我们的估计. 所以我们考虑一个重新尺度化的非齐次项:

$$\tilde{\rho}_n = \Omega^2\mu\rho_n \tag{7.29}$$

由直接计算以及 (7.27), (7.28) 和 (7.19)—(7.23), 我们有

$$\tilde{\rho}_n = {}^{(Y)}\sigma_{n-1} + Y\tilde{\rho}_{n-1} + {}^{(Y)}\delta\tilde{\rho}_{n-1} \tag{7.30}$$

这里

$${}^{(Y)}\sigma_{n-1} = \mu\text{div}^{(Y)}J_{n-1} \tag{7.31}$$

$${}^{(Y)}J^{\mu}_{n-1} = ({}^{(Y)}\tilde{\pi}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{-1})^{\mu\nu}\text{tr}^{(Y)}\tilde{\pi})\partial_\nu\psi_{n-1} \tag{7.32}$$

其中 ${}^{(Y)}\delta$ 的定义见第六章:

$${}^{(Y)}\delta = \frac{1}{2}\tilde{\text{tr}}^{(Y)}\tilde{\pi} - \mu^{-1}Y\mu - 2\Omega^{-1}Y\Omega \tag{7.33}$$

由 (7.25),

$$\tilde{\rho}_1 = 0 \tag{7.34}$$

7.2 $\tilde{\rho}_n$ 中的第一项

由于 ψ_n 是 (7.24) 的解, 如果我们可以估计

$$\int_{W_u^t} Q_{0,0,n}d\mu_g = -\int_{W_u^t}\Omega^2\rho_n K_0\psi_n d\mu_g = -\int_{W_u^t}\tilde{\rho}_n(K_0\psi_n)dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.35}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t} Q_{1,0,n} d\mu_g &= -\int_{W_u^t} \Omega^2 \rho_n (K_1 \psi_n + \omega \psi_n) d\mu_g \\ &= -\int_{W_u^t} \tilde{\rho}_n (K_1 \psi_n + \omega \psi_n) dt' du' d\mu_{\not{g}}\end{aligned} \tag{7.36}$$

则我们可以对 ψ_n 运用定理 5.1. 我们运用了如下事实:

$$d\mu_g = \mu dt du d\mu_{\not{g}} \tag{7.37}$$

首先我们考虑 ${}^{(Y)}\sigma_{n-1}$ 在 $\tilde{\rho}_n$ 中的贡献.

设 V 是定义在时空区域 W_{ϵ_0} 的任意一个向量场. 做分解:

$$V = V^L L + V^{\underline{L}} \underline{L} + \not{V} \tag{7.38}$$

其中 $\not{V} = \Pi V = V^A X_A$ 与 $S_{t,u}$ 相切. 我们有

$$\begin{aligned} V^L &= -\frac{1}{2\mu} g(V, \underline{L}) \\ V^{\underline{L}} &= -\frac{1}{2\mu} g(V, L) \\ V^A &= (\not{g}^{-1})^{AB} g(V, X_B) \end{aligned} \tag{7.39}$$

那么 V 的散度为

$$\mathrm{div} V = (D_L V)^L + (D_{\underline{L}} V)^{\underline{L}} + (D_{X_A} V)^A \tag{7.40}$$

在 (7.39) 中把 V 替换为 $D_L V, D_{\underline{L}} V, D_{X_A} V$, 我们得到

$$\begin{aligned} (D_L V)^L &= -\frac{1}{2\mu} g(D_L V, \underline{L}) \\ (D_{\underline{L}} V)^{\underline{L}} &= -\frac{1}{2\mu} g(D_{\underline{L}} V, L) \\ (D_{X_A} V)^A &= (\not{g}^{-1})^{AB} g(D_{X_A} V, X_B) \end{aligned} \tag{7.41}$$

代入 (7.38), 我们得到

$$\begin{aligned} g(D_{X_A} V, X_B) &= V^L g(D_{X_A} L, X_B) + V^{\underline{L}} g(D_{X_A} \underline{L}, X_B) + g(D_{X_A} \not{V}, X_B) \\ &= \chi_{AB} V^L + \underline{\chi}_{AB} V^{\underline{L}} + \not{g}(\not{D}_{X_A} \not{V}, X_B) \end{aligned} \tag{7.42}$$

从而

$$(D_{X_A}V)^A = \mathrm{tr}\chi V^L + \mathrm{tr}\underline{\chi} V^{\underline{L}} + \mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\not{V} \tag{7.43}$$

所以我们得到

$$\mathrm{div}V = -\frac{1}{2\mu}(g(D_L V, \underline{L}) + g(D_{\underline{L}}V, L)) + \mathrm{tr}\chi V^L + \mathrm{tr}\underline{\chi} V^{\underline{L}} + \mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\not{V} \tag{7.44}$$

我们可以把右端第一项用如下这些项表示:

$$V_L = g(V, L), \quad V_{\underline{L}} = g(V, \underline{L}) \tag{7.45}$$

由 (3.130)—(3.137),

$$\begin{aligned} g(D_L V, \underline{L}) &= L(g(V, \underline{L})) - g(V, D_L \underline{L}) \\ &= L(V_{\underline{L}}) + g(V, 2\zeta^A X_A) = L(V_{\underline{L}}) + 2\zeta_A V^A \end{aligned} \tag{7.46}$$

$$\begin{aligned} g(D_{\underline{L}} V, L) &= \underline{L}(g(V, L)) - g(V, D_{\underline{L}} L) \\ &= \underline{L}(V_L) - g(V, -L(\eta^{-1}\kappa)L + 2\eta^A X_A) \\ &= \underline{L}(V_L) + L(\eta^{-1}\kappa)V_L - 2\eta_A V^A \end{aligned} \tag{7.47}$$

代入如下方程:

$$\eta_A - \zeta_A = \not{d}_A \mu \tag{7.48}$$

我们有

$$-2\mu \mathrm{div}V = L(V_{\underline{L}}) + \underline{L}(V_L) - 2\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}(\mu \not{V}) + L(\eta^{-1}\kappa)V_L + \mathrm{tr}\chi V_{\underline{L}} + \mathrm{tr}\underline{\chi} V_L \tag{7.49}$$

我们将把如上公式运用到由 (7.32) 给出的 ${}^{(Y)}J_{n-1}$. 由条件

$$g(\tilde{Z}, V) = {}^{(Y)}\tilde{\pi}(L, \Pi V), \quad g(\tilde{\underline{Z}}, V) = {}^{(Y)}\tilde{\pi}(\underline{L}, \Pi V) \tag{7.50}$$

其中 $V \in TW_{\epsilon_0}$, 我们引入与 Y 相关的与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 ${}^{(Y)}\tilde{Z}$ 和 ${}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}$, 在类声标架下我们有

$${}^{(Y)}\tilde{Z} = {}^{(Y)}\tilde{Z}^A X_A, {}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}} = {}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}^A X_A \tag{7.51}$$

其中

$${}^{(Y)}\tilde{Z}^A = {}^{(Y)}\tilde{\pi}_{LB}(\not{g}^{-1})^{AB}, \quad {}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}^A = {}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}B}(\not{g}^{-1})^{AB} \tag{7.52}$$

注意到分别与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 ${}^{(Y)}\tilde{Z}$ 和 ${}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}$ 关于 $\not{g}$ 相对应的 1- 形式 ${}^{(Y)}\not{\pi}_L$ 和 ${}^{(Y)}\not{\pi}_{\underline{L}}$. 考虑到这个定义以及如下事实:

$$\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\pi} = -\frac{1}{\mu}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}} + \mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}} \tag{7.53}$$

我们得到了如下 ${}^{(Y)}J_{n-1}$ 的分量:

$$ {}^{(Y)}J_{n-1,L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}(L\psi_{n-1}) + {}^{(Y)}\tilde{Z}\cdot \not{d}\psi_{n-1} \tag{7.54}$$

$$ {}^{(Y)}J_{n-1,\underline{L}} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}(\underline{L}\psi_{n-1}) + {}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}\cdot \not{d}\psi_{n-1} - \frac{1}{2\mu}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}(L\psi_{n-1}) \tag{7.55}$$

$$\begin{aligned}\mu^{(Y)}\not{J}^A_{n-1} = & -\frac{1}{2}{}^{(Y)}\tilde{Z}^A(\underline{L}\psi_{n-1}) - \frac{1}{2}{}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}^A(L\psi_{n-1}) \\ & + \frac{1}{2}({}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}} - \mu\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}})\not{d}^A\psi_{n-1} + \mu^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}^A_B\not{d}^B\psi_{n-1}\end{aligned} \tag{7.56}$$

我们注意到在 ${}^{(Y)}J_{n-1,L}, {}^{(Y)}J_{n-1,\underline{L}}$ 的表达式中没有 $\frac{1}{\mu}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}$, 尽管这一项出现在了 (7.53) 中. 这是因为二维 Riemann 流形 (M,g) 上的算子 Δ_g 是共形不变的. 在这里的二维 Riemann 流形是由 L 和 $\underline{L}$ 张成的类时分布. 这个分布是不可积的, 障碍如下:

$$\Pi[L,\underline{L}] = 2\Lambda, \quad \Lambda = -(\not{g}^{-1})^{AB}(\zeta_B + \eta_B)X_A \tag{7.57}$$

然而共形不变性仍然可以由如下事实反映出来: ${}^{(Y)}J_{n-1}$ 在由 L, $\underline{L}$ 张成的平面上的限制只依赖于 $\tilde{\pi}$ 相对于这个平面的无迹部分, 从而不依赖于 $\tilde{\pi}_{L\underline{L}}$. 类似地, 我们可以看出 ${}^{(Y)}\not{J}^A_{n-1}$ 不依赖于 $\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}$.

对 ${}^{(Y)}J_{n-1}$ 运用 (7.49), 我们得到

$$\begin{aligned}{}^{(Y)}\sigma_{n-1} = & -\frac{1}{2}L({}^{(Y)}J_{n-1,\underline{L}}) - \frac{1}{2}\underline{L}({}^{(Y)}J_{n-1,L}) + \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(\mu^{(Y)}\not{J}_{n-1}) \\ & -\frac{1}{2}L(\eta^{-1}\kappa)^{(Y)}J_{n-1,L} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi^{(Y)}J_{n-1,\underline{L}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\underline{\chi}^{(Y)}J_{n-1,L}\end{aligned} \tag{7.58}$$

(7.58) 的右端含有主部, 关于 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的分量和 ψ_{n-1} 的导数的乘积的导数, 而第二行则是低阶项, 它含有类声标架的联络系数以及 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的分量和 ψ_{n-1} 的导数. 分解:

$${}^{(Y)}\sigma_{n-1} = {}^{(Y)}\sigma_{1,n-1} + {}^{(Y)}\sigma_{2,n-1} + {}^{(Y)}\sigma_{3,n-1} \tag{7.59}$$

其中 ${}^{(Y)}\sigma_{1,n-1}$ 含有 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的分量与 ψ_{n-1} 的二阶导数的乘积, ${}^{(Y)}\sigma_{2,n-1}$ 含有 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的一阶导数与 ψ_{n-1} 的一阶导数的乘积, 而 ${}^{(Y)}\sigma_{3,n-1}$ 则是低阶项.

现在, 由 (7.54)—(7.56), (7.58) 右端的前两项包含 $L({}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}} \cdot \not{d}\psi_{n-1})$ 和 $\underline{L}({}^{(Y)}\tilde{Z} \cdot \not{d}\psi_{n-1})$. 为了把这些项分解成如上三部分, 我们需要如下引理.

引理 7.1 设 V 是定义在时空区域 $W^*_{\epsilon_0}$ 上的与 $S_{t,u}$ 相切的向量场. 设 f 是定义在 $W^*_{\epsilon_0}$ 上的函数. 则我们有

$$L(V \cdot \not{d}f) = V \cdot \not{d}Lf + \not{\mathcal{L}}_L V \cdot \not{d}f$$
$$\underline{L}(V \cdot \not{d}f) = V \cdot \not{d}\underline{L}f + \not{\mathcal{L}}_{\underline{L}} V \cdot \not{d}f - (V \cdot \not{d}(\eta^{-1}\kappa))Lf$$

这里我们记

$$\not{\mathcal{L}}_L V = \Pi\mathcal{L}_L V = \Pi[L, V], \quad \not{\mathcal{L}}_{\underline{L}} V = \Pi\mathcal{L}_{\underline{L}} V = \Pi[\underline{L}, V] \tag{7.60}$$

证明 由于 V 与 $S_{t,u}$ 相切, 我们有

$$V \cdot \not{d}f = V \cdot df \tag{7.61}$$

所以

$$\begin{aligned} L(V \cdot \not{d}f) = L(V \cdot df) = \mathcal{L}_L V \cdot df + V \cdot dLf = \mathcal{L}_L V \cdot df + V \cdot \not{d}Lf \\ \underline{L}(V \cdot \not{d}f) = \underline{L}(V \cdot df) = \mathcal{L}_{\underline{L}} V \cdot df + V \cdot d\underline{L}f = \mathcal{L}_{\underline{L}} V \cdot df + V \cdot \not{d}\underline{L}f \end{aligned} \tag{7.62}$$

由于

$$Lt = 1, \quad Lu = 0$$

和

$$S_{t,u} = \Sigma_t \bigcap C_u \tag{7.63}$$

以及 V 与 $S_{t,u}$ 相切, 所以

$$V(u) = V(t) = 0 \tag{7.64}$$

从而

$$(\mathcal{L}_L V)(t) = L(Vt) - V(Lt) = 0$$
$$(\mathcal{L}_L V)(u) = L(Vu) - V(Lu) = 0$$

所以我们有

$$\mathcal{L}_L V = \not{\mathcal{L}}_L V \tag{7.65}$$

关于

$$\mathcal{L}_{\underline{L}} V \tag{7.66}$$

我们运用如下事实:

$$\underline{L} = \eta^{-1}\kappa L + 2T \tag{7.67}$$

从而我们有

$$\mathcal{L}_{\underline{L}} V = (\eta^{-1}\kappa)\mathcal{L}_L V + 2\mathcal{L}_T V - (V \cdot \not{d}(\eta^{-1}\kappa))L \tag{7.68}$$

用与推导 (7.65) 相类似的方法, 我们可以看到

$$\mathcal{L}_T V = \not{\mathcal{L}}_T V \tag{7.69}$$

所以

$$\not{\mathcal{L}}_{\underline{L}} V = (\eta^{-1}\kappa)\not{\mathcal{L}}_L V + 2\not{\mathcal{L}}_T V \tag{7.70}$$

因此我们得到

$$\mathcal{L}_{\underline{L}} V = \not{\mathcal{L}}_{\underline{L}} V - (V(\eta^{-1}\kappa))L \tag{7.71}$$

由 (7.62), (7.65) 和 (7.71), 引理得证. □

将引理 7.1 运用到 $V = {}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}, f = \psi_{n-1}$, 我们得到

$$L({}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}} \cdot \not{d}\psi_{n-1}) = {}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}} \cdot \not{d}L\psi_{n-1} + \not{\mathcal{L}}_L {}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}} \cdot \not{d}\psi_{n-1} \tag{7.72}$$

而将引理 7.1 运用到 $V = {}^{(Y)}\tilde{Z}, f = \psi_{n-1}$ 则有

$$\underline{L}({}^{(Y)}\tilde{Z} \cdot \not{d}\psi_{n-1}) = {}^{(Y)}\tilde{Z} \cdot \not{d}\underline{L}\psi_{n-1} + \not{\mathcal{L}}_{\underline{L}} {}^{(Y)}\tilde{Z} \cdot \not{d}\psi_{n-1} - {}^{(Y)}\tilde{Z} \cdot \not{d}(\eta^{-1}\kappa)L\psi_{n-1} \tag{7.73}$$

代入 (7.54)—(7.56), 我们得到了如下关于分解 (7.59) 的表达式:

$$\begin{aligned}
{}^{(Y)}\sigma_{1,n-1} = & \frac{1}{2}\mathrm{tr}{}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}(L\underline{L}\psi_{n-1} + \nu\underline{L}\psi_{n-1}) \\
& + \frac{1}{4}(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})L^2\psi_{n-1} \\
& - {}^{(Y)}\tilde{Z} \cdot \not{d}\underline{L}\psi_{n-1} - {}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}} \cdot \not{d}L\psi_{n-1} \\
& + \frac{1}{2}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}\not{\Delta}\psi_{n-1} + \mu{}^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}} \cdot \not{D}^2\psi_{n-1}
\end{aligned} \tag{7.74}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(Y)}\sigma_{2,n-1} = & \frac{1}{4}L(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi})\underline{L}\psi_{n-1} + \frac{1}{4}\underline{L}(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi})L\psi_{n-1} \\
& + \frac{1}{4}L(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})L\psi_{n-1} \\
& - \frac{1}{2}\not{\mathcal{L}}_L{}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}\cdot \not{d}\psi_{n-1} - \frac{1}{2}\not{\mathcal{L}}_{\underline{L}}{}^{(Y)}\tilde{Z}\cdot \not{d}\psi_{n-1} \\
& - \frac{1}{2}\not{\mathrm{div}}^{(Y)}\tilde{Z}\underline{L}\psi_{n-1} - \frac{1}{2}\not{\mathrm{div}}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}L\psi_{n-1} \\
& + \frac{1}{2}\not{d}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}\cdot \not{d}\psi_{n-1} + \not{\mathrm{div}}(\mu^{(Y)}\hat{\tilde{\not\pi}})\cdot \not{d}\psi_{n-1}
\end{aligned} \tag{7.75}
$$

和

$$
{}^{(Y)}\sigma_{3,n-1} = {}^{(Y)}\sigma^L_{3,n-1}L\psi_{n-1} + {}^{(Y)}\sigma^{\underline{L}}_{3,n-1}\underline{L}\psi_{n-1} + {}^{(Y)}\not\sigma_{3,n-1}\cdot \not{d}\psi_{n-1} \tag{7.76}
$$

其中

$$
{}^{(Y)}\sigma^L_{3,n-1} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\underline{\chi}\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi} + \frac{1}{4}\mathrm{tr}\chi(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}) + \frac{1}{2}{}^{(Y)}\tilde{Z}\cdot \not{d}(\eta^{-1}\kappa) \tag{7.77}
$$

$$
{}^{(Y)}\sigma^{\underline{L}}_{3,n-1} = -\frac{1}{4}(L\log\Omega)\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi} \tag{7.78}
$$

$$
{}^{(Y)}\not\sigma_{3,n-1} = -\frac{1}{2}(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi})\Lambda - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\underline{\chi} + L(\eta^{-1}\kappa))^{(Y)}\tilde{Z} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi^{(Y)}\underline{\tilde{Z}} \tag{7.79}
$$

注意到我们将 $\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi}\nu\underline{L}\psi_{n-1}$ 合并到 (7.74) 右端的第一项. 这一项来自于 (7.55) 右端第一项对 (7.58) 第二行第二项的贡献 $\frac{1}{4}\mathrm{tr}\chi\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi}\underline{L}\psi_{n-1}$. 这就在 (7.76) 中 $\underline{L}\psi_{n-1}$ 的系数 (7.78) 中留下了一个余项.

7.3 $\tilde{\rho}_n$ 中第一项对误差积分贡献的估计

我们首先估计 ${}^{(Y)}\sigma_{n-1}$ 中 ${}^{(Y)}\sigma_{1,n-1}$ 对误差积分 (7.35), (7.36) 的贡献. 我们将运用如下假设:

G0: 存在一个不依赖于 s 的正常数 C 使得在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中, 对所有五个交换向量场 Y, 我们有

$$
{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{LL} = 0 \tag{7.80}
$$

$$
\mu^{-1}|{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}| \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{7.81}
$$

$$
|{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}| \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{7.82}
$$

$$
|{}^{(Y)}\tilde{\not\pi}_L| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.83}
$$

$$
|{}^{(Y)}\tilde{\not\pi}_{\underline{L}}| \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{7.84}
$$

$$|{}^{(Y)}\hat{\tilde{\not\pi}}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.85}$$

$$|{}^{(Y)}\mathrm{tr}\tilde{\not\pi}| \leqslant C \tag{7.86}$$

这些假设都是由第六章的结果得来的.

我们也将运用关于旋转向量场 $\{R_i : i=1,2,3\}$ 的假设.

H0: 存在不依赖于 s 的正常数 C 使得对任意 $S_{t,u}$ 上的可微函数 f, 我们有

$$|\not{d}f|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i (R_i f)^2 \tag{7.87}$$

H1: 存在不依赖于 s 的正常数 C 使得对任意 $S_{t,u}$ 的 1- 形式 ξ, 我们有

$$|\not{D}\xi|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi|^2 \tag{7.88}$$

特别地, 取 $\xi = \not{d}f$, 其中 f 是 $S_{t,u}$ 上的任意一个二次可微的函数, 我们有

$$|\not{D}^2 f|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i |\not{d}R_i f|^2 \tag{7.89}$$

H2: 存在不依赖于 s 的正常数 C 使得对 $S_{t,u}$ 上任意迹为 0 的对称二阶协变张量 ϑ, 我们有

$$|\not{D}\vartheta|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta|^2 \tag{7.90}$$

与第五章中相类似, 我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^u_{0,n}(t) &= \sum \int_{\Sigma^u_t} \frac{\Omega}{2}(\eta^{-1}\kappa(1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_n)^2 \\
&\quad + (\underline{L}\psi_n)^2 + (1+2\eta^{-1}\kappa)\mu|\not{d}\psi_n|^2) d\mu_{\not{g}} du' \\
\mathcal{F}^t_{0,n}(u) &= \sum \int_{C^t_u} \Omega((1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_n)^2 + \mu|\not{d}\psi_n|^2) d\mu_{\not{g}} dt' \\
\mathcal{E}'^u_{1,n}(t) &= \sum \int_{\Sigma^u_t} \frac{\Omega}{2}\omega\nu^{-1}(\eta^{-1}\kappa(L\psi_n+\nu\psi_n)^2 + \mu|\not{d}\psi_n|^2) d\mu_{\not{g}} du' \\
\mathcal{F}'^t_{1,n}(u) &= \sum \int_{C^t_u} \Omega\omega\nu^{-1}(L\psi_n+\nu\psi_n)^2 d\mu_{\not{g}} dt'
\end{aligned}$$

上面每个式子中的和是 Y 遍历集合 $\{Y_i : i=1,2,3,4,5\}$ 时形如 (7.26) 的 ψ_n 的集

合上的和. 如第五章我们有

$$
\begin{aligned}
&C^{-1}\mathcal{E}^u_{0,n}(t)\\
\leqslant&\sum\int_0^u\left(\int_{S_{t,u'}}(\mu(1+\mu)((L\psi_n)^2+|\not{d}\psi_n|^2)+(\underline{L}\psi_n)^2)d\mu_{\not{g}}\right)du'\leqslant C\mathcal{E}^u_{0,n}(t)
\end{aligned}
\tag{7.91}
$$

$$
\begin{aligned}
&C^{-1}\mathcal{F}^t_{0,n}(u)\\
\leqslant&\sum\int_0^t\left(\int_{S_{t',u}}((1+\mu)(L\psi_n)^2+\mu|\not{d}\psi_n|^2)d\mu_{\not{g}}\right)dt'\leqslant C\mathcal{F}^t_{0,n}(u)
\end{aligned}
\tag{7.92}
$$

$$
\begin{aligned}
&C^{-1}\mathcal{E}'^u_{1,n}(t)\\
\leqslant&(1+t)^2\sum\int_0^u\left(\int_{S_{t,u'}}\mu((L\psi_n+\nu\psi_n)^2+|\not{d}\psi_n|^2)d\mu_{\not{g}}\right)du'\leqslant C\mathcal{E}'^u_{1,n}(t)
\end{aligned}
\tag{7.93}
$$

$$
\begin{aligned}
&C^{-1}\mathcal{F}'^t_{1,n}(u)\\
\leqslant&\sum\int_0^t(1+t')^2\left(\int_{S_{t',u}}(L\psi_n+\nu\psi_n)^2d\mu_{\not{g}}\right)dt'\leqslant C\mathcal{F}'^t_{1,n}(u)
\end{aligned}
\tag{7.94}
$$

同样, 求和与上面有着相同的意义. 如第五章我们可以定义如下在任意 u 关于 t 非减的量:

$$\bar{\mathcal{E}}^u_{0,n}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}\mathcal{E}^u_{0,n}(t') \tag{7.95}$$

$$\mathcal{F}^t_{0,n}(u) \tag{7.96}$$

$$\bar{\mathcal{E}}'^u_{1,n}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}(1+\log(1+t'))^{-4}\mathcal{E}'^u_{1,n}(t') \tag{7.97}$$

$$\bar{\mathcal{F}}'^t_{1,n}(u)=\sup_{t'\in[0,t]}(1+\log(1+t'))^{-4}\mathcal{F}'^{t'}_{1,n}(u) \tag{7.98}$$

显然在固定的 t, $\bar{\mathcal{E}}^u_{0,n}(t)$, $\bar{\mathcal{E}}'^u_{1,n}(t)$ 同样是关于 u 的非减函数.

${}^{(Y)}\sigma_{n-1}$ 对 (7.35) 和 (7.36) 的贡献分别是

$$-\int_{W^t_u}(K_0\psi_n)^{(Y)}\sigma_{n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.99}$$

和

$$-\int_{W^t_u}(K_1\psi_n+\omega\psi_n)^{(Y)}\sigma_{n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.100}$$

我们考虑来自 ${}^{(Y)}\sigma_{1,n-1}$ 的贡献, 我们首先考虑 (7.99). 我们首先考虑 (7.74) 右端第一项:

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}(L\underline{L}\psi_{n-1}+\nu\underline{L}\psi_{n-1}) \tag{7.101}$$

$\underline{L}$ 可以用交换向量场如下表示:

$$\underline{L} = \eta^{-1}\kappa(1+t)^{-1}Q + 2T \tag{7.102}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(L\underline{L}\psi_{n-1} + \nu\underline{L}\psi_{n-1}) \\
&= (LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1}) + \frac{1}{2}\eta^{-1}\kappa(1+t)^{-1}(LQ\psi_{n-1} + \nu Q\psi_{n-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+t)^{-1}(L(\eta^{-1}\kappa) - (1+t)^{-1}\eta^{-1}\kappa)Q\psi_{n-1}
\end{aligned} \tag{7.103}$$

这里我们估计主部, 即 (7.103) 右端第一项的贡献. 因为由 $(1+t)^{-1}$ 的衰减, 其他两项更容易估计一些.

所以我们首先估计

$$-\int_{W_u^t}(K_0\psi_n)\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}(LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.104}$$

由 **G0** 的最后一式, 这一项的绝对值被 $C(M^L + M^{\underline{L}})$ 界定, 其中

$$M^L = \int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n||LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1}|dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.105}$$

$$M^{\underline{L}} = \int_{W_u^t}|\underline{L}\psi_n||LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1}|dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.106}$$

由于 T 是一个交换向量场, 由 (7.94) 和 (7.98), 对任意的 $u \in [0, \epsilon_0]$, 我们有

$$\int_{C_u^t}(1+t')^2(LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2 d\mu_{\not{g}}dt' \leqslant C\bar{\mathcal{F}}'^t_{1,n}(u)(1+\log(1+t))^4 \tag{7.107}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_{W_u^t}(1+t')^2(LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2 d\mu_{\not{g}}dt'du' \\
&\leqslant C\int_0^u \bar{\mathcal{F}}'^t_{1,n}(u')du'(1+\log(1+t))^4
\end{aligned} \tag{7.108}$$

我们有

$$M^{\underline{L}} \leqslant \int_0^t ((1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_0^u(t'))^{1/2}((1+t')^{3/2}\int_{\Sigma_{t'}^u}(LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2)^{1/2}dt' \tag{7.109}$$

定义

$$F(t,u) := \int_0^t (1+t')^2 (\int_{\Sigma_{t'}^u} (LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2) dt' \tag{7.110}$$

所以

$$F(t,u) \leqslant C \int_0^u \bar{\mathcal{F}}_{1,n}^{\prime t}(u') du' (1 + \log(1+t))^4 \tag{7.111}$$

从而

$$\frac{dF}{dt}(t,u) = (1+t)^2 \int_{\Sigma_t^u} (LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2 \tag{7.112}$$

我们需要估计的是

$$I(t) := \int_0^t (1+t')^{3/2} (\int_{\Sigma_t^u} (LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2) dt' \tag{7.113}$$

我们有

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t (1+t')^{-1/2} \frac{dF}{dt'}(t') dt' \\ &= (1+t)^{-1/2} F(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (1+t')^{-3/2} F(t') dt' \end{aligned} \tag{7.114}$$

代入 (7.111), 我们有

$$I(t) \leqslant C \int_0^u \bar{\mathcal{F}}_{1,n}^{\prime t}(u') du' (1+t)^{-1/2} (1 + \log(1+t))^4 \leqslant C' \int_0^u \bar{\mathcal{F}}_{1,n}^{\prime t}(u') du' \tag{7.115}$$

所以

$$M^{\underline{L}} \leqslant C (\int_0^u \bar{\mathcal{F}}_{1,n}^{\prime t}(u') du')^{1/2} (\int_0^t (1+t')^{-3/2} \mathcal{E}_{0,n}^u(t') dt')^{1/2} \tag{7.116}$$

我们转向由 (7.105) 给出的 M^L:

$$\begin{aligned} M^L \leqslant & (\int_{W_u^t} \Omega (1 + \eta^{-1}\kappa) (L\psi_n)^2 dt' du' d\mu_{\not{g}})^{1/2} \\ & \cdot (\int_{W_u^t} \Omega^{-1} (1 + \eta^{-1}\kappa) (LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2 dt' du' d\mu_{\not{g}})^{1/2} \\ \leqslant & C (\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u') du')^{1/2} \\ & \cdot (\int_{W_u^t} (1 + \log(1+t')) (LT\psi_{n-1} + \nu T\psi_{n-1})^2 dt' du' d\mu_{\not{g}})^{1/2} \end{aligned} \tag{7.117}$$

其中我们用到了假设 **A**. 我们可以像估计 $M^{\underline{L}}$ 那样估计积分中的最后一个因子:

$$\int_{W_u^t}(1+\log(1+t'))(LT\psi_{n-1}+\nu T\psi_{n-1})^2 dt'du'd\mu_{\not g}\leqslant C\int_0^u \bar{\mathcal{F}}'^t_{1,n}(u')du' \tag{7.118}$$

所以我们得到

$$M^L\leqslant C(\int_0^u \mathcal{F}^t_{0,n}(u')du')^{1/2}(\int_0^u \bar{\mathcal{F}}'^t_{1,n}(u')du')^{1/2} \tag{7.119}$$

这就完成了 (7.104) 的估计.

我们接下来估计 (7.74) 右端第二项对 (7.99) 的贡献:

$$(1/4)(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{LL}})L^2\psi_{n-1} \tag{7.120}$$

由

$$L^2\psi_{n-1}=L((1+t)^{-1}Q\psi_{n-1})=(1+t)^{-1}LQ\psi_{n-1}-(1+t)^{-2}Q\psi_{n-1} \tag{7.121}$$

我们需要估计的是

$$\begin{aligned}&-(1/4)\int_{W_u^t}(K_0\psi_n)(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{LL}})(1+t')^{-1}(LQ\psi_{n-1})dt'du'd\mu_{\not g}\\&+(1/4)\int_{W_u^t}(K_0\psi_n)(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{LL}})(1+t')^{-2}(Q\psi_{n-1})dt'du'd\mu_{\not g}\end{aligned} \tag{7.122}$$

由 (7.81), 第一个积分的绝对值由

$$C(I_1^{\underline{L}}+I_1^L) \tag{7.123}$$

界定, 其中

$$I_1^{\underline{L}}=\int_{W_u^t}(1+t')^{-1}|\underline{L}\psi_n|(1+\log(1+t'))|LQ\psi_{n-1}|dt'du'd\mu_{\not g} \tag{7.124}$$

$$I_1^L=\int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))|LQ\psi_{n-1}|dt'du'd\mu_{\not g} \tag{7.125}$$

我们有

$$\begin{aligned}I_1^{\underline{L}}&\leqslant C(\int_{W_u^t}(\underline{L}\psi_n)^2(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}\\&\cdot(\int_{W_u^t}(LQ\psi_{n-1})^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}\\&\leqslant C(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t')dt')^{1/2}(\int_0^u \mathcal{F}^t_{0,n}(u')du')^{1/2}\end{aligned} \tag{7.126}$$

和

$$I_1^L \leqslant C \int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du' \tag{7.127}$$

其中我们用到了如下事实, 对任意的 $t \geqslant 0, (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 是有界的.

同样由 (7.81), (7.122) 的第二个积分被

$$\begin{aligned}
&C\int_{W_u^t} |\underline{L}\psi_n||Q\psi_{n-1}|(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not g} \\
&+C\int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n||Q\psi_{n-1}|(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not g} \\
\leqslant\ & C(\int_{W_u^t} (\underline{L}\psi_n)^2(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2} \\
&\cdot(\int_{W_u^t} (Q\psi_{n-1})^2(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2} \\
&+C(\int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_n)^2dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2} \\
&\cdot(\int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)(Q\psi_{n-1})^2(1+t')^{-4}(1+\log(1+t'))^2dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2} \\
\leqslant\ & C(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt')^{1/2} \\
&\cdot(\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt')^{1/2} \\
&+C(\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2} \\
&\cdot(\epsilon_0^2\int_0^t (1+t')^{-4}(1+\log(1+t'))^3\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt')^{1/2}
\end{aligned} \tag{7.128}$$

界定. 这里我们对 ψ_n 运用了定理 5.1, 即

$$\int_{S_{t,u}} \sum \psi_n^2 d\mu_{\not g} \leqslant C\epsilon_0\mathcal{E}_{0,n}^u(t) \tag{7.129}$$

上述关于如 (7.26) 的 ψ_n 的求和也是让 Y 遍历集合 $\{Y_i : i = 1,2,3,4,5\}$.

接下来我们估计 (7.74) 右端第三项和第四项对积分 (7.99) 的贡献:

$$-{}^{(Y)}\tilde{Z}\cdot \not d\underline{L}\psi_{n-1} - {}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}\cdot \not dL\psi_{n-1} \tag{7.130}$$

把 $\underline{L}$ 和 L 用交换向量场 T 和 Q 表示出来:

$$\underline{L} = \eta^{-1}\kappa(1+t)^{-1}Q + 2T, \quad L = (1+t)^{-1}Q \tag{7.131}$$

(7.130) 有如下形式:

$$-2^{(Y)}\tilde{Z}\cdot \not{d}T\psi_{n-1}-(1+t)^{-1}(\eta^{-1}\kappa^{(Y)}\tilde{Z}+{}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}})\cdot \not{d}Q\psi_{n-1}$$
$$-(1+t)^{-1(Y)}\tilde{Z}\cdot \not{d}(\eta^{-1}\kappa)Q\psi_{n-1} \tag{7.132}$$

最后一项是低阶项, 它的贡献很容易估计.

由 (7.83), (7.84) 以及注意到 $T\psi_{n-1}, Q\psi_{n-1}$ 也在 ψ_n 中, (7.132) 对 (7.99) 的贡献可以被

$$\int_{W_u^t}|\underline{L}\psi_n||\not{d}\psi_n|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not{g}}$$
$$+\int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n||\not{d}\psi_n|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.133}$$

界定. 这里第一项积分可以被

$$(\int_{W_u^t}(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\underline{L}\psi_n)^2dt'du'd\mu_{\not{g}})^{1/2}(\int_{W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not{g}})^{1/2} \tag{7.134}$$

界定. (7.134) 中第一个因子的积分被

$$C\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt' \tag{7.135}$$

界定. 而第二个因子的积分可以分解为

$$\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not{g}}+\int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.136}$$

其中 $\mathcal{U}$ 的定义见第五章:

$$\mathcal{U}=\{x\in W_{\epsilon_0}^*:\mu<1/4\} \tag{7.137}$$

由于在 $\mathcal{U}^c$ 中有 $4\mu\geqslant 1$, 所以

$$\int_{\mathcal{U}^c\bigcap W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not{g}}\leqslant 4\int_{W_u^t}\mu|\not{d}\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not{g}}\leqslant C\int_0^u\mathcal{F}_{0,n}^t(u')du' \tag{7.138}$$

我们运用时空积分 $K_n(t,u)$ (定义见 (5.195), 把 ψ 替换成了 ψ_n) 来估计在 $\mathcal{U}\bigcap W_u^t$ 上的积分:

$$K_n(t,u)=-\int_{W_u^t}\frac{\Omega}{2}\omega\nu^{-1}\mu^{-1}(L\mu)_-|\not{d}\psi_n|^2d\mu_{\not{g}} \tag{7.139}$$

由 **C3**, **B1**, **D1**, 我们有

$$K_n(t,u) \geqslant \frac{1}{C}\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}(1+t')(1+\log(1+t'))^{-1}|\not{d}\psi_n|^2 dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.140}$$

回忆定义

$$\bar{K_n}(t,u) = \sup_{t'\in[0,t]}(1+\log(1+t'))^{-4}K_n(t',u) \tag{7.141}$$

然后注意到对 $t'\in[t_{m-1},t_m]$ 有

$$(1+t')^{-1}(1+\log(1+t')) \leqslant 2(1+t_m)^{-1}(1+\log(1+t_m)) \tag{7.142}$$

所以我们得到

$$\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^{t_{m-1},t_m}}|\not{d}\psi_n|^2 dt'du'd\mu_{\not{g}} \leqslant CA'_m\bar{K_n}(t_m,u) \tag{7.143}$$

其中

$$A'_m = (1+t_m)^{-1}(1+\log(1+t_m))^5 = (1+2^{m+r})^{-1}(1+\log(1+2^{m+r}))^5 \tag{7.144}$$

所以由 $\sum_{m=0}^{\infty}A'_m$ 收敛, 以及 $\bar{K_n}(t,u)$ 是 t 的非减函数, 我们得到

$$\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2 dt'du'd\mu_{\not{g}} = \sum_{m=0}^{N}\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^{t_{m-1},t_m}}|\not{d}\psi_n|^2 dt'du'd\mu_{\not{g}} \leqslant C\bar{K_n}(t,u) \tag{7.145}$$

结合 (7.138), 我们得到

$$\int_{W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2 dt'du'd\mu_{\not{g}} \leqslant \bar{K_n}(t,u) + \int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du' \tag{7.146}$$

所以 (7.133) 中第一个积分的绝对值被

$$C(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt')^{1/2}(\bar{K_n}(t,u)+\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2} \tag{7.147}$$

界定. 同样由 (7.92) 以及 (7.146), (7.133) 中第二个积分的绝对值被

$$\begin{aligned}&(\int_{W_u^t}(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(1+\alpha^{-1}\kappa)^2(L\psi_n)^2 dt'du'd\mu_{\not{g}})^{1/2}\\&\cdot(\int_{W_u^t}|\not{d}\psi_n|^2 dt'du'd\mu_{\not{g}})^{1/2}\\&\leqslant C(\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2}(\bar{K_n}(t,u)+\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2}\end{aligned} \tag{7.148}$$

界定. 最后我们估计 (7.74) 中最后一项对 (7.99) 的贡献:

$$(1/2)^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}\Delta\!\!\!/\psi_{n-1} + \mu^{(Y)}\hat{\tilde{\pi}}\!\!\!/ \cdot D\!\!\!/^2\psi_{n-1} \tag{7.149}$$

由 (7.82) 和 (7.85), 这个贡献可以被

$$C\int_{W_u^t}|K_0\psi_n||D\!\!\!/^2\psi_{n-1}|(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.150}$$

界定. 由 **H1**, 以及 $R_i\psi_{n-1}$ 是 ψ_n 之一,

$$|D\!\!\!/^2\psi_{n-1}| \leqslant C(1+t)^{-1}\sum_i|d\!\!\!/R_i\psi_{n-1}| \leqslant C(1+t)^{-1}\sum|d\!\!\!/\psi_n| \tag{7.151}$$

所以 (7.160) 可以被

$$C\int_{W_u^t}|K_0\psi_n||d\!\!\!/\psi_n|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.152}$$

界定. 这正像积分 (7.133), 它被 (7.148) 界定.

由上述结果我们得到了如下引理:

引理 7.2 我们有

$$|\int_{W_u^t}(K_0\psi_n)^{(Y)}\sigma_{1,n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}}| \tag{7.153}$$

$$\leqslant C(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt' + \int_0^u\mathcal{F}_{0,n}^t(u')du') \tag{7.154}$$

$$+C((\int_0^u\bar{\mathcal{F}}'^t_{1,n}(u')du')^{1/2} + (\bar{K}_n(t.u))^{1/2}) \tag{7.155}$$

$$\cdot(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt' + \int_0^u\mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2} \tag{7.156}$$

我们接下来考虑 ${}^{(Y)}\sigma_{1,n-1}$ 对 (7.100) 的贡献. 由于

$$K_1 = (\omega/\nu)L \tag{7.157}$$

(7.100) 等于

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(L\psi_n+\nu\psi_n)^{(Y)}\sigma_{n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.158}$$

在这里我们考虑的是

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(L\psi_n+\nu\psi_n)^{(Y)}\sigma_{1,n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.159}$$

由 **B1** 和 **D1** 我们有

$$C^{-1}(1+t)^2 \leqslant \omega/\nu \leqslant C(1+t)^2 \tag{7.160}$$

所以 (7.159) 被

$$\int_{W_u^t}(1+t')^2|L\psi_n+\nu\psi_n||^{(Y)}\sigma_{1,n-1}|dt'du'd\mu_{\not g} \tag{7.161}$$

界定. 我们接下来将估计这个积分.

我们从 (7.74) 右端第一项的贡献开始. 我们把这一项像 (7.103) 那样展开, 所以 (7.103) 中主部的贡献为

$$\int_{W_u^t}(1+t')^2|L\psi_n+\nu\psi_n||\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi}||LT\psi_{n-1}+\nu T\psi_{n-1}|dt'du'd\mu_{\not g} \tag{7.162}$$

由 (7.86) 以及 $T\psi_{n-1}$ 是 ψ_n 之一, (7.162) 被

$$C\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du' \tag{7.163}$$

界定. 为估计 (7.74) 右端第二项的贡献, 我们有

$$\begin{aligned}
L^2\psi_{n-1} &= (1+t)^{-1}LQ\psi_{n-1}-(1+t)^{-2}Q\psi_{n-1}\\
&= (1+t)^{-1}(LQ\psi_{n-1}+\nu Q\psi_{n-1})-(1+t)^{-2}(1+(1+t)\nu)Q\psi_{n-1}
\end{aligned} \tag{7.164}$$

所以由 (7.81) 以及 $Q\psi_{n-1}$ 是 ψ_n 之一, 我们要估计的项被

$$\begin{aligned}
&C\int_{W_u^t}(1+t')(1+\log(1+t'))|L\psi_n+\nu\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\\
&+C\int_{W_u^t}(1+\log(1+t'))|L\psi_n+\nu\psi_n||\psi_n|dt'du'd\mu_{\not g}\\
\leqslant\ & C\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du'+C\left(\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du'\right)^{1/2}\\
&\cdot\left(\epsilon_0^2\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t')dt'\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{7.165}$$

界定. 为估计 (7.74) 右端第三项和第四项, 我们将要运用表达式 (7.132). 由 (7.83), (7.84), 我们要估计的项被

$$\int_{W_u^t}(1+t')(1+\log(1+t'))|L\psi_n+\nu\psi_n||\not d\psi_n|dt'du'd\mu_{\not g} \tag{7.166}$$

界定, 从而被

$$\begin{aligned}&\left(\int_{W_u^t}(1+t')^2|L\psi_n+\nu\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\right)^{1/2}\\&\cdot\left(\int_{W_u^t}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{7.167}$$

界定. (7.167) 中第一个因子的积分被

$$C\int_0^u\mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du'^{1/2}\tag{7.168}$$

界定. (7.167) 中第二个因子的积分可以分解为

$$\int_{W_u^t\bigcap\mathcal{U}}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}+\int_{W_u^t\bigcap\mathcal{U}^c}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\tag{7.169}$$

在 $\mathcal{U}^c$ 中我们有 $4\mu\geqslant 1$, 从而由 (7.93), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{W_u^t\bigcap\mathcal{U}^c}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\\&\leqslant 4\int_{W_u^t}(1+\log(1+t'))^2\mu|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}&(7.170)\\&\leqslant C\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}'^u_{1,n}(t')dt'&(7.171)\end{aligned}$$

另一方面, 由 (7.140),

$$\int_{\mathcal{U}\bigcap W_u^t}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\leqslant CK_n(t,u)\tag{7.172}$$

所以我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{W_u^t}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_n|^2dt'du'd\mu_{\not g}\\&\leqslant C(K_n(t,u)+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}'^u_{1,n}(t')dt')\end{aligned}\tag{7.173}$$

从而 (7.166) 被

$$C(\int_0^u\mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du')^{1/2}(K_n(t,u)+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}'^u_{1,n}(t')dt')^{1/2}\tag{7.174}$$

界定.

最后我们估计 (7.74) 右端最后两项的贡献. 由 (7.82), (7.85) 和 (7.151), 这一项被 (7.166) 界定, 而我们刚才已经估计过 (7.166) 了.

所以我们得到了如下引理:

引理 7.3 我们有

$$
\begin{aligned}
&|\int_{W_u^t}(K_1\psi_n+\omega\psi_n)^{(Y)}\sigma_{1,n-1}dt'du'd\mu_{\not g}| \\
\leqslant\ & C\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du' + C(\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du')^{1/2} \\
&\cdot(K_n(t,u)+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\mathcal{E}'^u_{1,n}(t')+\epsilon_0^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t'))dt')^{1/2} \quad (7.175)
\end{aligned}
$$

为了考虑 ${}^{(Y)}\sigma_{2,n-1}$ 对 (7.99) 和 (7.100) 的贡献, 我们将运用如下假设:

G1: 存在一个不依赖于 s 的正常数 C 使得在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中, 对所有交换向量场有

$$Y({}^{(Y)}\tilde{\pi}_{LL})=0 \tag{7.176}$$

$$|Y(\mu^{-1(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})|\leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{7.177}$$

$$|Y({}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}})|\leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{7.178}$$

$$|\not{\mathcal{L}}_Y({}^{(Y)}\tilde{\not\pi}_L)|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.179}$$

$$|\not{\mathcal{L}}_Y({}^{(Y)}\tilde{\not\pi}_{\underline{L}})|\leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{7.180}$$

$$|\not{\mathcal{L}}_Y({}^{(Y)}\hat{\tilde{\not\pi}})|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.181}$$

$$|Y({}^{(Y)}\mathrm{tr}\tilde{\not\pi})|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.182}$$

在每一行中 Y 出现两次. 每一次 Y 的出现都是独立地跑遍交换向量场的集合 $\{Y_i : i=1,2,3,4,5\}$.

G1 中的最后一项看起来比 **G0** 中的最后一项要强一些, 然而由 (6.114), (6.122) 和 (6.195), 我们有

$$|{}^{(Y_i)}\mathrm{tr}\tilde{\not\pi}|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) : i\neq 2$$

而对于 $Y_2=Q$, 我们有

$$|\mathrm{tr}{}^{(Q)}\tilde{\not\pi}-4|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

所以 **G1** 的最后一项实际上是与其他假设相容的.

接下来我们将用如下的界:

$$\int_{S_{t,u}} (\underline{L}\psi_{n-1})^2 d\mu_{\slashed{g}} \leqslant C\epsilon_0 \mathcal{E}_{0,n}^u(t)$$
$$\int_{S_{t,u}} (L\psi_{n-1})^2 d\mu_{\slashed{g}} \leqslant C\epsilon_0 (1+t)^{-2} \mathcal{E}_{0,n}^u(t) \tag{7.183}$$
$$\int_{S_{t,u}} |\slashed{d}\psi_{n-1}|^2 d\mu_{\slashed{g}} \leqslant C\epsilon_0 (1+t)^{-2} \mathcal{E}_{0,n}^u(t)$$

这些可以从 (7.129) 得到, 只需把 L 和 $\underline{L}$ 用交换向量场 T, Q 表示, 以及运用 **H0**.

我们现在考虑误差积分

$$-\int_{W_u^t} (K_0\psi_n)^{(Y)}\sigma_{2,n-1} dt'du'd\mu_{\slashed{g}} \tag{7.184}$$

(7.75) 右端第一项

$$(1/4)L(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\slashed{\pi}})\underline{L}\psi_{n-1}$$

与 $L(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\slashed{\pi}})$ 有关. 由于 $L = (1+t)^{-1}Q$, 由 **G1**, 我们有

$$|L(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\slashed{\pi}})| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{7.185}$$

所以第一项对误差积分 (7.184) 的贡献的绝对值被

$$C(I_2^{\underline{L}} + I_2^{L})$$

界定, 其中

$$I_2^{\underline{L}} = \int_{W_u^t} |\underline{L}\psi_n||\underline{L}\psi_{n-1}|(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\slashed{g}} \tag{7.186}$$
$$I_2^{L} = \int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n||\underline{L}\psi_{n-1}|(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\slashed{g}} \tag{7.187}$$

由 (7.183) 的第一式有

$$\begin{aligned}
I_2^{\underline{L}} &\leqslant \int_0^t \Big(\int_0^u \int_{S_{t',u'}} (\underline{L}\psi_n)^2 d\mu_{\slashed{g}} du'\Big)^{1/2}\Big(\int_0^u \int_{S_{t',u'}} (\underline{L}\psi_{n-1})^2 d\mu_{\slashed{g}} du'\Big)^{1/2} \\
&\quad \cdot (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt' \\
&\leqslant C\int_0^t (\mathcal{E}_{0,n}^u(t'))^{1/2}(\epsilon_0^2\mathcal{E}_{0,n}^u(t'))^{1/2}(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt' \\
&= C\epsilon_0 \int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt'
\end{aligned} \tag{7.188}$$

以及由 **A** 有

$$I_2^L \leqslant (\int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_n)^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}$$
$$\cdot(\int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)(\underline{L}\psi_{n-1})^2(1+t')^{-4}(1+\log(1+t'))^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}$$
$$\leqslant C\epsilon_0(\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2}(\int_0^t(1+t')^{-4}(1+\log(1+t'))^3\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt')^{1/2} \quad (7.189)$$

(7.75) 右端第二项

$$\frac{1}{4}\underline{L}(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi})L\psi_{n-1} \quad (7.190)$$

与 $\underline{L}(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi})$ 有关. 由 $\underline{L}=2T+\alpha^{-1}\kappa(1+t)^{-1}Q$ 以及 **G1**, 我们有

$$|\underline{L}(\mathrm{tr}^{(Y)}\tilde{\not\pi})| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad (7.191)$$

所以第二项的贡献被

$$C(I_3^{\underline{L}}+I_3^L)$$

界定, 其中

$$I_3^{\underline{L}} = \int_{W_u^t}|\underline{L}\psi_n||L\psi_{n-1}|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not g} \quad (7.192)$$

$$I_3^L = \int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n||L\psi_{n-1}|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not g} \quad (7.193)$$

运用 (7.183) 的第二式, 我们有

$$I_3^{\underline{L}} \leqslant \int_0^t(\int_0^u\int_{S_{t',u'}}(\underline{L}\psi_n)^2 d\mu_{\not g}du')^{1/2}(\int_0^u\int_{S_{t',u'}}(L\psi_{n-1})^2 d\mu_{\not g}du')^{1/2}$$
$$\cdot(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'$$
$$\leqslant C\int_0^t(\mathcal{E}_{0,n}^u(t'))^{1/2}(\epsilon_0^2(1+t')^{-2}\mathcal{E}_{0,n}^u(t'))^{1/2}(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'$$
$$= C\epsilon_0\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt' \quad (7.194)$$

以及运用 **A**, 我们有

$$I_3^L \leqslant (\int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_n)^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}$$
$$\cdot(\int_{W_u^t}(1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_{n-1})^2(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}$$
$$\leqslant C\epsilon_0(\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2}(\int_0^t(1+t')^{-4}(1+\log(1+t'))^3\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt')^{1/2} \quad (7.195)$$

(7.75) 右端第三项

$$\frac{1}{4}L(\mu^{-1}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})L\psi_{n-1}$$

与 $L(\mu^{-1}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})$ 有关. 由 $L=(1+t)^{-1}Q$ 以及 **G1**, 我们有

$$|L(\mu^{-1}{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.196}$$

所以我们要估计的项的绝对值被

$$C(I_3^{\underline{L}}+I_3^L)$$

界定. (7.75) 右端第四项和第五项

$$-\frac{1}{2}\not{\mathcal{L}}_L{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}\cdot \not{d}\psi_{n-1}-\frac{1}{2}\not{\mathcal{L}}_{\underline{L}}{}^{(Y)}\tilde{Z}\cdot \not{d}\psi_{n-1}$$

与 $\not{\mathcal{L}}_L{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}$ 和 $\not{\mathcal{L}}_{\underline{L}}{}^{(Y)}\tilde{Z}$ 有关. 由 (7.50)—(7.52), 我们有

$${}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_L=\not{g}\cdot{}^{(Y)}\tilde{Z},\quad {}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}}=\not{g}\cdot{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}$$

所以

$$\begin{aligned}
\not{\mathcal{L}}_Y{}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_L&=\not{g}\cdot\not{\mathcal{L}}_Y{}^{(Y)}\tilde{Z}+{}^{(Y)}\not{\pi}\cdot{}^{(Y)}\tilde{Z}\\
\not{\mathcal{L}}_Y{}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}}&=\not{g}\cdot\not{\mathcal{L}}_Y{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}+{}^{(Y)}\not{\pi}\cdot{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}
\end{aligned} \tag{7.197}$$

由于

$${}^{(Y)}\tilde{\pi}=\Omega({}^{(Y)}\pi+Y(\log\Omega)g)$$

所以由 **E1** 和 **E2**, 我们有

$$|Yh|\leqslant C(1+t)^{-1} \tag{7.198}$$

从而

$$|Y\log\Omega|\leqslant C(1+t)^{-1} \tag{7.199}$$

对所有交换向量场 Y 成立, 进而由 **G0** 和 **G1** 我们有

$$\begin{aligned}
|\not{\mathcal{L}}_Y{}^{(Y)}\tilde{Z}|&\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\
|\not{\mathcal{L}}_Y{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}|&\leqslant C(1+\log(1+t))
\end{aligned} \tag{7.200}$$

由 $\underline{L}=2T+\eta^{-1}\kappa(1+t)^{-1}Q$, $L=(1+t)^{-1}Q$, 上式意味着

$$|\not{\mathcal{L}}_{\underline{L}}{}^{(Y)}\tilde{Z}|,|\not{\mathcal{L}}_L{}^{(Y)}\tilde{\underline{Z}}|\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.201}$$

所以 (7.75) 右端第四项和第五项的贡献的绝对值被

$$C(I_4^{\underline{L}} + I_4^L)$$

界定, 其中

$$I_4^{\underline{L}} = \int_{W_u^t} |\underline{L}\psi_n||\not{d}\psi_{n-1}|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.202}$$

$$I_4^L = \int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)|L\psi_n||\not{d}\psi_{n-1}|(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.203}$$

由 (7.183) 的最后一式, 我们有

$$\begin{aligned} I_4^{\underline{L}} &\leqslant \int_0^t \Big(\int_0^u \int_{S_{t',u'}} (\underline{L}\psi_n)^2 d\mu_{\not{g}} du'\Big)^{1/2} \Big(\int_0^u \int_{S_{t',u'}} |\not{d}\psi_{n-1}|^2 d\mu_{\not{g}} du'\Big)^{1/2} \\ &\quad \cdot (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt' \\ &\leqslant C \int_0^t (\mathcal{E}_{0,n}^u(t'))^{1/2} (\epsilon_0^2 (1+t')^{-2} \mathcal{E}_{0,n}^u(t'))^{1/2} \\ &\quad \cdot (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))dt' \\ &= C\epsilon_0 \int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt' \end{aligned} \tag{7.204}$$

以及由 **A**, 我们有

$$\begin{aligned} I_4^L &\leqslant \Big(\int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)(L\psi_n)^2 dt'du'd\mu_{\not{g}}\Big)^{1/2} \\ &\quad \Big(\int_{W_u^t} (1+\eta^{-1}\kappa)|\not{d}\psi_{n-1}|^2 (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 dt'du'd\mu_{\not{g}}\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C\epsilon_0 \Big(\int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du'\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t (1+t')^{-4}(1+\log(1+t'))^3 \mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt'\Big)^{1/2} \end{aligned} \tag{7.205}$$

(7.75) 右端第六项和第七项与 $\not{d}\mathrm{iv}^{(Y)}\tilde{Z}$ 和 $\not{d}\mathrm{iv}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}$ 有关. 把 **H1** 应用到 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\tilde{\not{\pi}}_L, \tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}}$, 我们得到

$$\begin{aligned} |\not{D}^{(Y)}\tilde{Z}|^2 &= |\not{D}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_L|^2 \leqslant C(1+t)^{-2} \sum_i |\mathcal{L}_{R_i}{}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_L|^2 \\ |\not{D}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}|^2 &= |\not{D}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}}|^2 \leqslant C(1+t)^{-2} \sum_i |\mathcal{L}_{R_i}{}^{(Y)}\tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}}|^2 \end{aligned} \tag{7.206}$$

然后由 **G1** 有

$$\begin{aligned} |\not{D}^{(Y)}\tilde{Z}| &\leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \\ |\not{D}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}| &\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \end{aligned} \tag{7.207}$$

所以同样有

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(Y)}\tilde{Z}| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \\
&|\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned}
\tag{7.208}
$$

从而 (7.75) 的第六项的贡献

$$
-\frac{1}{2}\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(Y)}\tilde{Z}\underline{L}\psi_{n-1}
$$

的绝对值被

$$
C(I_2^L + I_2^{\underline{L}})
$$

界定, 而第七项的贡献

$$
-\frac{1}{2}\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(Y)}\underline{\tilde{Z}}L\psi_{n-1}
$$

的绝对值被

$$
C(I_3^L + I_3^{\underline{L}})
$$

界定.

(7.75) 右端第八项

$$
\frac{1}{2}\not{d}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}} \cdot \not{d}\psi_{n-1}
$$

与 $\not{d}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}$ 有关. 由 **H0** 和 **G1** 有

$$
|\not{d}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}| \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\sum_i (R_i{}^{(Y)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}})^2} \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{7.209}
$$

这一项的贡献被

$$
C(I_4^L + I_4^{\underline{L}})
$$

界定.

最后, (7.75) 右端最后一项

$$
\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}(\mu^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}) \cdot \not{d}\psi_{n-1}
$$

与

$$
\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}(\mu^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}) = \mu\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}} + \not{d}\mu \cdot {}^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}
$$

有关. 把 **H2** 应用到 ${}^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}$ 有

$$
|\not{D}^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}{}^{(Y)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}|^2 \tag{7.210}
$$

则 **G1** 意味着

$$|\not{D}^{(Y)}\hat{\hat{\not{\pi}}}| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{7.211}$$

所以同样有

$$|\mathrm{d\not{i}v}^{(Y)}\hat{\hat{\not{\pi}}}| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{7.212}$$

再由 **A3**, **F1** 和 **G0**, 我们得到

$$|\mathrm{d\not{i}v}(\mu^{(Y)}\hat{\hat{\not{\pi}}})| \leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{7.213}$$

所以这一项的贡献的绝对值同样被

$$C(I_4^L + I_{\frac{L}{4}})$$

界定. 我们得到了如下引理:

引理 7.4 我们有

$$\begin{aligned}
&|\int_{W_u^t}(K_0\psi_n)^{(Y)}\sigma_{2,n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}}| \\
&\leqslant C\epsilon_0(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt' + \int_0^u \mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')
\end{aligned} \tag{7.214}$$

我们现在考虑误差积分

$$-\int_{W_u^t}(K_1\psi_n + \omega\psi_n)^{(Y)}\sigma_{2,n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}}$$

即

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(L\psi_n + \nu\psi_n)^{(Y)}\sigma_{2,n-1}dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.215}$$

回忆 ω 和 ν 的界, 这个积分被

$$C\int_{W_u^t}(1+t')^2|L\psi_n + \nu\psi_n||^{(Y)}\sigma_{2,n-1}|dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{7.216}$$

界定. 我们将估计这个积分.

由 (7.195), (7.75) 右端第一项对积分 (7.161) 的贡献的绝对值被

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^u\left(\int_{C_{u'}}|L\psi_n+\nu\psi_n||\underline{L}\psi_{n-1}|(1+\log(1+t'))d\mu_{\not g}dt'\right)du'\\
\leqslant{}& C\int_0^u\left(\int_{C_{u'}}(1+t')^2(L\psi_n+\nu\psi_n)^2d\mu_{\not g}dt'\right)^{1/2}\\
&\cdot\left(\int_{C_{u'}}(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\underline{L}\psi_{n-1})^2d\mu_{\not g}dt'\right)^{1/2}du'\\
\leqslant{}& C\int_0^u(\mathcal{F}'^t_{1,n}(u'))^{1/2}\left(\int_0^t\epsilon_0\mathcal{E}^u_{0,n}(t')(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2dt'\right)^{1/2}du'\\
\leqslant{}& C\epsilon_0\left(\int_0^u\mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du'\right)^{1/2}\left(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t')dt'\right)^{1/2}
\end{aligned}\tag{7.217}
$$

界定. 这里我们运用了 (7.183) 的第一式.

由 (7.191), (7.75) 右端第二项的贡献的绝对值被

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^u\left(\int_{C_{u'}}|L\psi_n+\nu\psi_n||L\psi_{n-1}|(1+t')(1+\log(1+t'))d\mu_{\not g}dt'\right)du'\\
\leqslant{}& C\int_0^u\left(\int_{C_{u'}}(1+t')^2(L\psi_n+\nu\psi_n)^2d\mu_{\not g}dt'\right)^{1/2}\\
&\cdot\left(\int_{C_{u'}}(1+\log(1+t'))^2(L\psi_{n-1})^2d\mu_{\not g}dt'\right)^{1/2}du'\\
\leqslant{}& C\int_0^u(\mathcal{F}'^t_{1,n}(u'))^{1/2}\left(\int_0^t\epsilon_0\mathcal{E}^u_{0,n}(t')(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2dt'\right)^{1/2}du'\\
\leqslant{}& C\epsilon_0\left(\int_0^u\mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du'\right)^{1/2}\left(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t')dt'\right)^{1/2}
\end{aligned}\tag{7.218}
$$

界定. 这里我们运用了 (7.183) 的第二式.

由 (7.196), (7.75) 右端第三项的贡献用与 (7.218) 相同的方法估计.

由 (7.201), (7.75) 右端第四项和第五项的贡献的绝对值被

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^u\left(\int_{C_{u'}}|L\psi_n+\nu\psi_n||\not d\psi_{n-1}|(1+t')(1+\log(1+t'))d\mu_{\not g}dt'\right)du'\\
\leqslant{}& C\int_0^u\left(\int_{C_{u'}}(1+t')^2(L\psi_n+\nu\psi_n)^2d\mu_{\not g}dt'\right)^{1/2}\\
&\cdot\left(\int_{C_{u'}}(1+\log(1+t'))^2|\not d\psi_{n-1}|^2d\mu_{\not g}dt'\right)^{1/2}du'\\
\leqslant{}& C\int_0^u(\mathcal{F}'^t_{1,n}(u'))^{1/2}\left(\int_0^t\epsilon_0\mathcal{E}^u_{0,n}(t')(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2dt'\right)^{1/2}du'\\
\leqslant{}& C\epsilon_0\left(\int_0^u\mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du'\right)^{1/2}\left(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t')dt'\right)^{1/2}
\end{aligned}\tag{7.219}
$$

界定. 这里我们用了 (7.183) 的最后一式.

由 (7.208), (7.75) 右端第六项的贡献用与 (7.217) 相同的方法估计, 而第七项的贡献则是用与 (7.228) 相同的方法估计.

最后由 (7.209) 和 (7.213), (7.75) 右端最后两项的贡献用与 (7.219) 相同的方法估计.

我们得到了如下引理:

引理 7.5 我们有

$$
\begin{aligned}
&|\int_{W_u^t}(K_1\psi_n+\omega\psi_n)^{(Y)}\sigma_{2,n-1}dt'du'd\mu_{\not g}| \\
&\leqslant C\epsilon_0(\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,n}(u')du')^{1/2}(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2\mathcal{E}^u_{0,n}(t')dt')^{1/2} \qquad (7.220)
\end{aligned}
$$

最后我们考虑由 (7.77)—(7.79) 给出的 ${}^{(Y)}\sigma_{3,n-1}$ 对 (7.99) 与 (7.100) 的贡献. 由 **E1**, **E2**, **F1**, **F2** 以及 (6.86), (6.87), (6.89), (6.95), (6.98), (6.99) 和 (6.104), 我们有

$$
\begin{aligned}
|L\log\Omega| &\leqslant C(1+t)^{-2} \\
|\mathrm{tr}\chi| \leqslant C(1+t)^{-1}, &\quad |\mathrm{tr}\underline{\chi}| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
|\Lambda| &\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
|L(\eta^{-1}\kappa)| \leqslant C(1+t)^{-1}, &\quad |\not d(\eta^{-1}\kappa)| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned} \qquad (7.221)
$$

再加上 **G0**, 这些意味着

$$
\begin{aligned}
|{}^{(Y)}\sigma^{L}_{3,n-1}| &\leqslant C(1+t)^{-2} \\
|{}^{(Y)}\sigma^{\underline{L}}_{3,n-1}| &\leqslant (1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
|{}^{(Y)}\not\sigma_{3,n-1}| &\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned} \qquad (7.222)
$$

回忆 (7.185), (7.191) 和 (7.201), 我们得到: ${}^{(Y)}\sigma_{3,n-1}$ 对误差积分 (7.99), (7.100) 的贡献可以用与 ${}^{(Y)}\sigma_{2,n-1}$ 相同的方法估计.

我们最终得到了如下引理:

引理 7.6 我们有

$$
\begin{aligned}
&|\int_{W_u^t}(K_0\psi_n)^{(Y)}\sigma_{n-1}dt'du'd\mu_{\not g}| \\
\leqslant &C(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt'+\int_0^u\mathcal{F}_{0,n}^t(u')du') \\
&+C((\int_0^u\bar{\mathcal{F}}_{1,n}'^t(u')du')^{1/2}+(\bar{K}_n(t,u))^{1/2}) \\
&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt'+\int_0^u\mathcal{F}_{0,n}^t(u')du')^{1/2}
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&|\int_{W_u^t}(K_1\psi_n+\omega\psi_n)^{(Y)}\sigma_{n-1}dt'du'd\mu_{\not g}| \\
\leqslant &C\int_0^u\mathcal{F}_{1,n}'^t(u')du'+C(\int_0^u\mathcal{F}_{1,n}'(u')du')^{1/2}(K_n(t,u))^{1/2} \\
&+C(\int_0^u\mathcal{F}_{1,n}'^t(u')du')^{1/2} \\
&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\mathcal{E}_{1,n}'^u(t')+\epsilon_0^2\mathcal{E}_{0,n}^u(t')dt'))^{1/2}
\end{aligned}
$$

第八章　关于 $\not{d}\mathrm{tr}\chi$ 的传输方程的正则化. χ 的最高阶 $S_{t,u}$- 导数的估计

8.1　初步准备

8.1.1　传输方程的正则化

我们记

$$\tau_\mu = \partial_\mu h, \quad \omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi_\nu = \partial_\nu \psi_\mu \tag{8.1}$$

命题 8.1　函数 h 满足如下关于声学度量 g 的非齐次波方程:

$$\Box_g h = -\Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}a - b \tag{8.2}$$

其中 a 和 b 是如下函数:

$$a = (g^{-1})^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu, \quad b = \sum_i (g^{-1})^{\mu\nu}\omega_{\mu i}\omega_{\nu i} \tag{8.3}$$

证明　由第一章的结论, 我们知道

$$\Box_{\tilde{g}}\psi_\alpha = 0 \tag{8.4}$$

那么

$$h=\partial_t\phi-\frac{1}{2}\sum_i(\partial_i\phi)^2 \tag{8.5}$$

满足方程

$$\square_{\tilde{g}}h=-\sum_i(\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_i\partial_\nu\psi_i \tag{8.6}$$

由于

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=\Omega g_{\mu\nu} \tag{8.7}$$

则对任意函数 f, 我们有

$$\square_{\tilde{g}}f=\Omega^{-1}\square_g f+\Omega^{-2}(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu f \tag{8.8}$$

以及

$$\partial_\mu\Omega=\frac{d\Omega}{dh}\partial_\mu h \tag{8.9}$$

则命题得证. □

由第三章的结论, $\mathrm{tr}\chi$ 满足传输方程

$$L\mathrm{tr}\chi=\mu^{-1}(L\mu)\mathrm{tr}\chi-|\chi|^2-\mathrm{tr}\alpha \tag{8.10}$$

由 Ricci 张量的定义

$$S_{\mu\nu}=(g^{-1})^{\kappa\lambda}R_{\kappa\mu\lambda\nu} \tag{8.11}$$

我们有

$$\mathrm{tr}\alpha=S(L,L) \tag{8.12}$$

可以分解:

$$S(L,L)=S^{[P]}(L,L)+S^{[N]}(L,L)=\mathrm{tr}\alpha^{[P]}+\mathrm{tr}\alpha^{[N]} \tag{8.13}$$

由第四章的结论有

$$\mathrm{tr}\alpha^{[P]}=-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\not{g}^{-1})^{AB}v_{AB} \tag{8.14}$$

由

$$-\mu^{-1}v_{L\underline{L}}+(\not{g}^{-1})^{AB}v_{AB}=\mathrm{tr}v=\square_g h \tag{8.15}$$

我们有

$$\mathrm{tr}\alpha^{[P]} = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\mu^{-1}v_{L\underline{L}} + \Box_g h) \tag{8.16}$$

同样由第四章的结论, 我们有

$$\mathrm{tr}\alpha^{[N]} = \eta^{-2}\mathrm{tr}\alpha^{[A]} + \frac{1}{2}H_1\mathrm{tr}\alpha^{[C]} - \frac{1}{2}H_2\mathrm{tr}\alpha^{[B]} \tag{8.17}$$

其中

$$H_1 = \eta^{-2}\frac{dH}{dh}, \quad H_2 = \frac{d^2H}{dh^2} + \frac{1}{2}\eta^{-2}(\frac{dH}{dh})^2 \tag{8.18}$$

以及

$$\mathrm{tr}\alpha^{[A]} = w_{LL}\mathrm{tr}\not\psi - |\not\psi_L|^2 \tag{8.19}$$

$$\mathrm{tr}\alpha^{[B]} = |\not\tau|^2 \tag{8.20}$$

$$\mathrm{tr}\alpha^{[C]} = 2(\tau_L\mathrm{tr}\not\psi - \not\tau\cdot\not\psi_L) \tag{8.21}$$

现在由

$$v_{L\underline{L}} = D^2h(L,\underline{L}) = L(\underline{L}h) - \tau(D_L\underline{L}) \tag{8.22}$$

和第三章的结论, 我们有

$$D_L\underline{L} = -2\zeta^A X_A$$

所以

$$v_{L\underline{L}} = L(\underline{L}h) + 2\zeta\cdot\not\tau \tag{8.23}$$

注意到 $\underline{L}h = \tau_{\underline{L}}$, 定义

$$f = -\frac{1}{2\mu}\frac{dH}{dh}\tau_{\underline{L}} \tag{8.24}$$

然后我们有

$$S(L,L) = Lf + g \tag{8.25}$$

其中

$$g = \frac{1}{2\mu}\frac{d^2H}{dh^2}\tau_L\tau_{\underline{L}} - \frac{1}{2\mu^2}(L\mu)\frac{dH}{dh}\tau_{\underline{L}} - \frac{1}{\mu}\frac{dH}{dh}\zeta\cdot\not{\tau} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\Box_g h + \mathrm{tr}\alpha^{[N]} \tag{8.26}$$

现在设

$$\check{f} = \mu f = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\tau_{\underline{L}} \tag{8.27}$$

当 $\mu \to 0$ 时它是正则的. 然后我们有

$$\mu S(L, L) = L\check{f} + \check{g} \tag{8.28}$$

其中

$$\begin{aligned}\check{g} &= \mu g - (L\mu)f \\ &= \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}\tau_L\tau_{\underline{L}} - \frac{dH}{dh}\zeta\cdot\not{\tau} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\mu\Box_g h + \mu\mathrm{tr}\alpha^{[N]}\end{aligned} \tag{8.29}$$

由命题 8.1,

$$\mu\Box_g h = -\Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}\mu a - \mu b \tag{8.30}$$

其中

$$\mu a = \mu(g^{-1})^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu = -\tau_L\tau_{\underline{L}} + \mu|\not{\tau}|^2 \tag{8.31}$$

以及

$$\mu b = \sum_i \mu(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_i\partial_\nu\psi_i = \sum_i(-(L\psi_i)(\underline{L}\psi_i) + \mu|\not{d}\psi_i|^2) \tag{8.32}$$

我们看到 μa 和 μb 以及 $\mu\Box_g h$ 在 $\mu \to 0$ 时都是正则的. 从而 $\check{g}$ 当 $\mu \to 0$ 时是正则的. (8.10) 有如下形式:

$$L(\mu\mathrm{tr}\chi + \check{f}) = 2(L\mu)\mathrm{tr}\chi - \frac{1}{2}\mu(\mathrm{tr}\chi)^2 - \mu|\hat{\chi}|^2 - \check{g} \tag{8.33}$$

引入 $S_{t,u}$ 1- 形式:

$$x_0 = \mu\not{d}\mathrm{tr}\chi + \not{d}\check{f} \tag{8.34}$$

对 (8.33) 在 $S_{t,u}$ 上微分, 我们可以导出一个关于 x_0 的传输方程.

引理 8.1 对任意函数 ϕ, 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_L(\not{d}\phi) = \not{d}(L\phi) \tag{8.35}$$

证明 由于方程两边都是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式, 我们只需把两边同时作用在 X_A 上即可.

$$\begin{aligned}\not{\mathcal{L}}_L(\not{d}\phi)(X_A) &= \mathcal{L}_L(\not{d}\phi)(X_A) = L(X_A(\phi)) - (\not{d}\phi)(\mathcal{L}_L X_A) \\ &= L(X_A(\phi)) - [L, X_A]\phi = X_A(L\phi)\end{aligned}$$

而 $\not{d}(L\phi)(X_A) = X_A(L\phi)$, 所以引理得证. □

在引理 8.1 中取 $\phi = \mu\mathrm{tr}\chi + \check{f}$, 由 (8.33) 和 (8.34), 我们得到了关于 x_0 的传输方程:

$$\not{\mathcal{L}}_L x_0 + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))x_0 = (\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))\not{d}\check{f} - \mu\not{d}(|\hat{\chi}|^2) - g_0 \tag{8.36}$$

其中

$$g_0 = \not{d}\check{g} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi\not{d}(\check{f} + 2L\mu) + (\not{d}\mu)(L\mathrm{tr}\chi + |\chi|^2) \tag{8.37}$$

我们可以把 (3.24)

$$L\mathrm{tr}\chi + |\chi|^2 = \mu^{-1}(L\mu)\mathrm{tr}\chi - \mathrm{tr}\alpha \tag{8.38}$$

代入 g_0 的表达式中. 由第四章的结论,

$$\mathrm{tr}\alpha = \mathrm{tr}\alpha^{[P]} + \mathrm{tr}\alpha^{[N]}$$

其中 $\mathrm{tr}\alpha^{[N]}$ 当 $\mu \to 0$ 时正则, 而

$$\mathrm{tr}\alpha^{[P]} = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\not{g}^{-1})^{AB}v_{AB} \tag{8.39}$$

其中

$$v_{AB} = D^2h(X_A, X_B) = \not{D}^2h(X_A, X_B) - \eta^{-1}\not{k}_{AB}Lh - \mu^{-1}\chi_{AB}Th$$

所以

$$(\not{g}^{-1})^{AB}v_{AB} = \not{\Delta}h - \eta^{-1}\mathrm{tr}\not{k}Lh - \mu^{-1}\mathrm{tr}\chi Th \tag{8.40}$$

以及

$$\mathrm{tr}\alpha^{[P]} = \mu^{-1}m\mathrm{tr}\chi - \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\not{\Delta}h - \eta^{-1}\mathrm{tr}\not{k}Lh) \tag{8.41}$$

由关于 μ 的传输方程

$$L\mu = m + \mu e \tag{8.42}$$

(8.38) 的右端为

$$e\mathrm{tr}\chi + \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\not{\Delta}h - \eta^{-1}\mathrm{tr}\not{k}Lh) - \mathrm{tr}\alpha^{[N]} \tag{8.43}$$

它当 $\mu \to 0$ 时正则.

所以 g_0 的阶是 ψ_μ 的二阶导数, 并且当 $\mu \to 0$ 时正则.

8.1.2　高阶 $S_{t,u}$- 导数的传输方程

为了求 $\mathrm{tr}\chi$ 的高阶球面导数的界, 我们引入 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式

$$^{(i_1\cdots i_l)}x_l = \mu\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) + \not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\check{f}) \tag{8.44}$$

所以对给定的正整数 l, 我们有长度为 l 的多重指标 $(i_1\cdots i_l)$, 其中每个 $i_k \in \{1,2,3\}$, $k=1,\cdots,l$. 对于多重指标 $(i_1\cdots i_l)$ 有一串与之对应的旋转向量场 $(R_{i_l}\cdots R_{i_1})$. 为了导出关于 x_l 的传输方程, 我们将运用如下引理.

引理 8.2　设 Y 是时空流形中任意一个与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, 我们有

$$[L,Y] = {}^{(Y)}Z \tag{8.45}$$

其中 ${}^{(Y)}Z$ 是与 $S_{t,u}$ 相切、与 Y 相关的向量场, 并且满足如下条件: 对任意 $V \in TW^*_{\epsilon_0}$ 有

$$g({}^{(Y)}Z, V) = {}^{(Y)}\pi(L, \Pi V) \tag{8.46}$$

在标架 (L,T,X_1,X_2) 或 $(L,\underline{L},X_1,X_2)$ 下,

$${}^{(Y)}Z = {}^{(Y)}Z^A X_A, \quad {}^{(Y)}Z^A = {}^{(Y)}\pi_{LB}(\not{g}^{-1})^{AB} \tag{8.47}$$

证明　向量场 $[L,Y]$ 满足

$$[L,Y]t = L(Yt) - Y(Lt) = 0$$
$$[L,Y]u = L(Yu) - Y(Lu) = 0$$

从而 $[L,Y] = {}^{(Y)}Z$ 与 $S_{t,u}$ 相切, 所以我们可以展开:

$${}^{(Y)}Z = {}^{(Y)}Z^B X_B \tag{8.48}$$

把上述向量场与 X_A 作内积得到

$$\not{g}_{AB}{}^{(Y)}Z^B = {}^{(Y)}Z_A = g({}^{(Y)}Z, X_A)$$
$$= g([L,Y], X_A) = g(D_L Y, X_A) - g(D_Y L, X_A)$$
$$= {}^{(Y)}\pi_{LA} - g(D_{X_A}Y, L) - g(D_Y L, X_A) \tag{8.49}$$

现在由于 $g(L, X_A) = 0$, 我们有

$$-g(D_Y L, X_A) = g(L, D_Y X_A) \tag{8.50}$$

所以代入上式有

$$\not{g}_{AB} Z^B = {}^{(Y)}\pi_{LA} + g(L, [Y, X_A]) = {}^{(Y)}\pi_{LA} \tag{8.51}$$

我们用到了 $[Y, X_A]$ 与 $S_{t,u}$ 相切, 从而与 L 正交的事实. 引理得证. □

引理 8.3 设 Y 是时空流形 $W^*_{\epsilon_0}$ 中任意一个与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, ξ 是在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中 $S_{t,u}$ 上的任意一个 1- 形式. 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_L \not{\mathcal{L}}_Y \xi - \not{\mathcal{L}}_Y \not{\mathcal{L}}_L \xi = \not{\mathcal{L}}_{{}^{(Y)}Z}\xi \tag{8.52}$$

证明 由于 L, Y 与超曲面 C_u 相切, 所以我们可以把自己限制在一个给定的 C_u 上. 在定义 $\not{\mathcal{L}}_Y\xi, \not{\mathcal{L}}_L\xi$ 时我们考虑 ξ 往 TC_u 上的延拓, 并且满足条件

$$\xi(L) = 0 \tag{8.53}$$

我们有

$$(\mathcal{L}_L\xi)(L) = L(\xi(L)) - \xi([L, L]) = 0 \tag{8.54}$$

所以

$$\not{\mathcal{L}}_L\xi = \mathcal{L}_L\xi \tag{8.55}$$

然而

$$(\mathcal{L}_Y\xi)(L) = Y(\xi(L)) - \xi([Y, L]) = \xi([L, Y]) = \xi({}^{(Y)}Z) \tag{8.56}$$

由于 $\not{\mathcal{L}}_Y\xi$ 是 $\mathcal{L}_Y\xi$ 在 $TS_{t,u}$ 上的限制, 然后再由条件 $(\not{\mathcal{L}}_Y\xi)(L) = 0$ 延拓到 TC_u, 所以在 C_u 上有

$$\not{\mathcal{L}}_Y\xi = \mathcal{L}_Y\xi - \xi({}^{(Y)}Z)dt \tag{8.57}$$

我们用到了事实 $dt(L)=Lt=1, \not{d}t=0$.

我们有

$$(\not{\mathcal{L}}_L\not{\mathcal{L}}_Y\xi-\not{\mathcal{L}}_Y\not{\mathcal{L}}_L\xi)(X_A)=(\mathcal{L}_L\not{\mathcal{L}}_Y\xi-\mathcal{L}_Y\not{\mathcal{L}}_L\xi)(X_A) \tag{8.58}$$

代入 (8.55) 和 (8.57), 上式右端为

$$(\mathcal{L}_L\mathcal{L}_Y\xi-L(\xi({}^{(Y)}Z))dt-\xi({}^{(Y)}Z)\mathcal{L}_L(dt)-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_L\xi)(X_A) \tag{8.59}$$

由 $dt(X_A)=0$ 和 $\mathcal{L}_L(dt)=d(Lt)=0$, (8.58) 变为

$$(\mathcal{L}_L\mathcal{L}_Y\xi-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_L\xi)(X_A)=(\mathcal{L}_{[L,Y]}\xi)(X_A) \tag{8.60}$$

由引理 8.2, 这正是 $(\mathcal{L}_{{}^{(Y)}Z}\xi)(X_A)$. 引理得证. □

接下来几个命题的证明将要用到一个初等的线性递推公式, 它的证明可以用数学归纳法完成.

命题 8.2 设 $\{y_n : n=1,2,\cdots\}$ 是空间 X 中一个给定的序列, $\{A_n : n=1,2,\cdots\}$ 是 X 中一个给定的算子序列. 设 $\{x_n : n=0,1,2,\cdots\}$ 是 X 中满足如下递推关系的序列:

$$x_n=A_nx_{n-1}+y_n \tag{8.61}$$

从而对每个 $n=1,2,\cdots$ 我们有

$$x_n=A_n\cdots A_1x_0+\sum_{m=0}^{n-1}A_n\cdots A_{n-m+1}y_{n-m} \tag{8.62}$$

为了写出 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 的传输方程, 我们引入如下函数:

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l=R_{i_l}\cdots R_{i_1}\check{f} \tag{8.63}$$

$${}^{(i_1\cdots i_l)}h_l=R_{i_l}\cdots R_{i_1}(|\hat{\chi}|^2) \tag{8.64}$$

命题 8.3 对任意非负整数 l 和多重指标 $(i_1\cdots i_l)$, $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 满足传输方程

$$\begin{aligned}&\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l+(\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}x_l\\&=(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l-\mu\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}h_l-{}^{(i_1\cdots i_l)}g_l\end{aligned}$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}g_l = & \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}g_0 - \sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} \\
& + \sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y_{l-k}
\end{aligned}
$$

其中 g_0 由 (8.37) 给出. 这里对每个 $j=1,\cdots,l$, ${}^{(i_1\cdots i_j)}y_j$ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_j)}y_j = & (R_{i_j}\mu){}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1} \\
& + (\mu R_{i_j}\mathrm{tr}\chi - R_{i_j}L\mu + {}^{(R_{i_j})}Z\mu)\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) \\
& + \frac{1}{2}(R_{i_j}\mathrm{tr}\chi)\not{d}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\check{f}_{j-1}
\end{aligned}
$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$
{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1} = \not{\mathcal{L}}_L\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) + \mathrm{tr}\chi\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) + \not{d}^{(i_1\cdots i_{j-1})}h_{j-1}
$$

证明　当 $l=0$ 时, 命题中的传输方程正是方程 (8.36). 所以由归纳假设出发, 假设传输方程对 $l-1$ 成立, 即

$$
\begin{aligned}
& \not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1} + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu)){}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1} \\
= & \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu)\right)\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}_{l-1} - \mu\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}h_{l-1} - {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g_{l-1}
\end{aligned}
\tag{8.65}
$$

对某个 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g_{l-1}$ 成立, 我们将要证明定理中的传输方程对 l 成立, 其中 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 是某个 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式, 与 ${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g_{l-1}$ 满足一定的递推关系. 对每个 l, 这个递推关系可以由 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 g_0 (见 (8.37)) 决定 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$.

首先我们把

$$
2\mu^{-1}(L\mu)({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1} - \not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}_{l-1})
$$

写成

$$
2(L\mu)\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)
$$

(见 (8.44) 和 (8.63)) 我们得到

$$
\begin{aligned}
& \not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1} + \mathrm{tr}\chi{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1} \\
= & 2(L\mu)\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}_{l-1} \\
& - \mu\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}h_{l-1} - {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g_{l-1}
\end{aligned}
\tag{8.66}
$$

我们将 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}$ 作用到这个方程. 把引理 8.1 运用到向量场 R_{i_l} 以及函数

$$R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi,\quad {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}_{l-1},\quad {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}h_{l-1}$$

我们有

$$\begin{aligned}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)&=\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\\ \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\not{d}({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}_{l-1})&=\not{d}({}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l)\\ \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\not{d}({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}h_{l-1})&=\not{d}({}^{(i_1\cdots i_l)}h_l)\end{aligned}\tag{8.67}$$

(见 (8.63), (8.64)). 我们得到

$$\begin{aligned}&\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}+\mathrm{tr}\chi\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}+(R_{i_l}\mathrm{tr}\chi){}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}\\ =&\,2(L\mu)\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)+2(R_{i_l}L\mu)\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi\not{d}({}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l)+\frac{1}{2}(R_{i_l}\mathrm{tr}\chi)\not{d}({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}_{l-1})\\ &-\mu\not{d}({}^{(i_1\cdots i_l)}h_l)-(R_{i_l}\mu)\not{d}({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}h_{l-1})-\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g_{l-1}\end{aligned}\tag{8.68}$$

然后把引理 8.3 运用到 $Y=R_{i_l},\xi={}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}$ 有

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}=\not{\mathcal{L}}_L\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}-\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_l})}Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}\tag{8.69}$$

由 (8.63), 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}=\mu\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)+\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\check{f})$$

对上式作用 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}$, 再由 (8.63) 和引理 8.1, 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}={}^{(i_1\cdots i_l)}x_l+(R_{i_l}\mu)\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\tag{8.70}$$

将 $\not{\mathcal{L}}_L$ 作用到 (8.70) 并由

$$LR_{i_l}\mu=R_{i_l}L\mu+{}^{(R_{i_l})}Z\mu\tag{8.71}$$

以及引理 8.2 的结论:

$$[L,R_{i_l}]={}^{(R_{i_l})}Z\tag{8.72}$$

意味着

$$\begin{aligned}\not{\mathcal{L}}_L\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}=&\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l+(R_{i_l}\mu)\not{\mathcal{L}}_L\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\\ &+(R_{i_l}L\mu+{}^{(R_{i_l})}Z\mu)\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\end{aligned}\tag{8.73}$$

把 (8.72) 代入 (8.69) 以及 (8.68) 中的结果, 然后用 (8.70) 重写 (8.68) 左端第二项, 我们就得到了命题中关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 的传输方程, 其中 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 与 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_{l-1}$ 有如下递推关系式:

$$
{}^{(i_1\cdots i_l)}g_l = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g_{l-1} - \not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_l})}Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1} + {}^{(i_1\cdots i_l)}y_l \tag{8.74}
$$

将命题 8.2 运用到这个递推关系式, 把 $S_{t,u}$ 上 1- 形式组成的空间取为 X, 把 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}y_l - \not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_l})}Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x_{l-1}$ 分别取为 x_n, y_n, 则定理得证. □

注意到 $S_{t,u}$ 上 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 当 $j=1$ 时变为

$$
a_0 = \not{\mathcal{L}}_L \not{d}\mathrm{tr}\chi + \mathrm{tr}\chi \not{d}\mathrm{tr}\chi + \not{d}h_0 \tag{8.75}
$$

定义

$$
L\mathrm{tr}\chi + |\chi|^2 = f_0 \tag{8.76}
$$

对上式作用 $\not{d}$, 由引理 8.1 以及事实

$$
|\chi|^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi)^2 + h_0,
$$

我们得到

$$
a_0 = \not{d}f_0 \tag{8.77}
$$

对 $j \geqslant 2$, 我们将 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}$ 作用到 (8.75), 并由 (8.76) 得到如下关于 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 的表达式:

$$
{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1} = \not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}f_0) + {}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1} \tag{8.78}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}\\
&= [\not{\mathcal{L}}_L, \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}]\not{d}\mathrm{tr}\chi\\
&\quad + \sum_{m=1}^{j-1}\sum_{k_1<\cdots<k_m=1}^{j-1}(R_{i_{k_m}}\cdots R_{i_{k_1}}\mathrm{tr}\chi)(\not{d}R_{i_{j-1}}\overset{>i_{k_m}\cdots i_{k_1}<}{\cdots}R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)
\end{aligned} \tag{8.79}
$$

这里以及后面的符号 > < 表示被包含在其中的指标是没有的. 用如下引理, 我们可以得到 (8.79) 右端第一项的一个显式表达式. 这个引理可以用引理 8.3 以及数

学归纳法证明.

引理 8.4 对任意正整数 l 和任意 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 我们有

$$[\not{\mathcal{L}}_L, \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}]\xi = \sum_{k=0}^{l-1} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} \not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \xi$$

把这个运用到 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\not{d}\mathrm{tr}\chi$, 我们得到

$$[\not{\mathcal{L}}_L, \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}]\not{d}\mathrm{tr}\chi = \sum_{m=0}^{j-2} \not{d}(R_{i_{j-1}} \cdots R_{i_{j-m}} {}^{(R_{i_{j-m-1}})}Z R_{i_{j-m-2}} \cdots R_{i_1} \mathrm{tr}\chi) \tag{8.80}$$

我们接下来研究命题 8.3 的传输方程中各项的阶数. 我们约定 $\psi_\alpha, \alpha = 0,1,2,3$ 的阶数为 0, 所以焓 h 以及声学度量 $g, \bar{g}, \not{g}$ 的阶数同样为 0. 由于 μ, κ 是声学度量 g 在另一个局部坐标系下的分量, 所以它们的阶数同样是 0. 从而 L^μ, T^i 和 α 的阶数同样是 0, 进而 $\psi_L, \psi_{\hat{T}}$ 和 $\not{\psi}$ 的阶数也是 0. 而 $\not{\phi}$, ϕ_L, ω_{LL} 和 $\omega_{L\hat{T}}$ 则是一阶, 所以 $\kappa^{-1}\zeta$ 和 $\not{k}$ 也是一阶. 这一章的研究重点 χ 也是一阶. 设 $l = n-1$, 我们将用 ψ_α 的 $n+1$ 阶导数来估计 χ 的 n 阶球面导数. 由 $\check{f}$ 的定义 (见 (8.27)), 我们知道 $\check{f}$ 的阶数是 1. 所以 $\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l$ 是 $l+2$ 阶的, 它的主部包含 h 的 $l+2$ 阶导数, 以及 μ 的 $l+1$ 阶球面导数.

我们接下来研究 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$. 首先我们应该研究 $\not{d}\check{g}$, $L\mathrm{tr}\chi + |\chi|^2$, 它们和 $\not{d}\check{f}$ 一起表示 g_0. 由 (8.38), 我们知道 $L\mathrm{tr}\chi + |\chi|^2$ 的阶数为 2. 它的主部是 $\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\not{\Delta}h$. 函数 μ 并没有出现在 $L\mathrm{tr}\chi + |\chi|^2$ 中. 我们接下来研究 $\not{d}\check{g}$. 由定义 (8.29), 我们知道 $\not{d}\check{g}$ 包含 μ 的一阶导数, 以及 ψ_α 的二阶导数. 所以

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} g_0$$

即 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 表达式中的第一项是 $l+2$ 阶的, 并且它的主部是 ψ_α 的 $l+2$ 阶导数. 同样它也包含 μ 的 $l+1$ 阶导数.

我们现在考虑 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 表达式中的最后一项, 即

$$\sum_{k=0}^{l-1} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} {}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y_{l-k} \tag{8.81}$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_j)}y_j$ 是如下各式的和:

$${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}, \quad \not{d}(R_{i_{j-1}} \cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi), \quad \not{d}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\check{f}_{j-1}$$

它们系数

$$R_{i_j}\mu$$
$$\mu R_{i_j}\mathrm{tr}\chi - R_{i_j}L\mu + {}^{(R_{i_j})}Z\mu = \mu R_{i_j}(\mathrm{tr}\chi - e) - R_{i_j}m + {}^{(R_{i_j})}Z\mu - eR_{i_j}\mu$$
$$\frac{1}{2}(R_{i_j}\mathrm{tr}\chi)$$

的阶分别是 1, 2, 2. 前面两个系数含有 μ 的一阶球面导数. $\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)$ 和 $\not{d}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\check{f}_{j-1}$ 的阶是 $j+1$. 另一方面 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 由 (8.78) 给出. 由上面关于 f_0 的讨论, (8.78) 右端第一项是 $j+2$ 阶的, 它的主部是 h 的球面导数. 这就是 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 中的主部. 右端第二项 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}$ (见 (8.79)) 是低阶项, 阶数是 $j+1$. 实际上只有 (8.79) 中的第一项 (见 (8.80)) 是 $j+1$ 阶, 而第二项双重求和是 j 阶. 同样, ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 不依赖于函数 μ. 所以 ${}^{(i_1\cdots i_j)}y_j$ 是 $j+2$ 阶的, 并且它的主部是 h 的 $j+2$ 阶球面导数. 从而 (8.81) 是 $l+2$ 阶的, 它的主部是 h 的 $l+2$ 阶球面导数. 此外 (8.81) 还包含 μ 的 l 阶球面导数.

为了完成对 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 的研究, 我们必须考虑

$$\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} \tag{8.82}$$

它可以写成

$$\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} \tag{8.83}$$

减去交换子

$$\sum_{k=1}^{l-1}[\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z},\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}]{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} \tag{8.84}$$

用如下引理可以看到, 交换子项是低阶项.

引理 8.5 对任意与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 X 和任意 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ 以及正整数 l, 我们有

$$[\not{\mathcal{L}}_X,\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}]\xi = -\sum_{j=1}^{l}\sum_{k_1<\cdots<k_j=1}^{l}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(i_{k_1}\cdots i_{k_j})}Y}{}^{(i_1\overset{>i_{k_1}\cdots i_{k_j}<}{\cdots} i_l)}\xi_{l-j}$$

这里 ${}^{(i_{k_1}\cdots i_{k_j})}Y$ 是与 $S_{t,u}$ 相切的向量场:

$${}^{(i_{k_1}\cdots i_{k_j})}Y = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k_j}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k_1}}}X$$

而 ${}^{(i_1\cdots i_m)}\xi_m$ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$^{(i_1\cdots i_m)}\xi_m = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\xi$$

证明是运用数学归纳法. 当 $l=1$ 时, 由于所有的量都是限制在 $S_{t,u}$ 上, 所以引理的结论是微分几何中一个标准的结果.

由引理 8.5 可以看出 (8.84) 是如下量的相反数:

$$\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m_1<\cdots<m_j=l-k+1}^{l}\not{\mathcal{L}}_{(i_{m_1}\cdots i_{m_j};i_{l-k})Z}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\overset{>i_{m_j}\cdots i_{m_1}<}{\cdots}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} \tag{8.85}$$

这里没有指标 $i_{m_j},\cdots,i_{m_1}$, 并且 ${}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_j};i_{l-k})}Z$ 是与 $S_{t,u}$ 相切的向量场:

$$^{(i_{m_1}\cdots i_{m_j};i_{l-k})}Z = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m_j}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m_1}}}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z \tag{8.86}$$

由 (6.57), 我们知道 ${}^{(R_i)}Z$ 是一阶的, 它的声学主部包含 χ. 所以 ${}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_j};i_{l-k})}Z$ 是 $j+1$ 阶的, 并且它的声学主部是 χ 的 j 阶球面导数. 在 (8.85) 中, 1- 形式

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\overset{>i_{m_j}\cdots i_{m_1}<}{\cdots}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} \tag{8.87}$$

是 $l-j+1$ 阶的, 这是因为它是 ${}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1}$ 的 $k-j$ 阶球面导数. 如果 X 是 $S_{t,u}$ 上的 m 阶向量场, ξ 是 $S_{t,u}$ 上的 n 阶 1- 形式, 则 $\not{\mathcal{L}}_X\xi$ 的阶是 $\max\{m,n\}+1$. 这很容易由如下公式导出:

$$(\not{\mathcal{L}}_X\xi)(Y) = X(\xi(Y)) - \xi(\not{\mathcal{L}}_X Y)$$

所以 (8.85) 三重和的阶数是

$$\max\{j+1, l-j+1\}+1$$

两种极端情形分别对应于 $j=1$ 和 $j=l-1$, 此时阶数最高, 对应于 $l+1$. 所以 (8.85) 是 $l+1$ 阶的, 是一个低阶项.

我们现在转向主部 (8.83). 由 (8.44) 以及关于函数 ϕ 的如下事实:

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{d}\phi = \not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\phi)$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1}\\
=&\ {}^{(i_l\cdots i_{l-k+1}i_{l-k-1}\cdots i_1)}x_{l-1}\\
&+\sum_{j=1}^{k}\sum_{m_1<\cdots<m_j=l-k+1}^{l}(R_{i_{m_j}}\cdots R_{i_{m_1}}\mu)\not{d}(R_{i_l}\overset{>i_{m_j}\cdots i_{m_1}i_{l-k}<}{\cdots}R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)
\end{aligned}
\tag{8.88}
$$

这里第一项是 $l+1$ 阶的, 而第二项的双重求和是 l 阶的. (8.88) 中第一项对 (8.83) 的贡献是 (8.82) 的主部. 它是

$$
\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})}{}_Z{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}
\tag{8.89}
$$

从而 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 的声学主部全部包含在 (8.89) 中. 并且 (8.82) 不包含函数 μ 的主阶项.

我们将用

$$
\max_j|{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_lj)}x_l|
$$

来逐点估计 (8.89) 中的每一项.

引理 8.6 设 ϕ 和 ρ 是任意两个函数, 而 μ 是一个非负函数. 记 ξ 为 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$
\xi=\mu\not{d}\phi+\not{d}\rho
$$

以及 η_j 为 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$
\eta_j=\mu\not{d}(R_j\phi)+\not{d}(R_j\rho),j=1,2,3
$$

则对任意与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 X, 我们有如下逐点估计:

$$
\begin{aligned}
|\not{\mathcal{L}}_X\xi|\leqslant&\ C(1+t)^{-1}(|X|(\max_j|\eta_j|+2\max_j|\not{d}(R_j\rho)|+(1+t)|\not{d}\mu||\not{d}\phi|)\\
&+(\max_j|\not{\mathcal{L}}_{R_j}X|)(\mu|\not{d}\phi|+|\not{d}\rho|))
\end{aligned}
$$

证明 我们有

$$
\not{\mathcal{L}}_X\xi=\mu\not{d}(X\phi)+(X\mu)\not{d}\phi+\not{d}(X\rho)
\tag{8.90}
$$

所以

$$
|\not{\mathcal{L}}_X\xi|\leqslant\mu|\not{d}(X\phi)|+|X||\not{d}\mu||\not{d}\phi|+|\not{d}(X\rho)|
\tag{8.91}
$$

现在由 **H0**,

$$|\not{d}(X\phi)| \leqslant C(1+t)^{-1}\max_j |R_j(X\phi)| \tag{8.92}$$

以及

$$R_j(X\phi) = X(R_j\phi) + [R_j, X]\phi = X\cdot\not{d}(R_j\phi) + (\not{\mathcal{L}}_{R_j}X)\cdot\not{d}\phi \tag{8.93}$$

所以

$$\max_j |R_j(X\phi)| \leqslant |X|\max_j|\not{d}(R_j\phi)| + (\max_j|\not{\mathcal{L}}_{R_j}X|)|\not{d}\phi| \tag{8.94}$$

从而我们得到

$$|\not{d}(X\phi)| \leqslant C(1+t)^{-1}(|X|\max_j|\not{d}(R_j\phi)| + (\max_j|\not{\mathcal{L}}_{R_j}X|)|\not{d}\phi|) \tag{8.95}$$

由 η_j 的定义有

$$\begin{aligned}\mu\max_j|\not{d}(R_j\phi)| &= \max_j|\mu\not{d}(R_j\phi)| \\ &= \max_j|\eta_j - \not{d}(R_j\rho)| \leqslant \max_j|\eta_j| + \max_j|\not{d}(R_j\rho)|\end{aligned} \tag{8.96}$$

并且由 (8.95) 中取 ϕ 为 ρ, 我们有

$$|\not{d}(X\rho)| \leqslant C(1+t)^{-1}(|X|\max_j|\not{d}(R_j\rho)| + (\max_j|\not{\mathcal{L}}_{R_j}X|)|\not{d}\rho|) \tag{8.97}$$

由 (8.95)—(8.97), 再由 (8.91), 引理得证. □

现在取 $\phi = R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}R_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi$ 以及 $\rho = R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}R_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}\check{f} = {}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}\check{f}_{l-1}$. 那么 ξ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}$, η_j 是 $S_{t,u}$ 上 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l j)}x_l$. 并且我们取 X 为与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 ${}^{(R_{i_{l-k}})}Z$. 注意到

$$\mu|\not{d}\phi| + |\not{d}\rho| \leqslant |\xi| + 2|\not{d}\rho|,$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&|\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}| \\
\leqslant\ & C(1+t)^{-1}(|^{(R_{i_{l-k}})}Z|(\max_j |^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l j)}x_l| \\
&+2\max_j |\not{d}(^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l j)}\check{f}_l)| \\
&+(1+t)|\not{d}\mu||\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}R_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)|) \\
&+(\max_j |\not{\mathcal{L}}_{R_j}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z|)(|^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}| \\
&+2|\not{d}(^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}\check{f}_{l-1})|))
\end{aligned}
\tag{8.98}
$$

8.1.3 $S_{t,u}$ 上的椭圆估计

接下来我们继续考虑由命题 8.3 给出的关于 $^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 的传输方程. 我们还需要研究 $\mu\not{d}(^{(i_1\cdots i_l)}h_l)$ 这一项. 由于由 (8.64) 给出的 $^{(i_1\cdots i_l)}h_l$ 是关于 $|\hat{\chi}|^2$ 的 l 阶球面导数, 所以我们要考虑的这一项是一个声学主部, 并且它包含 $\hat{\chi}$ 的 $l+1$ 阶球面导数, 但是不包含 $\mathrm{tr}\chi$, 这一项我们可以用关于 $^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 的传输方程来界定.

我们要考虑的这一项是从 (8.36), 即关于 $x_0=\mu\not{d}\mathrm{tr}\chi+\not{d}\check{f}$, 的传输方程右端而来的:

$$
\mu\not{d}(|\hat{\chi}|^2)=2\mu\hat{\chi}\cdot\not{D}\hat{\chi}
$$

现在传输方程 (8.36) 必须与 Codazzi 方程 (4.30) 合起来考虑:

$$
\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\hat{\chi}=\frac{1}{2}\not{d}\mathrm{tr}\chi+i \tag{8.99}
$$

其中

$$
i=\beta^*_A-\mu^{-1}(\zeta_B\chi_A^B-\zeta_A\mathrm{tr}\chi) \tag{8.100}
$$

它在 $\mu\to 0$ 时是正则的. 方程 (8.99) 使我们可以在 $S_{t,u}$ 上用 $\not{d}\mathrm{tr}\chi$ 和 ψ_μ 的二阶导数来估计 $\hat{\chi}$ 和 $\not{D}\hat{\chi}$. 而传输方程 (8.36) 使我们可以沿着每个类声测地线用 $\not{d}(|\hat{\chi}|^2)$, 即 $\hat{\chi}$ 和 $\not{D}\hat{\chi}$, 以及 ψ_μ 的二阶导数来估计 $\not{d}\mathrm{tr}\chi$. 所以当我们在 C_u 上合起来考虑传输方程 (8.36) 和 Codazzi 方程 (8.99) 时, 我们可以用 ψ_μ 的二阶导数来估计 χ 及其一阶导数. 用这种方法可以不损失导数. 这种把关于 χ 沿 C_u 生成子的传输方程与在每个 $S_{t,u}$ 上的 Codazzi 方程耦合的想法也出现在了 [6] 中, 在那里 Ricci 曲率张量为 0.

为了得到 (8.99) 的一个高阶版本, 我们将运用如下引理:

引理 8.7 设 (M,g) 是一个二维 Riemann 流形, 设 X 是 M 上的任意一个向量场, 设 θ 是 (M,g) 上的一个无迹的二阶对称协变张量场, 并且满足如下方程:

$$\mathrm{div}_g\theta = f \tag{8.101}$$

其中 f 是 M 上的一个 1- 形式. 那么 $\hat{\mathcal{L}}_X\theta$, 即 $\mathcal{L}_X\theta$ 的无迹部分满足如下方程:

$$\mathrm{div}_g\hat{\mathcal{L}}_X\theta = {}^{(X)}\dot{f} \tag{8.102}$$

其中 ${}^{(X)}\dot{f}$ 是一个 1- 形式, 它在任意一个局部标架下为

$$\begin{aligned}{}^{(X)}\dot{f}_a = &(\mathcal{L}_X f)_a + \frac{1}{2}\mathrm{tr}{}^{(X)}\pi f_a \\ &+\frac{1}{2}{}^{(X)}\hat{\pi}^{bc}(\nabla_b\theta_{ac} + \nabla_c\theta_{ab} - \nabla_a\theta_{bc}) + (\mathrm{div}_g{}^{(X)}\hat{\pi})^b\theta_{ab}\end{aligned}$$

这里 ${}^{(X)}\pi = \mathcal{L}_X g$.

证明 设 ϕ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群, ϕ_{t*} 是与之相对应的拉回. 我们有

$$\mathrm{div}_{\phi_{t*}g}(\phi_{t*}\theta) = \phi_{t*}(\mathrm{div}_g\theta) = \phi_{t*}f \tag{8.103}$$

现在在任意一个局部坐标系中,

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}_g\theta)_a &= (g^{-1})^{bc}\nabla_c\theta_{ab} \\ &= (g^{-1})^{bc}(\frac{\partial\theta_{ab}}{\partial x^c} - \Gamma^d_{ca}\theta_{db} - \Gamma^d_{cb}\theta_{ad})\end{aligned} \tag{8.104}$$

其中 Γ^c_{ab} 是度量 g 的联络系数. 类似地,

$$(\mathrm{div}_{\phi_{t*}g}(\phi_{t*}\theta))_a = ((\phi_{t*}g)^{-1})^{bc}(\frac{\partial(\phi_{t*}\theta)_{ab}}{\partial x^c} - \overset{\phi_{t*}g}{\Gamma^d_{ca}}(\phi_{t*}\theta)_{db} - \overset{\phi_{t*}g}{\Gamma^d_{cb}}(\phi_{t*}\theta)_{ad}) \tag{8.105}$$

其中 $\overset{\phi_{t*}g}{\Gamma^c_{ab}}$ 是度量 $\phi_{t*}g$ 的联络系数. 我们有

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{cd}(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d}) \tag{8.106}$$

和

$$\overset{\phi_{t*}g}{\Gamma^c_{ab}} = \frac{1}{2}((\phi_{t*}g)^{-1})^{cd}(\frac{\partial(\phi_{t*}g)_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial(\phi_{t*}g)_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial(\phi_{t*}g)_{ab}}{\partial x^d}) \tag{8.107}$$

由定义,

$$(\frac{d}{dt}\phi_{t*}g)_{t=0} = \mathcal{L}_X g = {}^{(X)}\pi \tag{8.108}$$

对 (8.107) 关于 t 在 $t=0$ 处微分, 再由 (8.106), 我们得到如下公式:

$$(\frac{d}{dt}\overset{\phi_{t*}g}{\Gamma^c_{ab}})_{t=0} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{cd}(\nabla_a{}^{(X)}\pi_{bd} + \nabla_b{}^{(X)}\pi_{ad} - \nabla_d{}^{(X)}\pi_{ab}) \tag{8.109}$$

然后对 (8.105) 关于 t 在 $t=0$ 微分, 再由 (8.109) 和 (8.108) 以及定义

$$(\frac{d}{dt}\phi_{t*}\theta)_{t=0} = \mathcal{L}_X\theta \tag{8.110}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&(\frac{d}{dt}(\mathrm{div}_{\phi_{t*}g}(\phi_{t*}\theta))_a)_{t=0}\\ =& (\mathrm{div}_g(\mathcal{L}_X\theta))_a - {}^{(X)}\pi^{bc}\nabla_c\theta_{ab}\\ &-\frac{1}{2}((\nabla_a{}^{(X)}\pi^{bc})\theta_{bc} + (2\nabla_c{}^{(X)}\pi^{bc} - \nabla^b\mathrm{tr}^{(X)}\pi)\theta_{ab})\end{aligned} \tag{8.111}$$

由 (8.103) 和定义

$$(\frac{d}{dt}\phi_{t*}f)_{t=0} = \mathcal{L}_X f \tag{8.112}$$

我们有

$$\mathrm{div}_g(\mathcal{L}_X\theta) = {}^{(X)}f' \tag{8.113}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(X)}f'_a =& (\mathcal{L}_X f)_a + {}^{(X)}\pi^{bc}\nabla_c\theta_{ab}\\ &+\frac{1}{2}((\nabla_a{}^{(X)}\pi^{bc})\theta_{bc} + (2\nabla_c{}^{(X)}\pi^{bc} - \nabla^b\mathrm{tr}^{(X)}\pi)\theta_{ab})\end{aligned} \tag{8.114}$$

实际上上述结论对任意 n 维 Riemann 流形 M 都成立, 并且没有用到 θ 是无迹的这一事实. 在当前情形 M 是二维的, 把 ${}^{(X)}\pi$ 分解成无迹部分和迹部分,

$${}^{(X)}\pi = {}^{(X)}\hat{\pi} + \frac{1}{2}g\mathrm{tr}^{(X)}\pi \tag{8.115}$$

我们可以把 (8.114) 写成

$$\begin{aligned}{}^{(X)}f'_a =& (\mathcal{L}_X f)_a + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(X)}\pi f_a + {}^{(X)}\hat{\pi}^{bc}\nabla_c\theta_{ab}\\ &+\frac{1}{2}(\nabla_a{}^{(X)}\hat{\pi}^{bc})\theta_{bc} + (\nabla_c{}^{(X)}\hat{\pi}^{bc})\theta_{ab}\end{aligned} \tag{8.116}$$

现在,

$$\mathrm{tr}(\mathcal{L}_X\theta) = (g^{-1})^{ab}(\mathcal{L}_X\theta)_{ab} = -(\mathcal{L}_X g^{-1})^{ab}\theta_{ab} = {}^{(X)}\pi^{ab}\theta_{ab} = {}^{(X)}\hat{\pi}\cdot\theta \tag{8.117}$$

这里我们用到了 θ 是无迹的, 所以 $\hat{\mathcal{L}}_X\theta$ 由

$$\hat{\mathcal{L}}_X\theta = \mathcal{L}_X\theta - \frac{1}{2}g({}^{(X)}\hat{\pi}\cdot\theta) \tag{8.118}$$

给出. 注意到对任意函数 ψ 我们有

$$\mathrm{div}_g(g\psi) = d\psi$$

从而我们得到

$$\mathrm{div}_g(\hat{\mathcal{L}}_X\theta) = \mathrm{div}_g(\mathcal{L}_X\theta) - \frac{1}{2}d({}^{(X)}\hat{\pi}\cdot\theta) \tag{8.119}$$

所以, 若定义

$${}^{(X)}\dot{f} = {}^{(X)}f' - \frac{1}{2}d({}^{(X)}\hat{\pi}\cdot\theta) \tag{8.120}$$

我们得到 $\mathrm{div}_g\hat{\mathcal{L}}_X\theta = {}^{(X)}\dot{f}$, 其中 ${}^{(X)}\dot{f}$ 如引理中给出的那样. □

命题 8.4 对每个非负整数 l 和多重指标 $(i_1,\cdots,i_l)$, $S_{t,u}$ 上的二阶对称无迹协变张量场

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l = \hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_1}}\hat{\chi}$$

满足椭圆组

$$\not{\mathrm{div}}({}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l) = \frac{1}{2}\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) + {}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$$

其中 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 由

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}i_l =& (\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi})\cdots(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_1})}\not{\pi})i \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1}(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi})\cdots(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{l-k+1}})}\not{\pi})^{(i_1\cdots i_{l-k})}q_{l-k}\end{aligned}$$

给出. 这里 i 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式, 它由 (8.100) 给出, 并且对每个 $j=1,\cdots,l$, ${}^{(i_1\cdots i_j)}q_j$ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式, 它由

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_j)}q_{j,A} =& \frac{1}{4}\mathrm{tr}^{(R_{i_j})}\not{\pi}\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi) \\ &+\frac{1}{2}{}^{(R_{i_j})}\hat{\not{\pi}}^{BC}(\not{D}_B({}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1})_{AC} + \not{D}_C({}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1})_{AB} \\ &-\not{D}_A({}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1})_{BC}) + (\not{\mathrm{div}}{}^{(R_{i_j})}\hat{\not{\pi}})^B({}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1})_{AB}\end{aligned}$$

给出.

证明 当 $l=0$ 时, 由于 $i=i_0$, 命题就是 (8.99). 由归纳假设, 上述椭圆组对 $l-1$ 成立:

$$\not{d}\mathrm{iv}({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\chi}_{l-1})=\frac{1}{2}\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)+{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}i_{l-1}$$

在引理 8.7 中把 (M,g) 取为 $(S_{t,u},\not{g})$, θ 取为 ${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\chi}_{l-1}$, X 取为 R_{i_l}, 以及 f 取为

$$\frac{1}{2}\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)+{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}i_{l-1}$$

考虑到如下事实:

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\not{d}(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)=\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)$$

我们得到一个关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 的递推关系式:

$$^{(i_1\cdots i_l)}i_l=\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}i_{l-1}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi}^{(i_1\cdots i_{l-1})}i_{l-1}+{}^{(i_1\cdots i_l)}q_l \tag{8.121}$$

将命题 8.2 运用到这个递推关系式, 其中把 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式组成的空间取成 X, 把算子

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi}$$

取成 A_n, 以及把 ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_l)}q_l$ 分别取成 x_n 和 y_n, 从而命题得证. □

我们接下来研究 ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 的阶数. 我们从 i (见 (8.100)) 开始. 由 (4.30), (4.32) 和 (4.33), 我们知道 i 中没有二阶项, 所以 ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 表达式中的第一项不含主部. 并且第二项的阶数是 $l+1$. 这是因为 ${}^{(i_1\cdots i_j)}q_j$ 是 $j+1$ 阶的. 同样, ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 不包含 μ.

注记 由命题 8.3 中的传输方程, 我们可以由 $2\mu\hat{\chi}\not{D}(\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_1}}\hat{\chi})$ 以及 ψ_μ 的 $l+2$ 阶导数来界定 $\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)$. 而用命题 8.4 中的椭圆组, 我们可以由 $\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)$ 以及 ψ_μ 的 $l+1$ 阶导数来界定 $\not{D}(\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_1}}\hat{\chi})$.

由于椭圆组与命题 8.3 中的传输方程耦合起来, 椭圆组右端的项 $\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_1}}\hat{\chi}$ 将用 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 表示出来. 由 (8.44), 我们有

$$\mu\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)={}^{(i_1\cdots i_l)}x_l-\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l$$

我们只能用 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 来界定 μ 与椭圆组右端的乘积. 所以我们需要一个 $S_{t,u}$ 上带 μ- 权的 L^2 估计.

引理 8.8 设 (M,g) 是一个二维紧 Riemann 流形, θ 是 (M,g) 的二阶无迹对称协变张量场, 并且满足方程

$$\mathrm{div}_g\theta = f \tag{8.122}$$

其中 f 是 M 上的 1- 形式. 设 μ 是 M 上任意一个非负函数. 则在 M 上有如下估计:

$$\int_M \mu^2(\frac{1}{2}|\nabla\theta|^2 + 2K|\theta|^2)d\mu_g \leqslant 3\int_M \mu^2|f|^2 d\mu_g + 3\int_M |d\mu|^2|\theta|^2 d\mu_g$$

其中 K 是 (M,g) 的 Gauss 曲率.

证明 考虑在任意一个局部标架下的三阶协变张量场

$$\omega_{abc} = \nabla_a\theta_{bc} - \nabla_b\theta_{ac} \tag{8.123}$$

对任意向量场 X, $\omega_{abc}X^c$ 定义了 M 上的一个 2- 形式. 由于 $\dim M = 2$, 这个 2- 形式必然是一个函数 ϕ 与 (M,g) 的体积形式 ϵ 的乘积. 由于 ϕ 线性依赖于 X, 那么必存在一个 M 上的 1- 形式 e 使得 $e\cdot X = \phi$. 所以我们有

$$\omega_{abc} = \epsilon_{ab}e_c \tag{8.124}$$

把 (8.124) 的右端与 $(g^{-1})^{ac}$ 缩并, 我们得到

$$(g^{-1})^{ac}\epsilon_{ab}e_c = e^a\epsilon_{ab} = {}^*e_b$$

(这正是 e 的 Hodge 对偶). 把 (8.124) 的左端与 $(g^{-1})^{ac}$ 缩并, 并且考虑到 $(g^{-1})^{ac}\cdot\theta_{ac} = 0$, 我们得到

$$(g^{-1})^{ac}\omega_{abc} = (\mathrm{div}\theta)_b = f_b$$

从而

$${}^*e = f, \quad e = -{}^*f \tag{8.125}$$

并且 (8.124) 变为

$$\omega_{abc} = -\epsilon_{ab}{}^*f_c \tag{8.126}$$

由

$$\epsilon_{ac}\epsilon_b{}^c = g_{ab}$$

我们有

$$\frac{1}{2}\omega_{abc}\omega^{abc} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^*f_c\epsilon^{ab*}f^c = |^*f|^2 = |f|^2 \tag{8.127}$$

另一方面, 由 (8.123) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\omega_{abc}\omega^{abc} &= \frac{1}{2}(\nabla_a\theta_{bc} - \nabla_b\theta_{ac})(\nabla^a\theta^{bc} - \nabla^b\theta^{ac}) \\ &= |\nabla\theta|^2 - \nabla_a\theta_{bc}\nabla^b\theta^{ac}\end{aligned} \tag{8.128}$$

由

$$\nabla_a\theta_{bc}\nabla^b\theta^{ac} = \nabla^b(\theta^{ac}\nabla_a\theta_{bc}) - \theta^{ac}\nabla^b\nabla_a\theta_{bc} \tag{8.129}$$

以及微分几何中一个熟知的结论, 我们有

$$\begin{aligned}\nabla^b\nabla_a\theta_{bc} - \nabla_a\nabla^b\theta_{bc} &= R_b{}^{db}{}_a\theta_{dc} + R_c{}^{db}{}_a\theta_{bd} \\ &= S^d{}_a\theta_{dc} + R_c{}^{db}{}_a\theta_{bd}\end{aligned} \tag{8.130}$$

其中 R_{abcd} 是曲率张量, $S_{ab} = (g^{-1})^{cd}R_{cadb}$ 是 (M,g) 的 Ricci 张量. 由于 M 是二维的, 我们有

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad S_{ab} = Kg_{ab}$$

所以由 $\mathrm{tr}\theta = 0$, (8.130) 的右端为

$$K\delta_a^d\theta_{dc} + K(\delta_c^b\delta_a^d - g_{ca}(g^{-1})^{db})\theta_{bd} = 2K\theta_{ac}$$

那么 (8.130) 化为

$$\nabla^b\nabla_a\theta_{bc} - \nabla_a\nabla^b\theta_{bc} = 2K\theta_{ac} \tag{8.131}$$

代入 (8.129), 我们得到

$$\nabla_a\theta_{bc}\nabla^b\theta^{ac} = \nabla^b(\theta^{ac}\nabla_a\theta_{bc}) - \theta^{ac}\nabla_a\nabla^b\theta_{bc} - 2K|\theta|^2 \tag{8.132}$$

关于右端的第二项我们有

$$\theta^{ac}\nabla_a\nabla^b\theta_{bc} = \nabla_a(\theta^{ac}\nabla^b\theta_{bc}) - (\nabla_a\theta^{ac})(\nabla^b\theta_{bc}) = \nabla_a(\theta^{ac}\nabla^b\theta_{bc}) - |f|^2$$

代入 (8.132) 中有

$$\nabla_a\theta_{bc}\nabla^b\theta^{ac} = \mathrm{div}_g J - 2K|\theta|^2 + |f|^2 \tag{8.133}$$

其中 J 是如下向量场:

$$J^a = \theta^b{}_c\nabla_b\theta^{ac} - \theta^a{}_c\nabla_b\theta^{bc} = \theta^b{}_c\nabla_b\theta^{ac} - \theta^a{}_c f^c \tag{8.134}$$

将 (8.133) 代入 (8.128), 我们有

$$\frac{1}{2}\omega_{abc}\omega^{abc} = |\nabla\theta|^2 + 2K|\theta|^2 - |f|^2 - \mathrm{div}_g J \tag{8.135}$$

将 (8.135) 与 (8.127) 比较, 我们有

$$|\nabla\theta|^2 + 2K|\theta|^2 = 2|f|^2 + \mathrm{div}_g J \tag{8.136}$$

将该式与 μ^2 相乘, 在 M 上积分, 我们得到

$$\begin{aligned}&\int_M \mu^2(|\nabla\theta|^2 + 2K|\theta|^2)d\mu_g\\ =& 2\int_M \mu^2|f|^2 d\mu_g + \int_M \mu^2\mathrm{div}_g J d\mu_g\end{aligned} \tag{8.137}$$

由

$$\mu^2\mathrm{div}_g J = \mathrm{div}_g(\mu^2 J) - 2\mu(J\cdot d\mu)$$

以及 M 是紧的, 我们有

$$\int_M \mu^2\mathrm{div}_g J d\mu_g = -2\int_M \mu(J\cdot d\mu)d\mu_g \tag{8.138}$$

由 (8.134), 我们可以估计

$$|J| \leqslant |\theta|(|\nabla\theta| + |f|) \tag{8.139}$$

所以

$$\begin{aligned}-2\int_M \mu(J\cdot d\mu)d\mu_g &\leqslant 2\int_M \mu|J||d\mu|d\mu_g\\ &\leqslant 2\int_M |d\mu||\theta|(\mu|\nabla\theta| + \mu|f|)d\mu_g\end{aligned}$$

运用不等式

$$\begin{aligned}2|d\mu||\theta|\mu|\nabla\theta| &\leqslant \frac{1}{2}\mu^2|\nabla\theta|^2 + 2|d\mu|^2|\theta|^2\\ 2|d\mu||\theta|\mu|f| &\leqslant \mu^2|f|^2 + |d\mu|^2|\theta|^2\end{aligned}$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&-2\int_M \mu(J\cdot d\mu)d\mu_g \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_M \mu^2|\nabla\theta|^2 d\mu_g + \int_M \mu^2|f|^2 d\mu_g + 3\int_M |d\mu|^2|\theta|^2 d\mu_g
\end{aligned} \tag{8.140}
$$

从而引理得证. □

接下来我们将导出 $S_{t,u}$ 的 Gauss 曲率 K 的估计, 我们将用到第六章的连续性假设 **A**, **E**, **F**.

引理 8.9 在连续性假设 **A**, **E**, **F** 下, 有如下估计成立:

$$
|K - r^{-2}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))
$$

特别地, 若 δ_0 足够小, 我们有

$$
K \geqslant C^{-1}(1+t)^{-2}
$$

证明 由 (3.27), (3.31) 和 (3.36), 我们有如下关于 K 的表达式:

$$
K = \frac{1}{2}\eta^{-2}((\mathrm{tr}\chi)^2 - |\chi|^2) - \eta^{-1}(\mathrm{tr}\not{k}\mathrm{tr}\chi - \chi\cdot\not{k}) + \rho
$$

由 (3.5), (3.33) 和 (4.5), 当 $\mu \to 0$ 时 K 是正则的. 同样由 **E**, 我们知道

$$
|\rho| \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-4} \tag{8.141}
$$

由 **A2**, **E** 和 **F2**, 我们有

$$
|\eta^{-1}(\mathrm{tr}\not{k}\mathrm{tr}\chi - \chi\cdot\not{k})| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3} \tag{8.142}
$$

最后我们考虑 K 的表达式的第一项. **F2** 意味着

$$
|\frac{1}{2}((\mathrm{tr}\chi)^2 - |\chi|^2) - (\frac{1}{r})^2| \leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^3} \tag{8.143}
$$

事实上我们可以分解

$$
|\chi|^2 = |\hat{\chi}|^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi)^2
$$

以及

$$
|\frac{1}{4}(\mathrm{tr}\chi)^2 - (\frac{1}{r})^2| \leqslant |\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - \frac{1}{r}||\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi + \frac{1}{r}|
$$

由 (6.124), (6.129) 和 **F2**, 我们有

$$|\frac{1}{4}(\mathrm{tr}\chi)^2-(\frac{1}{r})^2|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))$$

同样由 **F2**, 我们有

$$|\hat{\chi}|^2\leqslant C\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2$$

所以 (8.143) 得证.

然后由 **E**, 我们有

$$|\eta^{-2}-1|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{8.144}$$

所以由 (8.143) 以及 (6.124), (6.129), 我们有

$$|\frac{1}{2}\eta^{-2}((\mathrm{tr}\chi)^2-|\chi|^2)-\frac{1}{r^2}|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{8.145}$$

引理得证. □

8.1.4 传输方程解的初步估计

我们现在把引理 8.8 运用到命题 8.4, 将 (M,g) 取为 $(S_{t,u},\not{g})$, 二阶无迹对称协变张量场 θ 取为 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l$, 1- 形式 f 取为

$$\frac{1}{2}\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)+{}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$$

在引理 8.9 将 δ_0 取得足够小, 我们有 $K\geqslant 0$, 从而

$$\begin{aligned}&\|\mu\not{D}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l\|_{L^2(S_{t,u})}\\\leqslant&\, C\|\mu\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\|_{L^2(S_{t,u})}+C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}i_l\|_{L^2(S_{t,u})}\\&+C\|\not{d}\mu\|_{L^\infty(S_{t,u})}\|^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l\|_{L^2(S_{t,u})}\end{aligned} \tag{8.146}$$

现在由 **F1**, 我们有

$$|\not{d}\mu|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{8.147}$$

同样

$$\mu\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)={}^{(i_1\cdots i_l)}x_l-\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l \tag{8.148}$$

将 (8.147) 和 (8.148) 代入 (8.146) 得到

$$\begin{aligned}
\|\mu\not{D}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l\|_{L^2(S_{t,u})} \leqslant & C\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l\|_{L^2(S_{t,u})} \\
& +C\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l\|_{L^2(S_{t,u})} + C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}i_l\|_{L^2(S_{t,u})} \\
& +C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l\|_{L^2(S_{t,u})}
\end{aligned} \tag{8.149}$$

现在回到命题 8.3 的传输方程, 设

$$^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l = \mu\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}h_l + {}^{(i_1\cdots i_l)}g_l \tag{8.150}$$

则传输方程有如下形式:

$$\begin{aligned}
& \not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}x_l \\
= & (\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l - {}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l
\end{aligned} \tag{8.151}$$

注意到 $S_{0,0}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 S^2 (Σ_0 可以被视为 $\mathbb{R}^3$). 我们可以按如下方式定义一个从 S^2 到 $S_{t,u}$ 的微分同胚 $\Phi_{t,u}$. 首先在 $t=0$, $\Phi_{0,u}$ 是由 T 在 Σ_0 上生成的流所定义的从 S^2 到 $S_{0,u}$ 的微分同胚. 然后 $\Phi_{t,u}=\Phi_t\circ\Phi_{0,u}$, 其中 Φ_t 是 L 在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中生成的流. 即 $\Phi_{t|S_{0,u}}$ 是由 C_u 的生成子所定义的从 $S_{0,u}$ 到 $S_{t,u}$ 的微分同胚. 给定 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 我们可以用 $\Phi_{t,u}$ 将其拉回到 S^2, 然后将 $\xi(t,u)=\Phi^*_{t,u}\xi$ 视为 S^2 上依赖于参数 t 和 u 的 1- 形式. 若 $\xi=\not{\mathcal{L}}_L\zeta$, 其中 ζ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式, 则 $\xi(t,u)=\frac{\partial\zeta(t,u)}{\partial t}$. 若 $\xi=\not{d}\phi$, 其中 ϕ 是函数, 则 $\xi(t,u)=\not{d}\phi(t,u)$, 其中 $\phi(t,u)=\phi\circ\Phi_{t,u}$ 是 S^2 上相对应的函数, $\not{d}\phi(t,u)$ 为其在 S^2 上的微分. 同样, 我们可以将 $S_{t,u}$ 上的诱导度量 $\not{g}$ 拉回到 S^2 并且将 $\not{g}(t,u)=\Phi^*_{t,u}\not{g}$ 视为 S^2 上依赖于参数 t 和 u 的度量. 上述对应正是在声学坐标 $(t,u,\vartheta^1,\vartheta^2)$ 下的描述, 其中 $(\vartheta^1,\vartheta^2)$ 是 S^2 延拓到 Σ_0 的坐标, 使得 $(\vartheta^1,\vartheta^2)$ 取常值时对应于与 $S_{0,u}$ 正交的直线 (所以在 Σ_0 上 $\Xi=0$).

由上所述, 我们可以将 (8.151) 视为 S^2 上关于 1- 形式 $^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t,u)$ (依赖于 (t,u)) 的方程:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}x_l \\
= & (\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l - {}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l
\end{aligned} \tag{8.152}$$

其中 $^{(i_1\cdots i_l)}x_l = {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t,u)$ 是 S^2 上依赖于 (t,u) 的 1- 形式.

接下来我们记 $(,)$ 是 S^2 上依赖于 t 和 u, 相对于度量 $\not{g}(t,u)$ 的逐点张量场内积. 对 1- 形式 $\xi(t,u)$ 和 $\zeta(t,u)$, 我们有

$$(\xi(t,u),\zeta(t,u)) = (\not{g}^{-1})^{AB}(t,u)\xi_A(t,u)\zeta_B(t,u) \tag{8.153}$$

同样地, 我们记 $|\quad|$ 为 S^2 上关于度量 $\not{g}(t,u)$, 依赖于 t 和 u 张量场的逐点模长. 所以

$$|\xi(t,u)| = \sqrt{(\xi(t,u),\xi(t,u))} \tag{8.154}$$

由 χ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \not{g}_{AB}(t,u)}{\partial t} = 2\chi_{AB}(t,u), \quad \frac{\partial (\not{g}^{-1})^{AB}(t,u)}{\partial t} = -2\chi^{AB}(t,u);\\ &\chi^{AB}(t,u) = (\not{g}^{-1})^{AC}(t,u)(\not{g}^{-1})^{BD}(t,u)\chi_{CD}(t,u)\end{aligned} \tag{8.155}$$

由 (8.153) 和 (8.155) 有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi,\zeta) = (\frac{\partial \xi}{\partial t},\zeta) + (\xi,\frac{\partial \zeta}{\partial t}) - 2\xi\cdot\chi\cdot\zeta \tag{8.156}$$

这里,

$$\xi\cdot\chi\cdot\zeta = \xi_A\chi^{AB}\zeta_B \tag{8.157}$$

特别地, 由 (8.154), 取 $\zeta=\xi$, 我们有

$$|\xi|\frac{\partial}{\partial t}|\xi| = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\xi,\xi) = (\frac{\partial \xi}{\partial t},\xi) - \xi\cdot\chi\cdot\xi \tag{8.158}$$

分解:

$$\chi_{AB} = \hat{\chi}_{AB} + \frac{1}{2}\not{g}_{AB}\mathrm{tr}\chi, \quad \chi^{AB} = \hat{\chi}^{AB} + \frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}\mathrm{tr}\chi \tag{8.159}$$

则我们有

$$\xi\cdot\chi\cdot\zeta = \xi\cdot\hat{\chi}\cdot\zeta + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi(\xi,\zeta) \tag{8.160}$$

所以 (8.158) 有如下形式:

$$|\xi|\frac{\partial}{\partial t}|\xi| = (\frac{\partial \xi}{\partial t},\xi) - \xi\cdot\hat{\chi}\cdot\xi - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi|\xi|^2 \tag{8.161}$$

我们将运用 (8.161) 并取 $\xi = {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$. 由 (8.152), 我们有

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial^{(i_1\cdots i_l)}x_l}{\partial t}, {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi|^{(i_1\cdots i_l)}x_l|^2 \\
= &-(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{3}{2}\mathrm{tr}\chi)|^{(i_1\cdots i_l)}x_l|^2 \\
&+(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi)({}^{(i_1\cdots i_l)}x_l, \not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l) \\
&-({}^{(i_1\cdots i_l)}x_l, {}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l)
\end{aligned}
\tag{8.162}
$$

我们将用到如下假设:

在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中我们有

$$
\mathbf{AS}: -2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi \geqslant 0
$$

由这个假设和 (8.162), 我们有

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial^{(i_1\cdots i_l)}x_l}{\partial t}, {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi|^{(i_1\cdots i_l)}x_l|^2 \\
\leqslant &-(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{3}{2}\mathrm{tr}\chi)|^{(i_1\cdots i_l)}x_l|^2 \\
&+(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi)|^{(i_1\cdots i_l)}x_l||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l| \\
&+|^{(i_1\cdots i_l)}x_l||^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l|
\end{aligned}
\tag{8.163}
$$

考虑 (8.161) 右端的第二项, 将 ξ 取为 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l$, 我们有

$$
|^{(i_1\cdots i_l)}x_l \cdot \hat{\chi} \cdot {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l| \leqslant |\hat{\chi}||^{(i_1\cdots i_l)}x_l|^2 \tag{8.164}
$$

将 (8.164) 代入 (8.163) 并且由 (8.161), 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial|^{(i_1\cdots i_l)}x_l|}{\partial t} \leqslant &-(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{3}{2}\mathrm{tr}\chi - |\hat{\chi}|)|^{(i_1\cdots i_l)}x_l| \\
&+(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi)|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l| + |^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l|
\end{aligned}
\tag{8.165}
$$

积分因子是

$$
\exp(\int_0^t(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{3}{2}\mathrm{tr}\chi - |\hat{\chi}|)(t',u)dt') = (\frac{\mu(t,u)}{\mu(0,u)})^{-2}(A(t,u))^{3/2}e^{-S(t,u)} \tag{8.166}
$$

这里

$$
A(t,u) = \exp(\int_0^t \mathrm{tr}\chi(t',u)dt'), \quad S(t,u) = \int_0^t |\hat{\chi}|(t',u)dt' \tag{8.167}
$$

由于由 (8.155),

$$\mathrm{tr}\chi = \frac{1}{\sqrt{\det \not g}}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det \not g} \tag{8.168}$$

我们有

$$A(t,u) = \frac{\sqrt{\det \not g(t,u)}}{\sqrt{\det \not g(0,u)}} \tag{8.169}$$

即 $A(t,u)$ 是 $S_{t,u}$ 与 $S_{0,u}$ 沿着 C_u 生成子的面积的比值. 将 (8.165) 积分并由 (8.166), 我们得到

$$|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t,u)| \leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}F_l(t,u) + {}^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t,u) \tag{8.170}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}F_l(t,u) = & e^{S(t,u)}(A(t,u))^{-3/2}(\mu(t,u))^2((\mu(0,u))^{-2}|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0,u)| \\ & + \int_0^t (\mu(t',u))^{-2}(A(t',u))^{3/2}e^{-S(t',u)} \\ & \cdot(-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi)(t',u)|\not d^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t',u)|)\end{aligned} \tag{8.171}$$

以及

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t,u) = & e^{S(t,u)}(A(t,u))^{-3/2}(\mu(t,u))^2 \\ & \cdot\int_0^t (\mu(t',u))^{-2}(A(t',u))^{3/2}e^{-S(t',u)}|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l(t',u)|dt'\end{aligned} \tag{8.172}$$

我们首先估计 $A(t,u)$ 和 $S(t,u)$. 由 **F2** 和 (8.167), 我们有

$$|\log A(t,u) - \int_0^t \frac{2}{1-u+t'}dt'| \leqslant C\delta_0 \int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt' \leqslant C\delta_0$$

由于

$$\int_0^t \frac{2}{1-u+t'}dt' = 2\log(\frac{1-u+t}{1-u})$$

从而

$$e^{-C\delta_0}(\frac{1-u+t}{1-u})^2 \leqslant A(t,u) \leqslant e^{C\delta_0}(\frac{1-u+t}{1-u})^2 \tag{8.173}$$

同样由 **F2** 和 (8.167), 我们有

$$S(t,u) \leqslant C\delta_0 \tag{8.174}$$

我们用到了

$$\int_0^\infty (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt'$$

是收敛的这一事实.

由 (8.173) 和 (8.174), 我们从 (8.171) 和 (8.172) 得到

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}F_l(t,u)\\ &\leqslant e^{C\delta_0}(1-u+\eta_0 t)^{-3}({}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^0(t,u)+{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t,u)+{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t,u))\end{aligned} \tag{8.175}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^0(t,u)=(\frac{\mu(t,u)}{\mu(0,u)})^2(1-u)^3|{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0,u)| \tag{8.176}$$

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t,u)\\ &=\int_0^t(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^3(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t',u))\cdot|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t',u)|dt'\end{aligned} \tag{8.177}$$

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t,u)\\ &=\int_0^t(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^3(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi(t',u))|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t',u)|dt'\end{aligned} \tag{8.178}$$

同样

$${}^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t,u)\leqslant e^{C\delta_0}(1-u+t)^{-3}\cdot\int_0^t(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^3|{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l(t',u)|dt' \tag{8.179}$$

接下来我们要分析 μ 渐近行为. 我们需要如下假设:

$$\not{\mathbf{E}}\mathbf{3}_0:|\not{\Delta}\psi_0|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}$$

8.2 和 μ 有关的关键引理

引理 8.10 在假设 $\mathbf{E1},\mathbf{E2},\not{\mathbf{E}}\mathbf{3}_0,\mathbf{F2}$ 和 $\mathbf{A}$ 下, 有如下结论成立. 记

$$P_s(u,\vartheta)=(1+s)(\underline{L}\psi_0)(s,u,\vartheta)$$

则对 $t\in[0,s]$ 我们有

$$(\underline{L}\psi_0)(t,u,\vartheta)=\frac{P_s(u,\vartheta)}{(1+t)}+R_s(t,u,\vartheta)$$

和

$$|R_s(t,u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s}$$

其中 C 是与 s 无关的常数.

证明 函数 ψ_0 满足方程

$$\Box_{\tilde{g}}\psi_0 = 0$$

由第三章中 $\Box_{\tilde{g}}$ 的表达式, 我们有

$$L(\underline{L}\psi_0) + \nu(\underline{L}\psi_0) = \rho_0 \tag{8.180}$$

其中

$$\rho_0 = \mu\not{\Delta}\psi_0 - \underline{\nu}L\psi_0 - 2\zeta\cdot\not{d}\psi_0 + \mu\frac{d\log\Omega}{dh}\not{d}h\cdot\not{d}\psi_0 \tag{8.181}$$

现在由 $\not{\mathbf{E}}\mathbf{3}_0$ 和 **A3**, (8.181) 右端第一项的绝对值被

$$C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))$$

界定. 由 (6.107) 和 **E2**, (8.181) 右端第二项的绝对值被

$$C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))$$

界定. 由 (6.89) 和 **E2**, (8.181) 右端第三项的绝对值被

$$C\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))$$

界定. 最终由 **A3** 和 **E**, (8.181) 右端最后一项的绝对值被

$$C\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))$$

界定. 我们得到

$$|\rho_0| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{8.182}$$

考虑 S^2 上以 t 和 u 为参数的函数

$$\tilde{A}(t,u) = A(t,u)\frac{\Omega(t,u)}{\Omega(0,u)} \tag{8.183}$$

其中 $A(t,u)$ 由 (8.169) 定义. 由 (8.167) 和 ν 的定义, 我们有

$$\frac{\partial \tilde{A}(t,u)}{\partial t} = 2\nu(t,u)\tilde{A}(t,u), \quad \tilde{A}(0,u) = 1 \tag{8.184}$$

所以如果用 $\Phi_{t,u}$ 往 S^2 的拉回表示,

$$\tau_0(t,u) = (\tilde{A}(t,u))^{1/2}(\underline{L}\psi_0)(t,u), \quad \tilde{\rho_0}(t,u) = (\tilde{A}(t,u))^{1/2}\rho_0(t,u) \tag{8.185}$$

(8.180) 变为

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial t} = \tilde{\rho}_0 \tag{8.186}$$

对 (8.184) 积分, 我们得到

$$\tilde{A}(t,u) = e^{2N(t,u)}, \quad N(t,u) = \int_0^t \nu(t',u)dt' \tag{8.187}$$

由

$$\nu(t,u) = \frac{1}{1-u+t} + \hat{\nu} \tag{8.188}$$

我们有

$$N(t,u) = \log(\frac{1-u+t}{1-u}) + \hat{N}(t,u), \quad \hat{N}(t,u) = \int_0^t \hat{\nu}(t',u)dt' \tag{8.189}$$

所以

$$\tilde{A}(t,u) = (\frac{1-u+t}{1-u})^2 e^{2\hat{N}(t,u)} \tag{8.190}$$

现在由 **E** 和 **F2**,

$$|\hat{\nu}(t,u)| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{8.191}$$

我们有

$$|\hat{N}(s,u) - \hat{N}(t,u)| \leqslant \int_t^s |\hat{\nu}(t',u)|dt' \leqslant C\delta_0 \int_t^s (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt' \tag{8.192}$$

最后一个积分是

$$\begin{aligned} &\int_t^s (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt' \\ &= 2(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+s}) + (\frac{\log(1+t)}{1+t} - \frac{\log(1+s)}{1+s}) \\ &\leqslant 2\frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s} \end{aligned} \tag{8.193}$$

所以我们得到

$$|\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s} \tag{8.194}$$

这意味着, 如果把 s,t 分别换成 $t,0$, 然后注意到 $N(0,u)=0$, 我们有

$$|\hat{N}(t,u)| \leqslant C\delta_0 \tag{8.195}$$

现在回到 (8.186). 在 $[t,s]$ 上对其积分, 我们有

$$\tau_0(t,u)=\tau_0(s,u)-\int_t^s \tilde{\rho}_0(t',u)dt' \tag{8.196}$$

由 (8.182), (8.185), (8.190) 以及 (8.195), 我们有

$$|\tilde{\rho}_0(t,u)| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{8.197}$$

所以由 (8.193) 有

$$|\int_t^s \tilde{\rho}_0(t',u)dt'| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s} \tag{8.198}$$

由 (8.185) 和 (8.190), 我们有

$$(\underline{L}\psi_0)(t,u)=(\tilde{A}(t,u))^{-1/2}\tau_0(t,u)=(\frac{1-u}{1-u+t})e^{-\hat{N}(t,u)}\tau_0(t,u) \tag{8.199}$$

特别地, 这在 $t=s$ 也成立. 另一方面, 由引理 8.10 中 $P_s(u)$ 的定义,

$$(\underline{L}\psi_0)(s,u)=\frac{P_s(u)}{1+s}$$

我们有

$$\tau_0(s,u)=\frac{P_s(u)}{1-u}\frac{1-u+s}{1+s}e^{\hat{N}(s,u)} \tag{8.200}$$

把 (8.200) 代入 (8.196) 并由 (8.199) 中的结果, 我们有

$$\begin{aligned}(\underline{L}\psi_0)(t,u)=&\frac{P_s(u)}{1+s}\frac{1-u+s}{1-u+t}e^{\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)}\\&-\frac{1-u}{1-u+t}e^{-\hat{N}(t,u)}\int_t^s \tilde{\rho}_0(t',u)dt'\end{aligned} \tag{8.201}$$

设

$$R_s(t,u)=P_s(u)B_s(t,u)-\frac{1-u}{1-u+t}e^{-\hat{N}(t,u)}\int_t^s \tilde{\rho}_0(t',u)dt' \tag{8.202}$$

其中

$$B_s(t,u) = \frac{1}{1+s}\frac{1-u+s}{1-u+t}e^{\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)} - \frac{1}{1+t} \tag{8.203}$$

我们得到

$$(\underline{L}\psi_0)(t,u) = \frac{P_s(u)}{1+t} + R_s(t,u) \tag{8.204}$$

更进一步, (8.203) 可以被写为

$$B_s(t,u) = \frac{1}{1+t}(e^{\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)} - 1 - \frac{-u}{1-u+t}\frac{s-t}{1+s}e^{\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)}) \tag{8.205}$$

由 (8.194),

$$\begin{aligned} e^{|\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)|} &\leqslant e^{C\delta_0}, \\ |e^{\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)} - 1| &\leqslant e^{C\delta_0}|\hat{N}(s,u)-\hat{N}(t,u)| \\ &\leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s} \end{aligned}$$

我们有

$$|B_s(t,u)| \leqslant C\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s}$$

由 **E2**, 我们同样有

$$|P_s(u)| \leqslant C\delta_0 \tag{8.206}$$

由 (8.202) 以及 (8.198), 我们有

$$|R_s(t,u)| \leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s} \tag{8.207}$$

从而引理得证. □

我们现在引入如下连续性假设:

存在一个不依赖于 s 的正常数 C 使得在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中有

$$\mathbf{E_{LT}3} : |LT\psi_\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}$$

$$\mathbf{E_{LL}3} : |LL\psi_\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}$$

命题 8.5 设引理 8.10 的假设成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E_{LT}3}$, $\mathbf{E_{LL}3}$ 成立. 记

$$E_s(u,\vartheta) = (1+s)(\frac{\partial\mu}{\partial t})(s,u,\vartheta)$$

则对 $t \in [0,s]$, 我们有

$$(\frac{\partial \mu}{\partial t})(t,u,\vartheta) = \frac{E_s(u,\vartheta)}{1+t} + Q_{1,s}(t,u,\vartheta)$$

以及

$$|Q_{1,s}(t,u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s}$$

证明　我们从 μ 的传输方程开始 (见 (3.92)). 我们有

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(Th) \tag{8.208}$$

设

$$m_0 = \frac{1}{2}\ell(T\psi_0), \quad m_1 = m - m_0 \tag{8.209}$$

其中 ℓ 是常数

$$\ell = \frac{dH}{dh}(0) \tag{8.210}$$

我们有

$$m_1 = \frac{1}{2}(\frac{dH}{dh} - \ell)(Th) + \frac{1}{2}\ell((Th) - (T\psi_0)) \tag{8.211}$$

由 **E1**,

$$|h| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{8.212}$$

进而

$$|\frac{dH}{dh} - \ell| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{8.213}$$

更进一步, 由于

$$Th = T\psi_0 - \sum_i \psi_i T\psi_i$$

E 意味着

$$|m_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{8.214}$$

同样由 $\mathbf{E_{LT}3}$, 我们有

$$|Lm_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3} \tag{8.215}$$

现在我们设

$$m_{0,1} = \frac{1}{4}\ell(\underline{L}\psi_0) \tag{8.216}$$

则由 $\underline{L} = 2T + \alpha^{-2}\mu L$, 我们有

$$m_{0,1} = m_0 + \frac{1}{4}\ell\alpha^{-2}\mu(L\psi_0) \tag{8.217}$$

同样设

$$e_1 = e - \frac{1}{4}\ell\alpha^{-2}(L\psi_0), \quad n_1 = m_1 + \mu e_1 \tag{8.218}$$

我们得到

$$L\mu = m_{0,1} + n_1 \tag{8.219}$$

由 (8.214), **A** 和 **E**, 我们有

$$|e_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}, \quad |n_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{8.220}$$

进一步由 $\mathbf{E_{LL}3}$,

$$|Le_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3} \tag{8.221}$$

这与 (8.215) 以及事实

$$|L\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{8.222}$$

意味着

$$|Ln_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{8.223}$$

由引理 8.10, 我们有

$$m_{0,1}(t,u) = \frac{1}{4}\ell\frac{P_s(u)}{1+t} + \frac{1}{4}\ell R_s(t,u) \tag{8.224}$$

我们定义 S^2 上依赖于参数 u 和 s 的函数 $E_s(u)$:

$$E_s(u) = \frac{1}{4}\ell P_s(u) + (1+s)n_1(s,u) \tag{8.225}$$

则由 (8.220) 的第二式有

$$|E_s(u) - \frac{1}{4}\ell P_s(u)| \leqslant C\delta_0(1+s)^{-1}(1+\log(1+s)) \tag{8.226}$$

由 (8.219), (8.224) 以及 $R_s(s,u) = 0$, 我们有

$$(1+s)\frac{\partial\mu}{\partial t}(s,u) = E_s(u) \tag{8.227}$$

更进一步, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial t}(t,u) &= \frac{E_s(u)}{1+t}+Q_{1,s}(t,u)\\ Q_{1,s}(t,u) &= \frac{1}{4}\ell R_s(t,u)-n_1(s,u)\frac{s-t}{1+t}-(n_1(s,u)-n_1(t,u))\end{aligned} \tag{8.228}$$

由引理 8.10, 上式右端第一项满足所要求的界. 由 (8.220) 以及 $f(t)=(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 是 t 的减函数, 上式右端第二项同样满足所要求的界. 对于最后一项, 由 (8.223), 我们有

$$|n_1(s,u)-n_1(t,u)|\leqslant\int_t^s|\frac{\partial n_1}{\partial t}(t',u)|dt'\leqslant C\delta_0\int_t^s(1+t')^{-3}(1+\log(1+t'))dt' \tag{8.229}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_t^s(1+t')^{-3}(1+\log(1+t'))dt'\\ &=\frac{3}{4}(\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+s)^2})+\frac{1}{2}(\frac{\log(1+t)}{(1+t)^2}-\frac{\log(1+s)}{(1+s)^2})\\ &\leqslant\frac{3}{4}\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s}\end{aligned} \tag{8.230}$$

我们得到

$$|Q_{1,s}(t,u)|\leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s} \tag{8.231}$$

从而命题得证. □

由命题 8.5, 我们有

$$\mu(t,u)=\mu(0,u)+E_s(u)\log(1+t)+\int_0^t Q_{1,s}(t',u)dt' \tag{8.232}$$

回忆 $\mu=\eta\kappa$. 连续性假设 **E1** 限制在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上意味着

$$|\eta(0,u)-1|\leqslant C\delta_0 \tag{8.233}$$

由在 Σ_0 上

$$\kappa=1 \tag{8.234}$$

我们得到

$$|\mu(0,u)-1|\leqslant C\delta_0 \tag{8.235}$$

由命题 8.5 中 $Q_{1,s}(t,u)$ 的界, 我们有

$$|Q_{1,s}(t,u)| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{8.236}$$

定义 S^2 上的函数

$$\mu_{1,s}(u) = \int_0^s Q_{1,s}(t,u)dt \tag{8.237}$$

代入 (8.236), 我们得到

$$|\mu_{1,s}(u)| \leqslant C\delta_0 \tag{8.238}$$

然后我们定义 S^2 上的函数

$$\mu_{[1],s}(u) = \mu(0,u) + \mu_{1,s}(u) \tag{8.239}$$

由 (8.235) 和 (8.238), 我们有

$$|\mu_{[1],s}(u) - 1| \leqslant C\delta_0 \tag{8.240}$$

将 δ_0 取得足够小, 这意味着

$$\inf_{u\in[0,\epsilon_0]} \inf_{S^2} \mu_{[1],s}(u) \geqslant \frac{1}{2} \tag{8.241}$$

由 (8.237) 和 (8.239), (8.232) 可以被写为

$$\mu(t,u) = \mu_{[1],s}(u) + E_s(u)\log(1+t) + Q_{0,s}(t,u) \tag{8.242}$$

其中

$$Q_{0,s}(t,u) = -\int_t^s Q_{1,s}(t',u)dt' \tag{8.243}$$

我们有

$$|Q_{0,s}(t,u)| \leqslant \int_t^s |Q_{1,s}(t',u)|dt' \leqslant C\delta_0 \int_t^s (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))dt' \tag{8.244}$$

$$\leqslant 2C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s} \tag{8.245}$$

(见 (8.193)).

最后设

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_s(t,u) &= \frac{\mu(t,u)}{\mu_{[1],s}(u)}, \quad \hat{E}_s(u) = \frac{E_s(u)}{\mu_{[1],s}(u)} \\ \hat{Q}_{0,s}(t,u) &= \frac{Q_{0,s}(t,u)}{\mu_{[1],s}(u)}, \quad \hat{Q}_{1,s}(t,u) = \frac{Q_{1,s}(t,u)}{\mu_{[1],s}(u)}\end{aligned} \tag{8.246}$$

我们将以上结果整理到下述命题中:

命题 8.6 设命题 8.5 的假设都成立. 那么存在 S^2 上依赖于参数 u 和 s 的函数 $\mu_{[1],s}(u,\vartheta)$ 满足

$$|\mu_{[1],s}(u,\vartheta)-1|\leqslant C\delta_0,\quad \inf_{u\in[0,\epsilon_0]}\inf_{\vartheta\in S^2}\mu_{[1],s}(u,\vartheta)\geqslant\frac{1}{2}$$

使得如果我们设

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)=\frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu_{[1],s}(u,\vartheta)}$$

则有

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)=1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)$$
$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta)=\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{1+t}+\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)$$

其中

$$\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)=-\int_t^s\hat{Q}_{1,s}(t',u,\vartheta)dt'$$

并且函数 $\hat{Q}_{0,s},\hat{Q}_{1,s}$ 有如下估计:

$$|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|\leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s}$$
$$|\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)|\leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{s-t}{1+s}$$

定义

$$\mu_m(t)=\min_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}\mu=\min_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2}\mu(t,u,\vartheta)\tag{8.247}$$

和

$$\bar{\mu}_m(t)=\min\{\mu_m(t),1\}\tag{8.248}$$

以及

$$M(t)=\max_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(-\mu^{-1}(L\mu)_-)=\max_{(u,\vartheta)\in(0,\epsilon_0)\times S^2}(-\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t,u,\vartheta))\tag{8.249}$$

下述引理将在后文中发挥重要的作用:

引理 8.11 设引理 8.6 的假设在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 则对任意常数 $a\geqslant 4$, 存在一个不依赖于 s 和 a 的正常数 C 使得对任意 $t\in[0,s]$, 我们有

$$I_a(t):=\int_0^t\bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt'\leqslant Ca^{-1}\bar{\mu}_m^{-a}(t)$$

前提是依赖于 a 的 δ_0 取得足够小.

证明 将 $M(t)$ 表示为

$$M(t) = \max_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2}\left(-\frac{1}{\hat{\mu}_s}\left(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}\right)_-(t,u,\vartheta)\right) \tag{8.250}$$

记

$$\hat{E}_{s,m} = \min_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2}\hat{E}_s(u,\vartheta) \tag{8.251}$$

情形 1) $\hat{E}_{s,m} \geqslant 0$. 此时,

$$\hat{E}_s(u,\vartheta) \geqslant 0, \quad \forall (u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2 \tag{8.252}$$

由命题 8.6 有

$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) \geqslant \hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)$$

所以

$$-\left(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}\right)_-(t,u,\vartheta) \leqslant -(\hat{Q}_{1,s})_-(t,u,\vartheta) \leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{8.253}$$

同样

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) \geqslant 1+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta) \geqslant 1-C\delta_0 \tag{8.254}$$

若 δ_0 足够小, 则 (8.253) 和 (8.254) 意味着

$$M(t) \leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{8.255}$$

另一方面, 我们有

$$\mu(t,u,\vartheta) = \mu_{[1],s}(u,\vartheta)\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)$$

由命题 8.6,

$$|\mu_{[1],s}(u,\vartheta)-1| \leqslant C\delta_0 \tag{8.256}$$

(8.254) 的下界意味着

$$\mu_m(t) \geqslant 1-C\delta_0 \tag{8.257}$$

所以

$$\bar{\mu}_m(t) \geqslant 1-C\delta_0 \tag{8.258}$$

将 (8.255) 和 (8.258) 代入 $I_a(t)$, 我们有

$$I_a(t) \leqslant \int_0^t (1 - C\delta_0)^{-a} C\delta_0 \frac{1 + \log(1 + t')}{(1 + t')^2} dt' \leqslant C'\delta_0 \tag{8.259}$$

前提是

$$\delta_0 a \leqslant \frac{1}{C} \tag{8.260}$$

这是因为

$$(1 - C\delta_0)^{-a} \leqslant (1 - a^{-1})^{-a} \to e, \quad 当\ a \to \infty$$

另一方面, 在任何一种情形下, 由定义我们有

$$\bar{\mu}_m(t) \leqslant 1 \Rightarrow \bar{\mu}_m^{-a}(t) \geqslant 1$$

所以在情形 1) 时引理得证.

情形 2) $\hat{E}_{s,m} < 0$. 在这种情形设

$$\hat{E}_{s,m} = -\delta_1, \quad \delta_1 > 0 \tag{8.261}$$

由 $E_s(u)$ 的定义和 (8.222), 我们有

$$\delta_1 \leqslant C\delta_0 \tag{8.262}$$

接下来记

$$b(t,s) = \frac{1 + \log(1 + t)}{1 + t} \frac{s - t}{1 + s}, \quad c(t) = \frac{1 + \log(1 + t)}{(1 + t)^2} \tag{8.263}$$

以及

$$\hat{\mu}_{s,m}(t) = \min_{(u,\vartheta) \in [0,\epsilon_0] \times S^2} \hat{\mu}_s(t, u, \vartheta) \tag{8.264}$$

由命题 8.6, 此时我们有

$$\hat{\mu}_s(t, u, \vartheta) \geqslant 1 - \delta_1 \log(1 + t) - C\delta_0 b(t, s) \tag{8.265}$$

对任意 $(u, \vartheta) \in [0, \epsilon_0] \times S^2$ 成立, 因此

$$\hat{\mu}_{s,m}(t) \geqslant 1 - \delta_1 \log(1 + t) - C\delta_0 b(t, s) \tag{8.266}$$

另一方面, 如果

$$\hat{E}_s(u_m, \vartheta_m) = \hat{E}_{s,m}$$

则

$$\hat{\mu}_{s,m}(t) \leqslant \hat{\mu}_s(t, u_m, \vartheta_m)$$
$$= 1 - \delta_1 \log(1+t) + \hat{Q}_{0,s}(t, u_m, \vartheta_m)$$

所以

$$\hat{\mu}_{s,m}(t) \leqslant 1 - \delta_1 \log(1+t) + C\delta_0 b(t,s) \tag{8.267}$$

进一步, 由命题 8.6, 我们有

$$-(\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t})_-(t,u,\vartheta) \leqslant -\frac{(\hat{E}_s)_-(u,\vartheta)}{1+t} - (\hat{Q}_{1,s})_-(t,u,\vartheta)$$

所以

$$-(\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t})_-(t,u,\vartheta) \leqslant \frac{\delta_1}{1+t} + C\delta_0 c(t) \tag{8.268}$$

现在考虑积分 $I_a(t)$. 我们设

$$t_1 = e^{\frac{1}{2a\delta_1}} - 1 \tag{8.269}$$

我们将考虑两种子情形.

子情形 2a) $t \leqslant t_1$. 由于 $t' \leqslant t$, 其中 t' 是积分 $I_a(t)$ 的积分变量, 在这种子情形, 我们有

$$1 - \delta_1 \log(1+t') \geqslant 1 - \frac{1}{2a} \tag{8.270}$$

所以由 (8.266), 我们有

$$\hat{\mu}_{s,m}(t') \geqslant 1 - \frac{1}{a} \tag{8.271}$$

前提是

$$\delta_0 a \leqslant \frac{1}{2C} \tag{8.272}$$

这里我们用到了 $b(t,s) \leqslant 1$ 的事实. 由 (8.256), (8.271) 意味着

$$\mu_m(t') \geqslant 1 - \frac{2}{a}$$

所以

$$\bar{\mu}_m(t') \geqslant 1 - \frac{2}{a} \tag{8.273}$$

现在由 (8.268) 和 (8.271), 我们有

$$M(t') \leqslant (1 - \frac{1}{a})^{-1}(\frac{\delta_1}{1+t'} + C\delta_0 c(t')) \tag{8.274}$$

由 (8.273) 和 (8.274), 我们得到

$$I_a(t) \leqslant (1-\frac{1}{a})^{-1}(1-\frac{2}{a})^{-a}\int_0^t (\frac{\delta_1}{1+t'} + C\delta_0 c(t'))dt' \tag{8.275}$$

这里

$$\int_0^t \frac{\delta_1}{1+t'}dt' = \delta_1 \log(1+t) \leqslant \delta_1 \log(1+t_1) = \frac{1}{2a} \tag{8.276}$$

而当 δ_0 足够小时,

$$\int_0^t C\delta_0 c(t')dt' \leqslant C'\delta_0 \leqslant \frac{1}{2a} \tag{8.277}$$

注意到 (8.275) 的系数:

$$(1-\frac{1}{a})^{-1}(1-\frac{2}{a})^{-a} \to e^2, \quad 当\ a \to \infty$$

从而当 $t \leqslant t_1$ 时有

$$I_a(t) \leqslant \frac{C}{a} \tag{8.278}$$

由于 $\bar{\mu}_m(t) \leqslant 1$, 引理在子情形 2a) 时成立.

子情形 2b) $t > t_1$. 此时有

$$I_a(t) = I_a(t_1) + \int_{t_1}^t \bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt' \tag{8.279}$$

在 (8.278) 中将 t 换成 t_1,

$$I_a(t) \leqslant \frac{C}{a} + \int_{t_1}^t \bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt' \tag{8.280}$$

现在考虑上界 (8.267) 在 $t = s$ 的取值. 由 $b(s,s) = 0$, 我们有

$$\hat{\mu}_{s,m}(s) \leqslant 1 - \delta_1 \log(1+s) \tag{8.281}$$

另一方面, 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中 $\mu > 0$. 所以

$$s \leqslant t_*, \quad 其中 \quad t_* = e^{\frac{1}{\delta_1}} - 1 \tag{8.282}$$

引入变量

$$\tau' = \log(1+t') \tag{8.283}$$

相对应地有

$$\tau = \log(1+t), \quad \sigma = \log(1+s) \tag{8.284}$$

以及

$$\tau_1 = \log(1+t_1) = \frac{1}{2a\delta_1}, \quad \tau_* = \log(1+t_*) = \frac{1}{\delta_1} \tag{8.285}$$

那么在 (8.280) 中我们有

$$\tau_1 \leqslant \tau' \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant \tau_* \tag{8.286}$$

同样我们有

$$b(t,s) = \frac{1+\tau}{e^{\tau}} \frac{e^{\sigma}-e^{\tau}}{e^{\sigma}} \tag{8.287}$$

由于

$$0 \leqslant \frac{e^{\sigma}-e^{\tau}}{e^{\sigma}} = 1 - e^{-(\sigma-\tau)} \leqslant \sigma - \tau$$

我们有

$$0 \leqslant b(t,s) \leqslant \frac{1+\tau}{e^{\tau}}(\sigma-\tau) \tag{8.288}$$

将 (8.288) 代入 (8.266) 并且将 t 换成 t', 我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{s,m}(t') &\geqslant 1 - \delta_1\tau' - C\delta_0\frac{1+\tau'}{e^{\tau'}}(\sigma-\tau') \\ &= 1 - \delta_1\sigma + \delta_1\Big(1 - \frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{(1+\tau')}{e^{\tau'}}\Big)(\sigma-\tau')\end{aligned} \tag{8.289}$$

由于

$$\frac{1+\tau'}{e^{\tau'}} \leqslant \frac{1+\tau_1}{e^{\tau_1}} = \Big(1+\frac{1}{2a\delta_1}\Big)e^{-\frac{1}{2a\delta_1}} \tag{8.290}$$

所以若 δ_0 取得足够小:

$$C\delta_0 \leqslant \frac{1}{2a}$$

那么有

$$\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau'}{e^{\tau'}} \leqslant \frac{1}{2a\delta_1}\Big(1+\frac{1}{2a\delta_1}\Big)e^{-\frac{1}{2a\delta_1}} \tag{8.291}$$

注意到

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

则存在一个依赖于 a 的正常数 $K(a)$ 使得

$$\frac{1}{x}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)e^{-\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{a}, \forall x \leqslant \frac{1}{K(a)}$$

这里我们设

$$x = 2a\delta_1 \leqslant 2aC\delta_0$$

所以当 δ_0 取得足够小时:

$$\delta_0 \leqslant \frac{1}{2CaK(a)} \tag{8.292}$$

我们有

$$\frac{1}{2a\delta_1}(1+\frac{1}{2a\delta_1})e^{-\frac{1}{2a\delta_1}} \leqslant \frac{1}{a} \tag{8.293}$$

从而由 (8.291),

$$1-\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau'}{e^{\tau'}} \geqslant 1-\frac{1}{a} \tag{8.294}$$

考虑 (8.289), 注意到如下事实:

$$1-\delta_1\sigma \geqslant 1-\delta_1\tau_* = 0 \tag{8.295}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&1-\delta_1\sigma+\delta_1(1-\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau'}{e^{\tau'}})(\sigma-\tau') \\
\geqslant\ & 1-\delta_1\sigma+(1-\frac{1}{a})\delta_1(\sigma-\tau') \\
\geqslant\ & (1-\frac{1}{a})(1-\delta_1\sigma)+(1-\frac{1}{a})\delta_1(\sigma-\tau') = (1-\frac{1}{a})(1-\delta_1\tau')
\end{aligned} \tag{8.296}$$

所以由 (8.289), 我们得到

$$\hat{\mu}_s(t',u,\vartheta) \geqslant \hat{\mu}_{s,m}(t') \geqslant (1-\frac{1}{a})(1-\delta_1\tau'),\ \forall(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2, \forall t'\geqslant t_1 \tag{8.297}$$

我们现在考虑 (8.268). 由于

$$(1+t')c(t') = \frac{1+\tau'}{e^{\tau'}} \tag{8.298}$$

在 (8.268) 中将 t 换成 t', 我们有

$$-(1+t')(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_-(t',u,\vartheta) \leqslant \delta_1(1+\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau'}{e^{\tau'}}) \tag{8.299}$$

如果 (8.292) 成立, 这意味着

$$\begin{gathered}
-(1+t')(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_-(t',u,\vartheta) \leqslant \delta_1(1+\frac{1}{a}) \\
\forall(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2, \forall t'\geqslant t_1
\end{gathered} \tag{8.300}$$

由 (8.297) 和 (8.300) 有

$$(1+t')M(t') \leqslant \frac{1+\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}} \frac{\delta_1}{1-\delta_1\tau'} \tag{8.301}$$

由 (8.256) 和 (8.297), 再取 $C\delta_0 \leqslant a^{-1}$ 有

$$\mu_m(t') \geqslant (1-\frac{2}{a})(1-\delta_1\tau') \tag{8.302}$$

所以

$$\bar{\mu}_m(t') \geqslant (1-\frac{2}{a})(1-\delta_1\tau') \tag{8.303}$$

现在考虑 (8.280) 中的积分. 在变量 τ' 下我们有

$$\int_{t_1}^{t} \bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt' = \int_{\tau_1}^{\tau} \bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+t')M(t')d\tau'$$

所以 (8.301) 和 (8.303) 意味着

$$\int_{t_1}^{t} \bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt' \leqslant \frac{1+\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}} \frac{1}{(1-\dfrac{2}{a})^a} \int_{\tau_1}^{\tau} (1-\delta_1\tau')^{-a-1}\delta_1 d\tau' \tag{8.304}$$

由于

$$\int_{\tau_1}^{\tau} (1-\delta_1\tau')^{-a-1}\delta_1 d\tau' = \frac{1}{a}((1-\delta_1\tau)^{-a} - (1-\delta_1\tau_1)^{-a}) \leqslant \frac{1}{a}(1-\delta_1\tau)^{-a}$$

而系数满足

$$\frac{1+\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}} \frac{1}{(1-\dfrac{2}{a})^a} \to e^2, \quad \text{当 } a \to \infty$$

我们有

$$\int_{t_1}^{t} \bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt' \leqslant \frac{C}{a}(1-\delta_1\tau)^{-a} \tag{8.305}$$

另一方面, 由 (8.267) 和 (8.288) 有

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{s,m}(t) &\leqslant 1-\delta_1\tau + C\delta_0\frac{1+\tau}{e^\tau}(\sigma-\tau) \\ &= 1-\delta_1\sigma + \delta_1(1+\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^\tau})(\sigma-\tau)\end{aligned} \tag{8.306}$$

在 (8.291) 中将 τ' 取为 τ, 再由 (8.293) 有

$$\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^\tau} \leqslant \frac{1}{a} \tag{8.307}$$

前提是 (8.292) 成立. 所以有

$$1+\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^\tau} \leqslant 1+\frac{1}{a} \tag{8.308}$$

以及

$$\begin{aligned}
&1-\delta_1\sigma+\delta_1(1+\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^\tau})(\sigma-\tau)\\
\leqslant\ &1-\delta_1\sigma+(1+\frac{1}{a})\delta_1(\sigma-\tau)\\
\leqslant\ &(1+\frac{1}{a})(1-\delta_1\sigma)+(1+\frac{1}{a})\delta_1(\sigma-\tau)\\
=\ &(1+\frac{1}{a})(1-\delta_1\tau)
\end{aligned} \tag{8.309}$$

所以我们得到

$$\hat{\mu}_{s,m}(t) \leqslant (1+\frac{1}{a})(1-\delta_1\tau) \tag{8.310}$$

这个与 (8.256) 以及一个关于 δ_0 的小性条件 (8.260) 共同推出

$$\mu_m(t) \leqslant (1+\frac{2}{a})(1-\delta_1\tau) \tag{8.311}$$

所以

$$\bar{\mu}_m(t) \leqslant (1+\frac{2}{a})(1-\delta_1\tau) \tag{8.312}$$

从而

$$\bar{\mu}_m^{-a}(t) \geqslant \frac{1}{(1+\frac{2}{a})^a}(1-\delta_1\tau)^{-a} \tag{8.313}$$

由于

$$(1+\frac{2}{a})^a \to e^2, \quad \text{当 } a\to\infty$$

我们得出

$$\bar{\mu}_m^{-a}(t) \geqslant \frac{1}{C}(1-\delta_1\tau)^{-a} \tag{8.314}$$

与 (8.305) 比较, 有

$$\int_{t_1}^t \bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')dt' \leqslant \frac{C}{a}\bar{\mu}_m^{-a}(t) \tag{8.315}$$

由上式和 (8.280) 以及 $\bar{\mu}_m(t) \leqslant 1$, 在子情形 2b) 时引理得证.

现在引理被完全证明了. □

推论 1 在引理 8.11 的假设下, 存在一个不依赖于 s 的正常数 C 使得如下结论成立. 若在某个 $(u,\vartheta) \in [0,\epsilon_0] \times S^2$ 有 $\hat{E}_s(u,\vartheta) < 0$, 则我们有

$$\frac{\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)}{\hat{\mu}_s(t',u,\vartheta)} \leqslant C$$

对任意 $t' \in [0,t]$ 和任意 $t \in [0,s]$ 成立.

证明 假设在 (u,ϑ) 处, 我们有

$$\hat{E}_s(u,\vartheta) = -\delta_1, \delta_1 > 0,$$

由 (8.266) 和 (8.267) 有

$$1 - \delta_1 \log(1+t) - C\delta_0 b(t,s) \leqslant \hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) \leqslant 1 - \delta_1 \log(1+t) + C\delta_0 b(t,s) \quad (8.316)$$

取 $a = 4$, 按照 (8.269) 设

$$t_1 = e^{\frac{1}{8\delta_1}} - 1 \quad (8.317)$$

我们需要考虑两种子情形: $t \leqslant t_1$ 和 $t > t_1$. 若 $t \leqslant t_1$, 则由 (8.271),

$$\hat{\mu}_s(t',u,\vartheta) \geqslant \frac{1}{2} \quad (8.318)$$

而由 (8.316) 的上界有

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) \leqslant \frac{5}{4} \quad (8.319)$$

所以推论在 $t \leqslant t_1$ 时成立.

若 $t > t_1$, 由 (8.310), 我们有

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) \leqslant \frac{5}{4}(1 - \delta_1 \tau) \quad (8.320)$$

若 $t' \leqslant t_1$, 由 (8.318) 推论成立. 而如果 $t' > t_1$, 由 (8.297), 我们有

$$\hat{\mu}_s(t',u,\vartheta) \geqslant \frac{3}{4}(1 - \delta_1 \tau') \quad (8.321)$$

由于 $(1 - \delta_1 \tau) \leqslant (1 - \delta_1 \tau')$, 推论成立. □

推论 2 在引理 8.11 的假设下, 存在一个不依赖于 s 和 a 的正常数 C 使得

$$\bar{\mu}_m^{-a}(t') \leqslant C \bar{\mu}_m^{-a}(t)$$

对所有 $t' \in [0,t]$ 和 $t \in [0,s]$ 成立.

证明 情形 1) $\hat{E}_{s,m} \geqslant 0$. 此时由 (8.258),

$$\bar{\mu}_m(t') \geqslant 1 - C\delta_0 \tag{8.322}$$

另一方面, 由定义,

$$\bar{\mu}_m(t) \leqslant 1$$

有

$$\frac{\bar{\mu}_m^{-a}(t')}{\bar{\mu}_m^{-a}(t)} \leqslant (1 - C\delta_0)^{-a} \tag{8.323}$$

所以如果

$$C\delta_0 \leqslant \frac{1}{a}$$

则推论成立.

情形 2) $\hat{E}_{s,m} < 0$. 此时我们像 (8.261) 中那样定义 δ_1, 像 (8.269) 中那样定义 t_1. 然后分别考虑子情形 2a) $t' \leqslant t_1$ 和 2b) $t' > t_1$.

在子情形 2a) 时, (8.273) 成立, 所以我们有

$$\frac{\bar{\mu}_m^{-a}(t')}{\bar{\mu}_m^{-a}(t)} \leqslant (1 - \frac{2}{a})^{-a} \tag{8.324}$$

这可以被一个不依赖于 a 的界来界定 (对 $a \geqslant 4$).

在子情形 2b) 时, (8.303) 以及 (8.312) 成立, 所以

$$\frac{\bar{\mu}_m^{-a}(t')}{\bar{\mu}_m^{-a}(t)} \leqslant (\frac{1 - \frac{2}{a}}{1 + \frac{2}{a}})^{-a} (\frac{1 - \delta_1 \tau}{1 - \delta_1 \tau'})^{a} \leqslant (\frac{1 - \frac{2}{a}}{1 + \frac{2}{a}})^{-a} \tag{8.325}$$

(由 $\tau' \leqslant \tau$) 这可以被一个不依赖于 a 的界来界定 (对 $a \geqslant 4$). □

推论 3 引理 8.11 的假设意味着 **AS**.

证明 如同推论 1 的证明, 我们考虑一个给定的 $(u, \vartheta) \in [0, \epsilon_0] \times S^2$. 同样我们需要考虑两种情形: $\hat{E}_s(u, \vartheta) \geqslant 0$ 和 $\hat{E}_s(u, \vartheta) < 0$.

在第一种情形 (8.254), 我们有

$$\hat{\mu}_s(t, u, \vartheta) \geqslant 1 - C\delta_0$$

另一方面, 由命题 8.6, 我们有

$$\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) = \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{1+t} + \hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta) \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

这里我们用到了 (8.206), (8.226) 和 (8.231). 从而

$$-2\mu^{-1}\frac{\partial \mu}{\partial t} = -2\hat{\mu}_s^{-1}\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t} \geqslant -C\delta_0(1+t)^{-1}$$

另一方面, **F2** 意味着

$$\mathrm{tr}\chi \geqslant C^{-1}(1+t)^{-1}$$

所以当 δ_0 取得足够小时, **AS** 在情形 1) 成立.

在第二种情形, 我们可以像证明推论 1 那样设 $\hat{E}_s(u,\vartheta) = -\delta_1, \delta_1 > 0, a = 4$ 并且像 (8.317) 那样定义 t_1. 所以我们接下来同样考虑两种子情形 $t \leqslant t_1$ 和 $t > t_1$.

在第一种子情形, 我们有 (见 (8.318))

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) \geqslant \frac{3}{4}$$

由命题 8.6,

$$\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) \leqslant \hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta) \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

从而

$$-2\mu^{-1}\frac{\partial \mu}{\partial t} = -2\hat{\mu}_s^{-1}\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t} \geqslant -C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

所以当 δ_0 取得足够小时, **AS** 在第一种子情形成立.

在第二种子情形, 由命题 8.6 有

$$\begin{aligned}(1+t)\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) &= -\delta_1 + (1+t)\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta) \\ &\leqslant -\delta_1\left(1 - \frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^{\tau}}\right) \leqslant -\frac{3\delta_1}{4}\end{aligned}$$

如果 δ_0 按照 (8.292), $a=4$ 的情形取得足够小, 我们在第二种子情形有

$$-2\mu^{-1}\frac{\partial \mu}{\partial t} > 0$$

所以 **AS** 同样成立. □

8.3 传输方程解的估计

现在回到 (8.175). 我们希望得到一个 ${}^{(i_1\cdots i_l)}F_l(t)$ 在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 上的 L^2 范数估计. 一般地, 如果 ϕ 是一个定义在 $W^*_{\epsilon_0}$ 上的函数, 我们考虑 $\phi(t,u)$, 即在 S^2 上相对应的依赖于参数 t 和 u 的函数, 则 ϕ 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上的 L^2 范数为

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} &= \sqrt{\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} \phi^2 d\mu_{\not{g}} du} \\ &= \sqrt{\int_{[0,\epsilon_0]\times S^2} (\phi(t,u))^2 d\mu_{\not{g}(t,u)} du}\end{aligned} \tag{8.326}$$

而 $\phi(t,.)$ 在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 上的 L^2 范数为

$$\|\phi(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} = \sqrt{\int_{[0,\epsilon_0]\times S^2} (\phi(t,u))^2 d\mu_{\not{g}(0,0)} du} \tag{8.327}$$

其中 $\not{g}(0,0)$ 是 S^2 的标准度量. 我们有

$$d\mu_{\not{g}(t,u)} = \frac{\sqrt{\det \not{g}(t,u)}}{\sqrt{\det \not{g}(0,0)}} d\mu_{\not{g}(0,0)} = A(t,u)\frac{\sqrt{\det \not{g}(0,u)}}{\sqrt{\det \not{g}(0,0)}} d\mu_{\not{g}(0,0)} \tag{8.328}$$

由 θ 的定义, 以及在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上 $\Xi=0$, 我们有

$$\kappa \mathrm{tr}\theta = \frac{1}{\sqrt{\det \not{g}}}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\det \not{g}} \tag{8.329}$$

由 **F2**, (6.85) 以及

$$\chi = \eta(\not{k} - \theta)$$

在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上我们有

$$|\kappa \mathrm{tr}\theta + \frac{2}{1-u}| \leqslant C\delta_0 \tag{8.330}$$

对 (8.330) 积分, 我们有

$$e^{-C\delta_0}(1-u)^2 \leqslant \frac{\sqrt{\det \not{g}(0,u)}}{\sqrt{\det \not{g}(0,0)}} \leqslant e^{C\delta_0}(1-u)^2 \tag{8.331}$$

将这个与 (8.173) 结合, 我们由 (8.328) 得到

$$e^{-C\delta_0}(1-u+t)^2 d\mu_{\not{g}(0,0)} \leqslant d\mu_{\not{g}(t,u)} \leqslant e^{C\delta_0}(1-u+t)^2 d\mu_{\not{g}(0,0)} \tag{8.332}$$

由 (8.326) 和 (8.327), 我们有

$$C^{-1}(1+t)\|\phi(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \leqslant \|\phi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)\|\phi(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{8.333}$$

进一步, 若 ξ 是一个定义在 $W_{\epsilon_0}^*$ 的 $S_{t,u}$ 1- 形式, 我们考虑 $\xi(t,u)$, 即 S^2 相对应的依赖于参数 t 和 u 的 1- 形式, 然后设 $\phi=|\xi|$, $\phi(t,u)=|\xi(t,u)|$, 我们有

$$\|\phi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} = \|\xi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}, \|\phi(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} = \||\xi(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{8.334}$$

所以由 (8.333) 有

$$C^{-1}(1+t)\||\xi(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \leqslant \|\xi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)\||\xi(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{8.335}$$

我们现在考虑 (8.175) 的右端项: ${}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^0(t,u)$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t,u)$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t,u)$, 它们分别由 (8.176), (8.177) 和 (8.178) 给出.

首先由 **A3**, (8.335) 和 (8.235) 有

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^0(t,u)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \leqslant C(1+\log(1+t))^2\|{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \tag{8.336}$$

我们转向 ${}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t,u)$. 将 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 分解为

$$\mathcal{V}_{s-} = \{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2 : \hat{E}_s(u,\vartheta)<0\} \tag{8.337}$$

和

$$\mathcal{V}_{s+} = \{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2 : \hat{E}_s(u,\vartheta)\geqslant 0\} \tag{8.338}$$

则我们有

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|^2_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} = \|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} + \|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s+})} \tag{8.339}$$

由 Minkowski 不等式, 我们有

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant \int_0^t \|{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}dt' \tag{8.340}$$

其中

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t',u)\\&=\Big(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)}\Big)^2(1-u+t')^3\Big(-2\mu^{-1}\Big(\frac{\partial\mu}{\partial t}\Big)_-(t',u)\Big)|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t',u)|\end{aligned} \tag{8.341}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\ \leqslant\ &(1+t')^3(\max_{\mathcal{V}_{s-}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s-}}(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t'))\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t')|\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\end{aligned}\tag{8.342}$$

现在由引理 8.11 的推论 1, 我们有

$$\max_{\mathcal{V}_{s-}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')}\leqslant C\tag{8.343}$$

而由 (8.249) 有

$$\max_{\mathcal{V}_{s-}}(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t'))\leqslant 2M(t')\tag{8.344}$$

将这个代入 (8.342) 有

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\leqslant C(1+t')^3M(t')\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t')|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\tag{8.345}$$

定义

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t)=(1+t)^2\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\tag{8.346}$$

假设对非负量 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}, {}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}$, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t)\leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}(t)\tag{8.347}$$

定义非减非负量 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}, {}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}$ 为

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}=\sup_{t'\in[0,t]}(\bar{\mu}_m^a(t')^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}(t'))\tag{8.348}$$

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}=\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')^{1/2}\bar{\mu}_m^a(t')^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}(t'))\tag{8.349}$$

则对任意 $t'\in[0,t]$ 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t')\leqslant\bar{\mu}_m^{-a}(t')({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t')^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\tag{8.350}$$

将其代入 (8.345), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\ \leqslant\ &C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t')M(t')\end{aligned}\tag{8.351}$$

对任意 $t' \in [0,t]$ 成立. 将其代入 (8.340), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))I_a(t)\end{aligned} \tag{8.352}$$

运用引理 8.11 得

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant Ca^{-1}((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned} \tag{8.353}$$

与 (8.340) 和 (8.342) 类似, 将 $\mathcal{V}_{s+}$ 代替 $\mathcal{V}_{s-}$, 我们有

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}^2 \leqslant \int_0^t \|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt' \tag{8.354}$$

和

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^1(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant (1+t')^3(\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s+}}(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t'))\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t')|\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\end{aligned} \tag{8.355}$$

由 (8.255), 我们有

$$\max_{\mathcal{V}_{s+}}(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t')) \leqslant C\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t')) \tag{8.356}$$

然后由 (8.254), 我们有

$$\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')} \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{8.357}$$

将 (8.356) 和 (8.357) 以及 (8.346) 代入 (8.354) 和 (8.355), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))^2\int_0^t\frac{1+\log(1+t')}{1+t'}{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t')dt'\end{aligned} \tag{8.358}$$

所以由 (8.350) 有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))^2({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\\&\quad\cdot\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\bar{\mu}_m^{-a}(t')dt'\end{aligned} \tag{8.359}$$

为了估计 (8.359) 中的积分, 我们将运用引理 8.11 的推论 2 的证明方法. 我们将考虑两种情形: $\hat{E}_{s,m} \geqslant 0$ 和 $\hat{E}_{s,m} < 0$. 在第一种情形 (8.322) 成立, 所以如果

$$\delta_0 a \leqslant \frac{1}{C}$$

我们有

$$\bar{\mu}_m(t')^{-a} \leqslant (1-\frac{1}{a})^{-a} \leqslant C \tag{8.360}$$

以及

$$\int_0^t \frac{1+\log(1+t')}{1+t'}\bar{\mu}_m^{-a}(t')dt' \leqslant C(1+\log(1+t))^2 \tag{8.361}$$

在第二种情形, 我们像以前那样由 $\hat{E}_{s,m} = -\delta_1$ 定义 $\delta_1 > 0$, 由 (8.269) 定义 t_1. 那么对于 $t' \leqslant t_1$, (8.273) 成立, 所以对所有 $t \leqslant t_1$, 我们有一个如同 (8.361) 的估计成立.

若 $t' > t_1$, 则 (8.303) 成立, 前提是 δ_0 满足 (8.292). 所以我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^t \frac{1+\log(1+t')}{1+t'}\bar{\mu}_m^{-a}(t')dt' \leqslant C\int_{\tau_1}^{\tau}(1+\tau')(1-\delta_1\tau')^{-a}d\tau' \\
&\leqslant C(1+\tau)\int_{\tau_1}^{\tau}(1-\delta_1\tau')^{-a}d\tau' \leqslant C(1+\tau)\cdot\frac{(1-\delta_1\tau)^{1-a}}{\delta_1(a-1)} \\
&= 2C(1-\frac{1}{a})^{-1}\tau_1(1+\tau)(1-\delta_1\tau)^{1-a}
\end{aligned} \tag{8.362}$$

最后一个不等式由 (8.285) 的第一式得来. 由上界 (8.312), 我们知道最后一项被

$$(1+\log(1+t))^2\bar{\mu}_m^{1-a}(t)$$

乘上一个常数界定.

一般地, 我们有

$$\int_0^t \frac{1+\log(1+t')}{1+t'}\bar{\mu}_m^{-a}(t')dt' \leqslant C(1+\log(1+t))^2\bar{\mu}_m^{1-a}(t) \tag{8.363}$$

将这个代入 (8.359) 意味着

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})} \\
&\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))^4({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t) + {}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{1-a}(t)
\end{aligned} \tag{8.364}$$

由 (8.364) 和 (8.353) 以及 $C\delta_0 \leqslant \frac{1}{a}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^1(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \\
&\leqslant Ca^{-1}((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t) + (1+t)^{1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)
\end{aligned} \tag{8.365}$$

转向 ${}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t,u)$. 我们有

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|^2_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} = \|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} + \|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s+})} \tag{8.366}$$

以及

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant \int_0^t \|{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}dt' \tag{8.367}$$

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})} \leqslant \int_0^t \|{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt' \tag{8.368}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t',u) = (\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^3(\frac{1}{2}\text{tr}\chi(t',u))|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t',u)| \tag{8.369}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\ \leqslant\ &(1+t')^3(\max_{\mathcal{V}_{s-}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s-}}(\frac{1}{2}\text{tr}\chi(t'))\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t')|\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\end{aligned} \tag{8.370}$$

现在由 **F2**,

$$\max_{[0,\epsilon_0]\times S^2}(\frac{1}{2}\text{tr}\chi(t')) \leqslant C(1+t')^{-1} \tag{8.371}$$

这与 (8.343) 共同意味着

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant C(1+t')^2\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t')|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{8.372}$$

然后由 (8.346), (8.350) 以及引理 8.11 的推论 2, 我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant C^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t')\\ \leqslant\ &C({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(0)}_{l,a}(t) + (1+t')^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(1)}_{l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t')\\ \leqslant\ &C'({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(0)}_{l,a}(t) + (1+t')^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(1)}_{l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned} \tag{8.373}$$

将 (8.373) 代入 (8.367), 我们得到

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(0)}_{l,a}(t) + (1+t)^{1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(1)}_{l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t) \tag{8.374}$$

与 (8.370) 类似, 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant (1+t')^3(\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s+}}(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi(t'))\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t')|\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\end{aligned} \tag{8.375}$$

为了估计

$$\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')}=\max_{(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}}\frac{\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)}{\hat{\mu}_s(t',u,\vartheta)}$$

我们用命题 8.6 得到

$$\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')}\leqslant\max_{(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}}\frac{1+C\delta_0+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)}{1-C\delta_0+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t')} \tag{8.376}$$

我们需要考虑两种情形: $t'<\sqrt{t}$ 和 $t'\geqslant\sqrt{t}$. 在第二种情形我们有 $1+t'\geqslant 1+\sqrt{t}\geqslant\sqrt{1+t}$, 所以

$$\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t')\geqslant\frac{1}{2}\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t),\quad\forall(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}$$

然后由 (8.376), 我们得到

$$\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')}\leqslant 2,\quad t'\geqslant\sqrt{t} \tag{8.377}$$

前提是

$$C\delta_0\leqslant\frac{1}{3}$$

另一方面, 在第一种情形, 我们显然有

$$\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')}\leqslant C(1+\log(1+t)),\quad t'<\sqrt{t} \tag{8.378}$$

由 (8.371) 以及 (8.346), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant C(1+\log(1+t))^{2(i_1\cdots i_l)}P_l(t'),\quad t'<\sqrt{t}\\&\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant C^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t'),\quad t'\geqslant\sqrt{t}\end{aligned} \tag{8.379}$$

将 (8.379) 代入 (8.368) 意味着

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\
&\leqslant \int_0^{\sqrt{t}}\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'+\int_{\sqrt{t}}^t\|^{(i_1\cdots i_l)}N_l^2(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'\\
&\leqslant C(1+\log(1+t))^2\int_0^{\sqrt{t}}{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t')dt'+C\int_{\sqrt{t}}^t{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t')dt'\\
&\leqslant C(1+\log(1+t))^2\int_0^{\sqrt{t}}\bar{\mu}_m^{-a}(t')({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t')^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))dt'\\
&\quad+C\int_{\sqrt{t}}^t\bar{\mu}_m^{-a}(t')({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t')^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))dt'\\
&\leqslant C(1+\log(1+t))^2((1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/4(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\
&\quad+C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\
&\leqslant C'((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)
\end{aligned}\tag{8.380}$$

这里我们用到了 (8.350) 和引理 8.11 的推论 2.

将 (8.374) 和 (8.380) 组合起来, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}M_l^2(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&\leqslant C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)
\end{aligned}\tag{8.381}$$

最终由 (8.336), (8.365) 和 (8.381) 通过 (8.175) 推出如下估计:

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}F_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&\leqslant C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\
&\quad+C(1+t)^{-2}({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)
\end{aligned}\tag{8.382}$$

我们现在考虑关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t,u)$ 的估计 (8.179). 由 (8.343) 和 (8.357), 我们有

$$\max_{[0,\epsilon_0]\times S^2}\frac{\mu(t)}{\mu(t')}\leqslant C(1+\log(1+t))\tag{8.383}$$

所以 (8.179) 意味着

$${}^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t,u)\leqslant C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^3|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l(t',u)|dt'\tag{8.384}$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \\
\leqslant\ & C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^3\||^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l(t')|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}dt' \qquad (8.385)
\end{aligned}$$

$S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l$ 由 (8.150) 给出. 这里需要将声学主部区别开来. 关于 (8.64), 我们定义如下函数:

$$^{(i_1\cdots i_l)}\dot{h}_l={}^{(i_1\cdots i_l)}h_l-2\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l \qquad (8.386)$$

则 $\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{h}_l$ 不包含声学主部. 同样由引理 8.4 后面的讨论, $^{(i_1\cdots i_l)}g_l$ 的声学主部由 (8.89) 中的求和项组成. 从而 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式

$$^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l={}^{(i_1\cdots i_l)}g_l+\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1} \qquad (8.387)$$

不包含声学主部. 所以

$$^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l=2\mu\hat{\chi}\cdot\not{D}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l-\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\ddot{g}_l \qquad (8.388)$$

其中

$$^{(i_1\cdots i_l)}\ddot{g}_l={}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l+\mu(2\not{D}\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l+\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{h}_l) \qquad (8.389)$$

不包含声学主部.

定义

$$X_l(t)=\max_{i_1\cdots i_l}\||^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \qquad (8.390)$$

我们将用 $X_l(t)$ 估计 $\||^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}$. 首先考虑 (8.388) 右端的第二项. 由 (8.98), 我们有

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}| \\
\leqslant\ & C(1+t)^{-1}(\sum_{k=0}^{l-1}|^{(R_{i_{l-k}})}Z|\sum_j|^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l j)}x_l|+{}^{(i_1\cdots i_l)}z_l) \qquad (8.391)
\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}z_l\\
&=\sum_{k=0}^{l-1}|{}^{(R_{i_{l-k}})}Z|(\sum_j|\not{d}({}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l j)}\check{f}_l)|\\
&\quad+(1+t)|\not{d}\mu||\not{d}(R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}R_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)|)\\
&\quad\cdot\sum_{k=0}^{l-1}(\max_j|\not{\mathcal{L}}_{R_j}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z|)(|{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}|\\
&\quad+|\not{d}({}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}\check{f}_{l-1})|)
\end{aligned}\tag{8.392}
$$

由 (6.184), 我们有

$$
|{}^{(R_i)}Z|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\tag{8.393}
$$

将其代入 (8.391), 我们推出

$$
\begin{aligned}
&\||\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})_Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x_{l-1}|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&\leqslant Cl\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X_l(t)+C(1+t)^{-1}\|{}^{(i_1\cdots i_l)}z_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}\tag{8.394}
$$

接下来考虑 (8.388) 右端的第一项. 由 **F2** 的第二式, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|2\mu|\hat{\chi}\cdot\not{D}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\mu|\not{D}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}\tag{8.395}
$$

由椭圆估计 (8.149) 以及对 $S_{t,u}$ 上任意阶张量场 ξ 成立的不等式

$$
C^{-1}(1+t)\||\xi(t,u)|\|_{L^2(S^2)}\leqslant\|\xi\|_{L^2(S_{t,u})}\leqslant C(1+t)\||\xi(t,u)|\|_{L^2(S^2)}\tag{8.396}
$$

其中 $\xi(t,u)$ 是 S^2 上相对应的张量场, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|\mu|\not{D}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l|(t,u)\|_{L^2(S^2)}\\
&\leqslant C\||{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t,u)|\|_{L^2(S^2)}\\
&\quad+C\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t,u)|\|_{L^2(S^2)}+C\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}i_l|(t,u)\|_{L^2(S^2)}\\
&\quad+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\||{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l(t,u)|\|_{L^2(S^2)}
\end{aligned}\tag{8.397}
$$

在 $[0,\epsilon_0]$ 上取 L^2 范数, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\mu|\not D^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ & C\||^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\||\not d^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+C\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}i_l|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\||^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}\tag{8.398}$$

由 (8.394), (8.395) 和 (8.398), 我们从 (8.388) 得到

$$\begin{aligned}
&\||^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ & C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X_l(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l(t)
\end{aligned}\tag{8.399}$$

其中

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l(t)=\ & C\delta_0^2(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\||^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
& C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\||\not d^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}i_l|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C(1+t)^{-1}\|^{(i_1\cdots i_l)}z_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+\||^{(i_1\cdots i_l)}\ddot{g}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}\tag{8.400}$$

回到 (8.170), 在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 上取 L^2 范数, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\||^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ & \|^{(i_1\cdots i_l)}F_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+\|^{(i_1\cdots i_l)}G_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}\tag{8.401}$$

代入 (8.382), (8.385) 和 (8.399), 我们有

$$\begin{aligned}
&\||^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ & {}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)+C(l+1)\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))X_l(t')dt'
\end{aligned}\tag{8.402}$$

其中

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)=\ & C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\
&+C(1+t)^{-2}({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\
&+C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^{3}{}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l(t')dt'
\end{aligned}\tag{8.403}$$

将 (8.402) 关于 $i_1, \cdots, i_l$ 取极大, 回忆定义 (8.390), 我们得到了积分不等式

$$X_l(t) \leqslant B_l(t) + C(l+1)\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2 \cdot \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))X_l(t')dt' \tag{8.404}$$

其中

$$B_l(t) = \max_{i_1 \cdots i_l} {}^{(i_1 \cdots i_l)}B_l(t) \tag{8.405}$$

设

$$Y_l(t) = \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))X_l(t')dt' \tag{8.406}$$

则 (8.404) 变为

$$\frac{dY_l(t)}{dt} \leqslant (1+t)(1+\log(1+t))B_l(t) + C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^3 Y_l(t) \tag{8.407}$$

这意味着

$$Y_l(t) \leqslant e^{C_l(t)} \int_0^t e^{-C_l(t')}(1+t')(1+\log(1+t'))B_l(t')dt' \tag{8.408}$$

其中

$$C_l(t) = C(l+1)\delta_0 \int_0^t \frac{(1+\log(1+t'))^3}{(1+t')^2} dt' \tag{8.409}$$

显然,

$$0 \leqslant C_l(t) \leqslant C'(l+1)\delta_0 \tag{8.410}$$

所以, 如果

$$\delta_0 \leqslant \frac{\log 2}{C'(l+1)} \tag{8.411}$$

(8.408) 意味着

$$Y_l(t) \leqslant 2\int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))B_l(t')dt' \tag{8.412}$$

将其代入 (8.402), 回忆 (8.406), 我们最终得到

$$\begin{aligned}&\||{}^{(i_1 \cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0] \times S^2)} \\ \leqslant &{}^{(i_1 \cdots i_l)}B_l(t) + 2C(l+1)\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2 \\ &\cdot \int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))B_l(t')dt'\end{aligned} \tag{8.413}$$

第九章 关于 $\not\Delta\mu$ 的传输方程的正则化. μ 的最高阶空间导数的估计

9.1 传输方程的正则化

在这一章, 我们将考虑传输方程 (3.92):

$$L\mu = m + \mu e \tag{9.1}$$

其中

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}Th \tag{9.2}$$

以及

$$e = \frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'Lh + \frac{1}{\eta}\hat{T}^i(L\psi_i) \tag{9.3}$$

由于

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho}{d\rho/dh} = \frac{dp/dh}{d\rho/dh} = \eta^2$$

所以 (9.3) 有如下形式:

$$e = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh}Lh + \frac{1}{\eta}\hat{T}^i(L\psi_i) \tag{9.4}$$

引理 9.1 下述交换子的公式成立:

$$[L,\Delta\!\!\!/]\phi+\mathrm{tr}\chi\Delta\!\!\!/\phi=-2\hat{\chi}\cdot\hat{D\!\!\!/}^2\phi-2\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}\hat{\chi}\cdot d\!\!\!/\phi$$

和

$$[T,\Delta\!\!\!/]\phi+\kappa\mathrm{tr}\theta\Delta\!\!\!/\phi=-2\kappa\hat{\theta}\cdot\hat{D\!\!\!/}^2\phi-2\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}(\kappa\hat{\theta})\cdot d\!\!\!/\phi$$

这里 ϕ 是任意一个定义在 $W^*_{\epsilon_0}$ 上面的函数.

证明 我们在声学坐标 $(t,u,\vartheta^1,\vartheta^2)$ 下计算, 有

$$\Delta\!\!\!/\phi=(g\!\!\!/^{-1})^{AB}D\!\!\!/_A(d\!\!\!/_B\phi)=(g\!\!\!/^{-1})^{AB}\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^A\partial\vartheta^B}-\Gamma\!\!\!/^C_{AB}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta^C}\Big)\tag{9.5}$$

由于在声学坐标下有 $L=\frac{\partial}{\partial t}$, 我们得到

$$\begin{aligned}L\Delta\!\!\!/\phi=&(g\!\!\!/^{-1})^{AB}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^A\partial\vartheta^B}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big)-\Gamma\!\!\!/^C_{AB}\frac{\partial}{\partial\vartheta^C}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big)\Big)\\&+\frac{\partial}{\partial t}(g\!\!\!/^{-1})^{AB}D\!\!\!/_A(d\!\!\!/_B\phi)-(g\!\!\!/^{-1})^{AB}\frac{\partial\Gamma\!\!\!/^C_{AB}}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta^C}\end{aligned}\tag{9.6}$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(g\!\!\!/^{-1})^{AB}=-2\chi^{AB}\tag{9.7}$$

和

$$\frac{\partial\Gamma\!\!\!/^C_{AB}}{\partial t}=D\!\!\!/_A\chi^C_B+D\!\!\!/_B\chi^C_A-D\!\!\!/^C\chi_{AB}\tag{9.8}$$

这里我们用到了对于一个非退化矩阵 M,

$$\frac{dM^{-1}}{dt}=-M^{-1}\frac{dM}{dt}M^{-1}$$

以及我们推导 (8.109) 的方法.

所以

$$(g\!\!\!/^{-1})^{AB}\frac{\partial\Gamma\!\!\!/^C_{AB}}{\partial t}=2\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}\chi^C-d\!\!\!/^C\mathrm{tr}\chi=2\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}\hat{\chi}^C\tag{9.9}$$

将 (9.6) 和 (9.8) 代入 (9.5), 我们得到

$$L\Delta\!\!\!/\phi=\Delta\!\!\!/L\phi-2\chi^{AB}D\!\!\!/_A(d\!\!\!/_B\phi)-2(\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}\hat{\chi})^Ad\!\!\!/_A\phi\tag{9.10}$$

由

$$2\chi^{AB}\not{D}_A(\not{d}_B\phi) = \text{tr}\chi\not{\Delta}\phi + 2\hat{\chi}^{AB}\not{D}_A(\not{d}_B\phi)$$

第一个公式得证. 第二个公式可以用相同的方法证明. □

取 $\phi = h$, 运用第二个公式得到

$$\not{\Delta}Th = T\not{\Delta}h + c_T \tag{9.11}$$

其中

$$c_T = \kappa\text{tr}\theta\not{\Delta}h + 2\kappa\hat{\theta}\cdot\hat{\not{D}}^2 h + 2\not{\text{d}}\text{iv}(\kappa\hat{\theta})\cdot\not{d}h \tag{9.12}$$

c_T 是二阶的, 并且当 $\mu \to 0$ 时正则. 最后一项是声学主部.

我们现在运用第八章中关于 h 的波方程

$$\mu\Box_g h = -\Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}\check{a} - \check{b} \tag{9.13}$$

其中

$$\check{a} = \mu a, \quad \check{b} = \mu b \tag{9.14}$$

当 $\mu \to 0$ 时正则. 由于对任意函数 ϕ 我们有

$$\mu\Box_g\phi = \mu\not{\Delta}\phi - L\underline{L}\phi - \frac{1}{2}\text{tr}\chi\underline{L}\phi - \frac{1}{2}\text{tr}\underline{\chi}L\phi - 2\zeta\cdot\not{d}\phi \tag{9.15}$$

则 (9.13) 为

$$\mu\not{\Delta}h = L\underline{L}h + \frac{1}{2}\text{tr}\chi\underline{L}h + \frac{1}{2}\text{tr}\underline{\chi}Lh + j \tag{9.16}$$

其中

$$j = 2\zeta\cdot\not{d}h - \Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dh}\check{a} - \check{b} \tag{9.17}$$

是一阶的, 并且当 $\mu \to 0$ 时正则. 将 T 运用到 (9.16), 并由

$$[L, T] = \Lambda \tag{9.18}$$

我们有

$$T(\mu\not{\Delta}h) = L(T\underline{L}h) - \Lambda \cdot \not{d}\underline{L}h + \frac{1}{2}T(\mathrm{tr}\chi\underline{L}h) + \frac{1}{2}T(\mathrm{tr}\underline{\chi}Lh) + Tj \tag{9.19}$$

另一方面, 由 (9.11), 我们有

$$\mu\not{\Delta}Th = T(\mu\not{\Delta}h) - (T\mu)\not{\Delta}h + \mu c_T \tag{9.20}$$

组合起来我们得到

$$\mu\not{\Delta}Th = L(T\underline{L}h) + \frac{1}{2}T(\mathrm{tr}\chi\underline{L}h) + \frac{1}{2}T(\mathrm{tr}\underline{\chi}Lh) + j' \tag{9.21}$$

其中

$$j' = Tj - \Lambda \cdot \not{d}\underline{L}h + \mu c_T - (T\mu)\not{\Delta}h \tag{9.22}$$

j' 是二阶的, 并且当 $\mu \to 0$ 时正则. j' 中的唯一一个声学主部来自于 c_T 的最后一项.

我们有

$$\not{\Delta}m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\not{\Delta}Th + w_0 \tag{9.23}$$

其中

$$w_0 = \frac{d^2H}{dh^2}\not{d}h \cdot \not{d}Th + \frac{1}{2}(\frac{d^2H}{dh^2}\not{\Delta}h + \frac{d^3H}{dh^3}|\not{d}h|^2)Th \tag{9.24}$$

是二阶的并且当 $\mu \to 0$ 时正则. 由 (9.21) 有

$$\begin{aligned}\mu\not{\Delta}m = Lf_0' - \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}(Lh)(T\underline{L}h) + \frac{1}{4}\frac{dH}{dh}((Lh)T\mathrm{tr}\underline{\chi} + (\underline{L}h)T\mathrm{tr}\chi)\\ +\frac{1}{4}\frac{dH}{dh}(\mathrm{tr}\underline{\chi}(TLh) + \mathrm{tr}\chi(T\underline{L}h)) + \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}j' + \mu w_0\end{aligned} \tag{9.25}$$

其中

$$f_0' = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}T\underline{L}h \tag{9.26}$$

这里我们注意到右端第三项包含声学主部. 由第三章中关于 $\not{\mathcal{L}}_T\chi$ 的方程, $T\mathrm{tr}\chi$ 的声学主部是 $\not{\Delta}\mu$. 同样由于

$$\underline{\chi} = \eta^{-1}\kappa(-\chi + 2\not{k}) \tag{9.27}$$

$T\mathrm{tr}\underline{\chi}$ 的声学主部是 $-\eta^{-1}\kappa\not\Delta\mu$. 从而 (9.25) 右端第三项的声学主部是

$$\frac{1}{4}\frac{dH}{dh}(-\eta^{-1}\kappa(Lh)+(\underline{L}h))\not\Delta\mu=\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(Th)\not\Delta\mu=m\not\Delta\mu \tag{9.28}$$

所以我们有

$$\mu\not\Delta m=Lf_0'+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi f_0'+m\not\Delta\mu+w_0' \tag{9.29}$$

其中

$$\begin{aligned} w_0'=&-\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dh^2}(Lh)(T\underline{L}h)+\frac{1}{4}\frac{dH}{dh}(T\mathrm{tr}\chi-\not\Delta\mu)\underline{L}h\\ &+\frac{1}{4}\frac{dH}{dh}(T\mathrm{tr}\underline{\chi}+\eta^{-1}\kappa\not\Delta\mu)Lh+\frac{1}{4}\frac{dH}{dh}\mathrm{tr}\underline{\chi}TLh+\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}j'+\mu w_0 \end{aligned} \tag{9.30}$$

的声学主部仅仅来自于 j'.

回到 e. 我们有

$$\not\Delta e=\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh}\not\Delta Lh+\frac{1}{\eta}\hat{T}^i\not\Delta L\psi_i+w_1 \tag{9.31}$$

其中

$$\begin{aligned} w_1=&2\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh})\not dh\cdot\not dLh+2(\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta})\hat{T}^i\not dh\cdot\not dL\psi_i+\frac{1}{\eta}\not d\hat{T}^i\cdot\not dL\psi_i)\\ &+(\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh})\not\Delta h+\frac{d^2}{dh^2}(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh})|\not dh|^2)Lh\\ &+((\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta})\not\Delta h+\frac{d^2}{dh^2}(\frac{1}{\eta})|\not dh|^2)\hat{T}^i+2\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta})\not dh\cdot\not d\hat{T}^i+\frac{1}{\eta}\not\Delta\hat{T}^i)L\psi_i \end{aligned} \tag{9.32}$$

是二阶的并且当 $\mu\to 0$ 时正则. w_1 中的唯一一项声学主部

$$\frac{1}{\eta}\not\Delta\hat{T}^iL\psi_i \tag{9.33}$$

包含在 (9.32) 右端的最后一项中.

将引理 9.1 运用到 $\phi=h,\psi_i$, 我们得到

$$\not\Delta e=\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh}L\not\Delta h+\frac{1}{\eta}\hat{T}^iL\not\Delta\psi_i+c_L+w_1 \tag{9.34}$$

其中

$$c_L=\frac{2}{\eta}\frac{d\eta}{dh}(\chi\cdot\not D^2h+\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\hat{\chi}\cdot\not dh)+\frac{2}{\eta}\hat{T}^i(\chi\cdot\not D^2\psi_i+\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\hat{\chi}\cdot\not d\psi_i) \tag{9.35}$$

包含的声学主部与 $\not{d}\mathrm{iv}\hat{\chi}$ 有关. 定义

$$f_1' = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh}\not\Delta h + \frac{1}{\eta}\hat{T}^i\not\Delta\psi_i \tag{9.36}$$

则我们有

$$\mu^2\not\Delta e = L(\mu^2 f_1') + \mu w_1' \tag{9.37}$$

其中

$$\begin{aligned} w_1' = & -2(L\mu)f_1' - \mu(\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh})(Lh)\not\Delta h + (\frac{d}{dh}(\frac{1}{\eta})(Lh)\hat{T}^i + \frac{1}{\eta}L\hat{T}^i)\not\Delta\psi_i) \\ & +\mu(c_L + w_1) \end{aligned} \tag{9.38}$$

是二阶的并且当 $\mu \to 0$ 时正则.

我们将 $\not\Delta$ 与方程 (9.1) 交换, 并且将它与 μ 相乘得到

$$\begin{aligned} & L(\mu\not\Delta\mu) + (\mu\mathrm{tr}\chi - L\mu)\not\Delta\mu \\ = & -2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not{D}}^2\mu - \mu\not{d}\mu\cdot(\not{d}\mathrm{tr}\chi + 2i - 2\not{d}e) \\ & +\mu\not\Delta m + \mu^2\not\Delta e + e\mu\not\Delta\mu \end{aligned} \tag{9.39}$$

将 (9.29) 代入 (9.39), 并且将 (9.29) 中的 $m\not\Delta\mu$ 与 (9.39) 右端的最后一项组合起来代入 $(L\mu)\not\Delta\mu$. 这一项将被移到 (9.39) 的左边, 使得左边 $\not\Delta\mu$ 的系数等于 $\mu\mathrm{tr}\chi - 2L\mu$. 同样定义

$$\check{f}' = f_0' + \mu^2 f_1' \tag{9.40}$$

和

$$x' = \mu\not\Delta\mu - \check{f}' \tag{9.41}$$

$L\check{f}'$ 被放到 (9.39) 的左边. 那么左边变成

$$Lx' + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))(x' + \check{f}') \tag{9.42}$$

右端则是

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi f_0' - 2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not{D}}^2\mu - \mu\not{d}\mu\cdot(\not{d}\mathrm{tr}\chi + 2i - 2\not{d}e) + w_0' + \mu w_1' \tag{9.43}$$

然后定义

$$\check{g}' = -\frac{\mu^2}{2}\mathrm{tr}\chi f_1' - \mu \not{d}\mu \cdot (\not{d}\mathrm{tr}\chi + 2i - 2\not{d}e) + w_0' + \mu w_1' \tag{9.44}$$

得到的方程有如下形式

$$\begin{aligned} &Lx' + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))x' \\ &= -(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))\check{f}' - 2\mu\hat{\chi} \cdot \hat{\not{D}}^2 \mu + \check{g}' \end{aligned} \tag{9.45}$$

函数 $\check{f}'$, $\check{g}'$ 是二阶的, 并且当 $\mu \to 0$ 时正则. 函数 $\check{f}'$ 不包含声学主部. 由上述讨论, $\check{g}'$ 的声学主部除了 $-\mu\not{d}\mu \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi$ 都包含在 (9.43) 的最后两项中. 事实上, w_0' 的声学主部包含在

$$\frac{1}{2}\mu\frac{dH}{dh}c_T \tag{9.46}$$

中, 它来自于 (9.30) 中的项 $\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\check{j}'$. 由于

$$\theta = \not{k} - \eta^{-1}\chi \tag{9.47}$$

考虑到 Codazzi 方程

$$\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\hat{\chi} = \frac{1}{2}\not{d}\mathrm{tr}\chi + i \tag{9.48}$$

这个声学主部是

$$-\frac{\mu^2}{\eta^2}\frac{dH}{dh}\not{d}h \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi \tag{9.49}$$

$\mu w_1'$ 的声学主部包含在

$$\mu^2(c_L + w_1) \tag{9.50}$$

中. 考虑到 Codazzi 方程, $\mu^2 c_L$ 的声学主部是

$$\frac{\mu^2}{\eta}(\frac{d\eta}{dh}\not{d}h + \hat{T}^i\not{d}\psi_i) \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi \tag{9.51}$$

最终, $\mu^2 w_1$ 的声学主部包含在

$$\frac{\mu^2}{\eta}\not{\Delta}\hat{T}^i L\psi_i \tag{9.52}$$

中. 由第三章的结果, $\not\Delta\hat{T}^i$ 的声学主部是

$$-\eta^{-1}\not d x^i\cdot\not d\mathrm{tr}\chi \tag{9.53}$$

现在,

$$\frac{\partial x^i}{\partial\vartheta^A}L\psi_i=X^i_A L\psi_i=L^\mu X_A\psi_\mu \tag{9.54}$$

所以

$$\begin{aligned}(\not d x^i)L\psi_i&=L^\mu\not d\psi_\mu=\not d\psi_t+L^i\not d\psi_i\\&=\not d\psi_t-\psi^i\not d\psi_i-\eta\hat{T}^i\not d\psi_i=\not dh-\eta\hat{T}^i\not d\psi_i\end{aligned} \tag{9.55}$$

从而 (9.52) 的声学主部是

$$\frac{\mu^2}{\eta}(-\frac{1}{\eta}\not dh+\hat{T}^i\not d\psi_i)\cdot\not d\mathrm{tr}\chi \tag{9.56}$$

综合上述结果并且注意到

$$-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}=1+\eta\frac{d\eta}{dh} \tag{9.57}$$

我们得出 $\check{g}'$ 的声学主部是

$$\xi\cdot(\mu\not d\mathrm{tr}\chi) \tag{9.58}$$

其中

$$\xi=-\not d\mu+\frac{2\mu}{\eta}\hat{T}^i\not d\psi_i+\frac{2\mu}{\eta}\frac{d\eta}{dh}\not dh \tag{9.59}$$

9.2 高阶空间导数的传输方程

现在回到传输方程 (9.45). 为了估计 μ 的高阶空间导数, 我们引入函数

$$^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}=\mu R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu-R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\check{f}' \tag{9.60}$$

我们有

$$x'_{0,0}=x' \tag{9.61}$$

为了导出 $x'_{m,l}$ 的传输方程, 我们将用到如下引理.

引理 9.2 设 α 和 β 是定义在时空区域 $W^*_{\epsilon_0}$ 中, $S_{t,u}$ 上无迹的对称二阶协变张量场. 那么我们有

$$T(\alpha\cdot\beta)=(\hat{\not{\mathcal{L}}}_T\alpha)\cdot\beta+\alpha\cdot(\hat{\not{\mathcal{L}}}_T\beta)-\mathrm{tr}^{(T)}\not\pi(\alpha\cdot\beta)$$

证明 由于 T 与 Σ_t 相切, 我们可以将自己限制在 Σ_t 上. 为了定义 $\hat{\not{\mathcal{L}}}_T\alpha$ 和 $\hat{\not{\mathcal{L}}}_T\beta$, 我们将 α 和 β 延拓到 $T\Sigma_t$ 使得

$$\alpha(V,T)=\beta(V,T)=0,\quad \forall V\in T\Sigma_t \tag{9.62}$$

由于

$$\bar{g}^{-1}=\hat{T}\otimes\hat{T}+(\not{g}^{-1})^{AB}X_A\otimes X_B \tag{9.63}$$

我们有

$$\alpha\cdot\beta=(\not{g}^{-1})^{AC}(\not{g}^{-1})^{BD}\alpha_{AB}\beta_{CD}=(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\alpha_{ab}\beta_{cd} \tag{9.64}$$

则

$$T(\alpha\cdot\beta)=-{}^{(T)}\bar{\pi}^{ab}\gamma_{ab}+(\mathcal{L}_T\alpha)_{ab}\beta^{ab}+\alpha^{ab}(\mathcal{L}_T\beta)_{ab} \tag{9.65}$$

这里

$${}^{(T)}\bar{\pi}_{ab}=(\mathcal{L}_T\bar{g})_{ab},\quad {}^{(T)}\bar{\pi}^{ab}=(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd(T)}\bar{\pi}_{cd} \tag{9.66}$$

γ 是 Σ_t 上的一个对称二阶协变张量场, 它由

$$\gamma_{ab}=(\bar{g}^{-1})^{cd}(\alpha_{ac}\beta_{bd}+\beta_{ac}\alpha_{bd}) \tag{9.67}$$

给出. 我们有

$$\gamma_{ab}T^b=0$$

所以我们可以将 γ 视为 $S_{t,u}$ 上的对称二阶协变张量场. 对任意两个对称无迹的二阶矩阵 A 和 B, 我们有

$$AB+BA-\mathrm{tr}(AB)I=0$$

在一个相对于度量 $\not{g}$ 的幺正标价下, 可以把 α 和 β 的分量视为 A 和 B. 那么 γ 的分量是 $AB+BA$, 即

$$\gamma_{AB}=(\alpha\cdot\beta)\not{g}_{AB} \tag{9.68}$$

所以我们有

$$^{(T)}\hat{\pi}^{AB}\gamma_{AB} = {}^{(T)}\not\pi^{AB}\gamma_{AB} = \mathrm{tr}^{(T)}\not\pi(\alpha\cdot\beta) \tag{9.69}$$

由于 α 和 β 是无迹的, 引理得证. □

类似地, 我们有

引理 9.3 设 α 和 β 是定义在时空区域 $W^*_{\epsilon_0}$ 中, $S_{t,u}$ 上的无迹的对称二阶协变张量场. 那么我们有

$$R_i(\alpha\cdot\beta) = (\hat{\not\mathcal{L}}_{R_i}\alpha)\cdot\beta + \alpha\cdot(\hat{\not\mathcal{L}}_{R_i}\beta) - \mathrm{tr}^{(R_i)}\not\pi(\alpha\cdot\beta)$$

为了简化关于 $x'_{m,l}$ 的传输方程的推导, 我们引入函数

$$^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l} = R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\check{f}' \tag{9.70}$$

$$\hat{\not\mu}_2 = \hat{\not D}^2\mu \tag{9.71}$$

以及

$$^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l} = \hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(\hat{\not\mathcal{L}}_T)^m\hat{\not\mu}_2 \tag{9.72}$$

命题 9.1 对每个非负整数 m, 函数 $x'_{m,0}$ 满足传输方程

$$Lx'_{m,0} + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))x'_{m,0} = -(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))\check{f}'_{m,0} - 2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m,0} + g'_{m,0}$$

其中 $g'_{m,0}$ 由

$$g'_{m,0} = T^m\check{g}' + \sum_{k=0}^{m-1}T^k\Lambda x'_{m-k-1,0} + \sum_{k=0}^{m-1}T^k y'_{m-k,0}$$

给出. 这里对每个 $j=1,\cdots,m$, $y'_{j,0}$ 是函数

$$\begin{aligned}y'_{j,0} = &-(T\mu)a'_{j-1,0} + (TL\mu - \mu T\mathrm{tr}\chi - \Lambda\mu)T^{j-1}\not\Delta\mu\\ &+\frac{1}{2}(T\mathrm{tr}\chi)\check{f}'_{j-1,0} - 2\mu(\hat{\not\mathcal{L}}_T\hat{\chi} - \mathrm{tr}^{(T)}\not\pi\hat{\chi})\cdot\hat{\not\mu}_{2,j-1,0}\end{aligned}$$

其中

$$a'_{j-1,0} = LT^{j-1}\not\Delta\mu + \mathrm{tr}\chi T^{j-1}\not\Delta\mu + 2\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,j-1,0}$$

证明 当 $m=0$ 时, 命题化为传输方程 (9.45). 对 m 用数学归纳法, 假设传输方程对 $m-1$ 成立:

$$\begin{aligned}&Lx'_{m-1,0}+(\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))x'_{m-1,0}\\&=-(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))\check{f}'_{m-1,0}-2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0}+g'_{m-1,0}\end{aligned}\tag{9.73}$$

其中 $g'_{m-1,0}$ 是某个函数. 我们将证明传输方程对 m 也成立, 其中 $g'_{m,0}$ 与 $g'_{m-1,0}$ 满足某个递推关系式. 将 (9.73) 中的项

$$2\mu^{-1}(L\mu)(x'_{m-1,0}+\check{f}'_{m-1,0})$$

重新写为

$$2(L\mu)T^{m-1}\not\Delta\mu$$

(见 (9.60) 和 (9.70)), 我们得到方程

$$\begin{aligned}&Lx'_{m-1,0}+\mathrm{tr}\chi x'_{m-1,0}\\&=2(L\mu)T^{m-1}\not\Delta\mu-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi\check{f}'_{m-1,0}-2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0}+g'_{m-1,0}\end{aligned}\tag{9.74}$$

对这个方程两边作用 T. 由

$$TT^{m-1}\not\Delta\mu=T^m\not\Delta\mu$$

$$T\check{f}'_{m-1,0}=\check{f}'_{m,0}$$

和引理 9.2, 我们有

$$T(\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0})=(\not\mathcal{L}_T\hat{\chi})\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0}+\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m,0}-\mathrm{tr}^{(T)}\not k(\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0})\tag{9.75}$$

(见 (9.72)), 我们得到

$$\begin{aligned}&TLx'_{m-1,0}+\mathrm{tr}\chi Tx'_{m-1,0}+(T\mathrm{tr}\chi)x'_{m-1,0}\\&=2(L\mu)T^m\not\Delta\mu+2(TL\mu)T^{m-1}\not\Delta\mu\\&\quad-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi\check{f}'_{m,0}-\frac{1}{2}(T\mathrm{tr}\chi)\check{f}'_{m-1,0}\\&\quad-2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m,0}-2\mu(\not\mathcal{L}_T\hat{\chi})\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0}\\&\quad+2(\mu\mathrm{tr}^{(T)}\not k-(T\mu))(\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0})+Tg'_{m-1,0}\end{aligned}\tag{9.76}$$

由

$$[L,T]=\Lambda=-(\not g^{-1})^{AB}(\zeta_B+\eta_B)X_A \tag{9.77}$$

有

$$TLx'_{m-1,0}=LTx'_{m-1,0}-\Lambda x'_{m-1,0} \tag{9.78}$$

在 (9.60) 中取 $l=0$, 把 m 换成 $m-1$:

$$x'_{m-1,0}=\mu T^{m-1}\not\Delta\mu-T^{m-1}\check{f}'$$

我们得到

$$Tx'_{m-1,0}=x'_{m,0}+(T\mu)T^{m-1}\not\Delta\mu \tag{9.79}$$

将 L 作用到 (9.79) 并且由

$$LT\mu=TL\mu+\Lambda\mu$$

我们有

$$LTx'_{m-1,0}=Lx'_{m,0}+(T\mu)LT^{m-1}\not\Delta\mu+(TL\mu+\Lambda\mu)T^{m-1}\not\Delta\mu \tag{9.80}$$

将 (9.80) 代入 (9.78), 再把结果代入 (9.76), 再把 (9.79) 代入左边, 我们得到一个所需要的形式的传输方程, 其中

$$g'_{m,0}=Tg'_{m-1,0}+\Lambda x'_{m-1,0}+y'_{m,0} \tag{9.81}$$

再运用命题 8.2, 则命题得证. □

命题 9.2 对每对非负整数 (m,l) 和每个多重指标 $(i_1\cdots i_l)$, 函数 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}$ 满足如下传输方程:

$$\begin{aligned}L^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}+(\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}=&-(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}\\&-2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l}+{}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}=&R_{i_l}\cdots R_{i_1}g'_{m,0}+\sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x'_{m,l-k-1}\\&+\sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y'_{m,l-k}\end{aligned}$$

$g'_{m,0}$ 由命题 9.1 给出, 并且对每个 $j = 1, \cdots, l$, 有

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_j)}y'_{m,j} = &-(R_{i_j}\mu)^{(i_1\cdots i_{j-1})}a'_{m,j-1} \\
&+(R_{i_j}L\mu - \mu R_{i_j}\mathrm{tr}\chi - {}^{(R_{i_j})}Z\mu)(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}T^m \not{\Delta}\mu) \\
&+\frac{1}{2}(R_{i_j}\mathrm{tr}\chi)^{(i_1\cdots i_{j-1})}\check{f}'_{m,j-1} - 2\mu(\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_j}}\hat{\chi} - \mathrm{tr}^{(R_{i_j})}\not{\pi}\hat{\chi})\cdot {}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\not{\mu}}_{2,m,j-1}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a'_{m,j-1} = &L(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}T^m \not{\Delta}\mu) \\
&+\mathrm{tr}\chi(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}T^m \not{\Delta}\mu) + 2\hat{\chi}\cdot {}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\not{\mu}}_{2,m,j-1}
\end{aligned}$$

证明 在 $l=0$ 时, 该命题就是命题 9.1. 对 l 用数学归纳法, 假设命题对 $l-1$ 成立:

$$\begin{aligned}
&L^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l-1} + (\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1} \\
&= -(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi - 2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}'_{m,l-1} \\
&-2\mu\hat{\chi}\cdot {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l-1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g'_{m,l-1}
\end{aligned} \tag{9.82}$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g'_{m,l-1}$ 是某个函数. 我们将证明相同形式的传输方程对 l 也成立, 其中 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 与 ${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g'_{m,l-1}$ 满足一个递推关系式. 把 (9.82) 中的项

$$2\mu^{-1}(L\mu)({}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}'_{m,l-1})$$

写成

$$2(L\mu)R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m \not{\Delta}\mu$$

得到方程

$$\begin{aligned}
&L^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l-1} + \mathrm{tr}\chi^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1} \\
&= 2(L\mu)R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_l}T^m \not{\Delta}\mu - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}'_{m,l-1} \\
&-2\mu\hat{\chi}\cdot {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l-1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g'_{m,l-1}
\end{aligned} \tag{9.83}$$

对该方程两边作用 R_{i_l}. 由于

$$R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}'_{m,l-1} = {}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}$$

以及引理 9.3,

$$R_{i_l}(\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m,l-1})$$
$$=(\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\hat{\chi})\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,l-1}+\hat{\chi}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l}-\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi(\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,l-1}) \tag{9.84}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&R_{i_l}L^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}+\mathrm{tr}\chi R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}+(R_{i_l}\mathrm{tr}\chi)^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}\\
=\,&2(L\mu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu+2(R_{i_l}L\mu)R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu\\
&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}-\frac{1}{2}(R_{i_l}\mathrm{tr}\chi)^{(i_1\cdots i_{l-1})}\check{f}'_{m,l-1}\\
&-2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l}-2\mu(\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\hat{\chi})\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,l-1}\\
&+2(\mu\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi-(R_{i_l}\mu))(\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,l-1})\\
&+R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g'_{m,l-1}
\end{aligned} \tag{9.85}$$

由引理 8.2, 我们有

$$[L,R_{i_l}]={}^{(R_{i_l})}Z \tag{9.86}$$

所以

$$R_{i_l}L^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}=LR_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}-{}^{(R_{i_l})}Z^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1} \tag{9.87}$$

由 ${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}$ 的定义, 我们得到

$$R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}={}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}+(R_{i_l}\mu)(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) \tag{9.88}$$

将 L 作用到 (9.88), 然后由

$$LR_{i_l}\mu=R_{i_l}L\mu+{}^{(R_{i_l})}Z$$

我们有

$$\begin{aligned}
LR_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}=\,&L^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}+(R_{i_l}\mu)L(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu)\\
&+(R_{i_l}L\mu+{}^{(R_{i_l})}Z\mu)(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu)
\end{aligned} \tag{9.89}$$

将 (9.89) 代入 (9.87), 再将结果代入 (9.85), 同样将 (9.88) 代入左端, 我们就得到了一个所需要形式的传输方程, 其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}=R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}g'_{m,l-1}+{}^{(R_{i_l})}Z^{(i_1\cdots i_{l-1})}x'_{m,l-1}+{}^{(i_1\cdots i_l)}y'_{m,l} \tag{9.90}$$

再由命题 8.2, 命题得证. □

命题 9.2 中定义的函数 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a'_{m,j-1}$ 在 $m=0, j=1$ 时变为函数

$$a'_{0,0} = L\not\Delta\mu + \mathrm{tr}\chi\not\Delta\mu + 2\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_2 \tag{9.91}$$

由引理 9.1 推出的方程

$$L(\not\Delta\mu) + (\mathrm{tr}\chi - e)\not\Delta\mu = -2\hat{\chi}\cdot\hat{\not D}^2\mu - \not d\mu\cdot(\not d\mathrm{tr}\chi + 2i - 2\not d e) + \not\Delta m + \mu\not\Delta e$$

我们有

$$a'_{0,0} = e\not\Delta\mu - 2\not d\mu\cdot \mathrm{d\not iv}\hat{\chi} + \not\Delta m + \mu\not\Delta e + 2\not d\mu\cdot\not d e \tag{9.92}$$

引理 9.4 对每个非负整数 m 我们有

$$a'_{m,0} = T^m a'_{0,0} + b'_{m,0}$$

其中

$$b'_{m,0} = \sum_{k=0}^{m-1} T^k \Lambda T^{m-k-1}\not\Delta\mu + \sum_{k=0}^{m-1} T^k c'_{m-k}$$

并且对每个 $j=1,\cdots,m$, 我们有

$$c'_j = -(T\mathrm{tr}\chi)T^{j-1}\not\Delta\mu - 2(\hat{\not\mathcal{L}}_T\hat{\chi} - \mathrm{tr}^{(T)}\not\pi\hat{\chi})\cdot\hat{\not\mu}_{2,j-1,0}$$

此外, 对每对非负整数 (m,l) 以及每个多重指标 $(i_1\cdots i_l)$, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}a'_{m,l} = R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m a'_{0,0} + {}^{(i_1\cdots i_l)}b'_{m,l}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}b'_{m,l} = {} & R_{i_l}\cdots R_{i_1}b'_{m,0} + \sum_{k=0}^{l-1} R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z R_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu \\ & + \sum_{k=0}^{l-1} R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}c''_{m,l-k}\end{aligned}$$

对每个 $j=1,\cdots,l$ 和每个多重指标 $(i_1\cdots i_j)$,

$${}^{(i_1\cdots i_j)}c''_{m,j} = -(R_{i_j}\mathrm{tr}\chi)(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) - 2(\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_j}}\hat{\chi} - \mathrm{tr}^{(R_{i_j})}\not\pi\hat{\chi})\cdot{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,j-1}$$

证明　为证明第一部分, 我们注意到对 $m=0$ 有

$$b'_{0,0}=0 \tag{9.93}$$

所以对 m 用归纳法, 假设

$$a'_{m-1,0}=T^{m-1}a'_{0,0}+b'_{m-1,0} \tag{9.94}$$

对某个 $b'_{m-1,0}$ 成立. 对这个方程作用 T, 我们得到

$$Ta'_{m-1,0}=T^m a'_{0,0}+Tb'_{m-1,0} \tag{9.95}$$

另一方面, 由定义有

$$a'_{m-1,0}=LT^{m-1}\not\Delta\mu+\mathrm{tr}\chi T^{m-1}\not\Delta\mu+2\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0} \tag{9.96}$$

对这个作用 T, 再由引理 9.2 得到

$$\begin{aligned}Ta'_{m-1,0}=&TLT^{m-1}\not\Delta\mu+\mathrm{tr}\chi T^m\not\Delta\mu+2\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_{2,m,0}\\&+(T\mathrm{tr}\chi)T^{m-1}\not\Delta\mu+2(\hat{\not\mathcal{L}}_T\hat{\chi}-\mathrm{tr}^{(T)}\not\pi\hat{\chi})\cdot\hat{\not\mu}_{2,m-1,0}\end{aligned} \tag{9.97}$$

由

$$TLT^{m-1}\not\Delta\mu=LT^m\not\Delta\mu-\Lambda T^{m-1}\not\Delta\mu$$

以及 $a'_{m,0}$ 的定义, (9.97) 为

$$Ta'_{m-1,0}=a'_{m,0}-\Lambda T^{m-1}\not\Delta\mu-c'_m \tag{9.98}$$

其中 c'_m 如引理所述. 比较 $Ta'_{m-1,0}$ 的两个表达式, 即 (9.95) 和 (9.98), 我们得到一个关于 $a'_{m,0}$ 的公式, 如果我们设

$$b'_{m,0}=Tb'_{m-1,0}+\Lambda T^{m-1}\not\Delta\mu+c'_m \tag{9.99}$$

再由命题 8.2, 第一部分得证.

为证明第二部分, 我们对 l 用归纳法. 假设

$$a'_{m,l-1}=R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m a'_{0,0}+{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}b'_{m,l-1} \tag{9.100}$$

把 R_{i_l} 作用到这个, 我们得到

$$R_{i_l}a'_{m,l-1} = R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m a'_{0,0} + R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}b'_{m,l-1} \tag{9.101}$$

另一方面, 由命题 9.2 中的定义,

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}a'_{m,l-1}\\ &= L(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) + \mathrm{tr}\chi(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) + 2\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,l-1}\end{aligned} \tag{9.102}$$

将 R_{i_l} 作用到此式, 再用引理 9.3, 我们有

$$\begin{aligned}R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}a'_{m,l-1} = {}& R_{i_l}L(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) + \mathrm{tr}\chi(R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu)\\ &+2\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l} + (R_{i_l}\mathrm{tr}\chi)(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu)\\ &+2(\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\hat{\chi} - \mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi\hat{\chi})\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not\mu}_{2,m,l-1}\end{aligned} \tag{9.103}$$

记

$$R_{i_l}L(R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) = L(R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu) - {}^{(R_{i_l})}ZR_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu$$

由 $a'_{m,l}$ 的定义, (9.103) 变为

$$R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}a'_{m,l-1} = {}^{(i_1\cdots i_l)}a'_{m,l} - {}^{(R_{i_l})}ZR_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu - c''_{m,l} \tag{9.104}$$

比较 $R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}a'_{m,l-1}$ 的两个表达式, 即 (9.101) 和 (9.104), 我们得到了一个关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}a'_{m,l}$ 的公式, 如果我们设

$${}^{(i_1\cdots i_l)}b'_{m,l} = R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}b'_{m,l-1} + {}^{(R_{i_l})}ZR_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu + c''_{m,l} \tag{9.105}$$

再用命题 8.2, 第二部分得证. □

接下来我们分析命题 9.2 中传输方程各项的阶数. 为了得到 μ 的 $n+1$ 阶空间导数 (其中至少两阶是球面导数) 的估计, 我们在命题 9.2 中设 $m+l=n-1$, 则主部将会是 $m+l+2=n+1$, 声学主部将会是 χ 和 μ 的空间导数.

由 (9.26), (9.36) 和 (9.40), 我们知道 $\check{f}'$ 是二阶的, 并且不包含二阶的声学主部. 从而 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_{m,l}$ 是 $m+l+2$ 阶的, 但不包含声学主部.

转向 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$. 由 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 的表达式可知, 我们必须研究 $g'_{m,0}$. 由 (9.44), (9.36), (9.38), (9.35), (9.32), (9.30) 和 (9.24), 我们知道 $\check{g}'$ 是二阶的, 并且其声学主

部由 (9.58) 给出, 它由 $\mathrm{tr}\chi$ 的一阶球面导数与 μ 的乘积组成. 从而

$$T^m \breve{g}' \tag{9.106}$$

即 $g'_{m,0}$ 表达式中的第一项是 $m+2$ 阶的, 其声学主部由

$$\xi \cdot (\mu \not{d} T^m \mathrm{tr}\chi) \tag{9.107}$$

组成, 或者由 (3.124)—(3.125), 可以写成

$$\begin{aligned} &\xi \cdot (\mu \not{d} \mathrm{tr}\chi), \ \ m = 0 \\ &\xi \cdot (\mu \not{d} T^{m-1} \not\Delta \mu), \ \ m \geqslant 1 \end{aligned} \tag{9.108}$$

加上一些非声学主部. 由 (9.60) 和 (8.34), (9.108) 可以被表示为

$$\begin{aligned} &\xi \cdot x_0, \ \ m = 0 \\ &\xi \cdot \not{d} x'_{m-1,0}, \ \ m \geqslant 1 \end{aligned} \tag{9.109}$$

加上一些非声学主部.

$g'_{m,0}$ 中的第二项可以写成

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Lambda T^k x'_{m-k-1,0} - \sum_{k=0}^{m-1} [\Lambda, T^k] x'_{m-k-1,0} \tag{9.110}$$

交换子的和是低阶项, 阶数是 $m+1$, 而

$$\begin{aligned} T^k x'_{m-k-1,0} &= T^k (\mu T^{m-k-1} \not\Delta \mu - T^{m-k-1} \breve{f}') \\ &= x'_{m-1,0} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j (T^j \mu)(T^{m-j-1} \not\Delta \mu) \end{aligned} \tag{9.111}$$

(9.111) 中第二项对 (9.110) 中第一项的贡献是低阶项, 其阶数为 $m+1$, 而第一项的贡献则是

$$m \Lambda x'_{m-1,0} \tag{9.112}$$

这是 $g'_{m,0}$ 中第二项的主部.

$g'_{m,0}$ 中的第三项是

$$\sum_{k=0}^{m-1} T^k y'_{m-k,0} \tag{9.113}$$

考虑 $y'_{j,0}$ 的表达式. 这里除了第一项

$$-(T\mu)a'_{j-1,0} = -(T\mu)(T^{j-1}a'_{0,0} + b'_{j-1,0}) \tag{9.114}$$

以外所有项都是低阶项, 其阶数为 $j+1$. $a'_{0,0}$ 中的主部是

$$\not{\Delta} m + \mu \not{\Delta} e$$

所以 $T^{j-1}a'_{0,0}$ 是主部, 其阶数为 $j+2$, 但是不包含声学主部, 其主部为

$$T^{j-1}\not{\Delta} m + \mu T^{j-1}\not{\Delta} e$$

由引理 9.4,

$$b'_{j-1,0} = \sum_{k=0}^{j-2} T^k \Lambda T^{j-k-2}\not{\Delta}\mu + \sum_{k=0}^{j-2} T^k c'_{j-k-1} \tag{9.115}$$

(9.115) 中第一个求和式是 $j+1$ 阶的, 而由 c'_j 的表达式, (9.115) 中第二个求和式是 j 阶的. 我们得出 $g'_{m,0}$ 中的第三项的主部是

$$-m(T\mu)T^{m-1}a'_{0,0} \tag{9.116}$$

它是 $m+2$ 阶的, 但不包含声学主部. 这就完成了对 $g'_{m,0}$ 的研究.

由上述可知, (9.109), (9.112) 和 (9.116) 对

$$R_{i_l}\cdots R_{i_1} g'_{m,0} \tag{9.117}$$

的贡献全是主部, 其阶数为 $l+m+2$. (9.109) 对 (9.117) 的贡献为

$$\begin{gathered} \xi \cdot {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l,\ m=0 \\ \xi \cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l},\ m \geqslant 1 \end{gathered} \tag{9.118}$$

其中 ξ 由 (9.59) 给出. 由 **H0**,

$$\begin{gathered} |\xi \cdot {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l| \leqslant |\xi||{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l| \\ |\xi \cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}| \leqslant C(1+t)^{-1}|\xi|\max_j|{}^{(i_1\cdots i_l j)}x'_{m-1,l+1}| \end{gathered} \tag{9.119}$$

(9.112) 的贡献为

$$m\Lambda^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l} \tag{9.120}$$

由 **H0**, 它被

$$Cm(1+t)^{-1}|\Lambda|\max_{j}|^{(i_1\cdots i_l j)}x'_{m-1,l+1}| \tag{9.121}$$

界定. 最终 (9.116) 的贡献为

$$-m(T\mu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^{m-1}a'_{0,0} \tag{9.122}$$

这一项不包含声学主部. 这就完成了对 $^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 的第一项的研究.

转到 $^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 的第二项. 这一项为

$$\sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x'_{m,l-k-1} \tag{9.123}$$

它可以写成

$$\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}ZR_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x'_{m,l-k-1} \tag{9.124}$$

减去

$$\sum_{k=0}^{l-1}[{}^{(R_{i_{l-k}})}Z,R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}]^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x'_{m,l-k-1} \tag{9.125}$$

显然交换子项是低阶项, 其阶数为 $l+m+1$, 而 (9.123) 的主部是

$$\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x'_{m,l-1} \tag{9.126}$$

这是一个声学主部. 由 **H0**, 它可以被

$$C(1+t)^{-1}(\sum_{k=1}^{l}|^{(R_{i_k})}Z|)\max_{j}|^{(i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_l j)}x'_{m,l}| \tag{9.127}$$

界定.

最后我们考虑 $^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 的第三项, 即

$$\sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y'_{m,l-k} \tag{9.128}$$

注意到只有 $^{(i_1\cdots i_j)}y'_{m,j}$ 中的第一项是主部, 其阶数为 $m+l+2$:

$$-(R_{i_j}\mu)^{(i_1\cdots i_{j-1})}a'_{m,j-1}=-(R_{i_j}\mu)(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}T^m a'_{0,0}+{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b'_{m,j-1}) \tag{9.129}$$

由于 $a'_{0,0}$ 是三阶的, 但却不包含三阶的声学主部, 所以 $R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}T^m a'_{0,0}$ 是主部, 其阶数为 $m+j+2$, 但却不包含声学主部. ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b'_{m,j-1}$ 由引理 9.4 给出:

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b'_{m,j-1} = & R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}b'_{m,0} \\
& + \sum_{k=0}^{j-2} R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_{j-k}}{}^{(R_{i_{j-k-1}})}Z R_{i_{j-k-2}}\cdots R_{i_1}T^m \not\Delta\mu \\
& + \sum_{k=0}^{j-2} R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_{j-k}}{}^{(i_1\cdots i_{j-k-1})}c''_{m,j-k-1}
\end{aligned}
\tag{9.130}
$$

由 (9.115) 后面的讨论, 我们知道 (9.130) 右端的第一项是 $m+j+1$ 阶的. 显然第二项的阶数也是 $m+j+1$. 而在引理 9.4 中给出的 ${}^{(i_1\cdots i_j)}c''_{m,j}$ 也是 $m+j+1$ 阶的, 所以 (9.130) 右端的第三项是 $m+j$ 阶的. 所以 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b'_{m,j-1}$ 是低阶项, 阶数为 $m+j+1$. 从而 (9.128) 中的主部是

$$
-\sum_{k=0}^{l-1}(R_{i_{l-k}}\mu)R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}R_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}T^m a'_{0,0} \tag{9.131}
$$

阶数为 $m+l+2$, 但它不包含声学主部. 这就完成了对 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 的研究.

9.3 $S_{t,u}$ 上的椭圆估计

回到命题 9.2 中关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}$ 的传输方程, 我们还需考虑 $2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l}$. 显然 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l}$ 是一个声学主部, 它与 $\hat{\not\mu}_2$ 的 $m+l$ 阶空间导数有关, 而 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}$ 的传输方程则是让我们可以估计 $\not\Delta\mu$. ${}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not\mu}_{2,m,l}$ 来自于 (9.45), 即由

$$
2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not D}^2\mu = 2\mu\hat{\chi}\cdot\hat{\not\mu}_2
$$

这一项而来.

现在传输方程必须与 (9.41) 合起来考虑:

$$
\mu\not\Delta\mu = x' + \check{f}' \tag{9.132}
$$

这是一个 $S_{t,u}$ 上的关于 μ 的椭圆方程. 我们可以用这个方程在 $S_{t,u}$ 上用 x' 和 ψ_μ 的二阶导数估计 $\not d\mu$ 和 $\hat{\not\mu}_2$. 另一方面, (9.45) 让我们可以沿着 C_u 的生成子用 $\hat{\not\mu}_2$ 和 ψ_μ 的二阶导数估计 x'. 所以我们可以用 ψ_μ 的二阶导数估计 $\not d\mu$ 和 $\not D^2\mu$.

类似地, 关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}$ 的传输方程必须与一个关于

$$ {}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l} = R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\mu \tag{9.133} $$

的椭圆方程合起来考虑, 则我们可以用 ψ_μ 的 $m+l+2$ 阶导数来估计 $\not{D}^{2}\,{}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}$. 我们所需要的椭圆方程可以借助如下引理由 (9.60) 导出:

$$ \mu R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu = {}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l} + {}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l} \tag{9.134} $$

引理 9.5 设 (M,g) 是一个二维 Riemann 流形, X 是 M 上的任意一个向量场, f 是 M 上的任意一个函数, 则如下公式成立:

$$ X(\Delta_g f) - \Delta_g(Xf) = -{}^{(X)}\pi^{ab}(\nabla^2 f)_{ab} - \mathrm{tr}\,{}^{(X)}\pi_1^b d_b f $$

以及

$$ (\hat{\mathcal{L}}_X\hat{\nabla}^2 f)_{ab} - (\hat{\nabla}^2(Xf))_{ab} = -\frac{1}{2}{}^{(X)}\hat{\pi}_{ab}\Delta_g f - {}^{(X)}\hat{\pi}^c_{1,ab}d_c f $$

这里

$$ \begin{aligned} \mathrm{tr}\,{}^{(X)}\pi_1^b &= \nabla^a\,{}^{(X)}\pi_a^b - \frac{1}{2}\nabla^b\mathrm{tr}\,{}^{(X)}\pi \\ {}^{(X)}\hat{\pi}^c_{1,ab} &= \frac{1}{2}(\nabla_a{}^{(X)}\hat{\pi}^c_b + \nabla_b{}^{(X)}\hat{\pi}^c_a - \nabla^c\,{}^{(X)}\hat{\pi}_{ab} - g_{ab}\nabla^d\,{}^{(X)}\hat{\pi}^c_d) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\delta^c_a d_b\mathrm{tr}\,{}^{(X)}\pi + \delta^c_b d_a\mathrm{tr}\,{}^{(X)}\pi - g_{ab}d^c\mathrm{tr}\,{}^{(X)}\pi) \end{aligned} $$

其中 $\mathcal{L}_X g = {}^{(X)}\pi$.

证明 设 ϕ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群, ϕ_{t*} 是其相对应的拉回. 考虑 M 上的任意一个 1- 形式 α. 我们有

$$ \phi_{t*}(\overset{g}{\nabla}\alpha) = \overset{\phi_{t*}g}{\nabla}(\phi_{t*}\alpha) \tag{9.135} $$

在任意一个局部坐标系下,

$$ (\overset{g}{\nabla}\alpha)_{ab} = \frac{\partial\alpha_b}{\partial x^a} - \overset{g}{\Gamma}{}^c_{ab}\alpha_c \tag{9.136} $$

其中 $\overset{g}{\Gamma}{}^c_{ab}$ 是度量 g 在这个坐标下的联络系数. 类似地, 在同一个坐标下有

$$ (\overset{\phi_{t*}g}{\nabla}(\phi_{t*}\alpha))_{ab} = \frac{\partial(\phi_{t*}\alpha)_b}{\partial x^a} - \overset{\phi_{t*}g}{\Gamma}{}^c_{ab}(\phi_{t*}\alpha)_c \tag{9.137} $$

对 (9.137) 关于 t 在 $t=0$ 处微分得

$$
\begin{aligned}
&(\frac{d}{dt}(\overset{\phi_{t*}g}{\nabla}(\phi_{t*}\alpha))_{ab})_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^a}(\frac{d}{dt}(\phi_{t*}\alpha)_b)_{t=0} - \overset{g}{\Gamma}{}^c_{ab}(\frac{d}{dt}(\phi_{t*}\alpha)_c)_{t=0} - (\frac{d}{dt}\overset{\phi_{t*}g}{\Gamma}{}^c_{ab})_{t=0}\alpha_c
\end{aligned}
\tag{9.138}
$$

由定义有

$$(\frac{d}{dt}(\phi_{t*}\alpha))_{t=0} = \mathcal{L}_X\alpha$$

由 (9.135), (9.138) 的左边是

$$(\frac{d}{dt}(\phi_{t*}(\overset{g}{\nabla}\alpha)))_{t=0} = \mathcal{L}_X(\nabla\alpha)$$

的 ab 分量. 回忆 (8.109), 我们有

$$(\frac{d}{dt}\overset{\phi_{t*}g}{\Gamma}{}^c_{ab})_{t=0} = {}^{(X)}\pi^c_{1,ab} \tag{9.139}$$

其中

$${}^{(X)}\pi^c_{1,ab} = \frac{1}{2}(\nabla_a{}^{(X)}\pi^c_b + \nabla_b{}^{(X)}\pi^c_a - \nabla^{c(X)}\pi_{ab}) \tag{9.140}$$

我们得到

$$(\mathcal{L}_X(\nabla\alpha))_{ab} = (\nabla(\mathcal{L}_X\alpha))_{ab} - {}^{(X)}\pi^c_{1,ab}\alpha_c \tag{9.141}$$

特别地, 若 $\alpha = df$, 其中 f 是某个函数, 由于

$$\mathcal{L}_X(df) = d(Xf)$$

我们得到

$$(\mathcal{L}_X(\nabla^2 f))_{ab} = (\nabla^2(Xf))_{ab} - {}^{(X)}\pi^c_{1,ab}d_c f \tag{9.142}$$

对 M 上的任意函数 f 成立, 由于

$$\Delta_g f = (g^{-1})^{ab}(\nabla^2 f)_{ab}$$

从而有

$$X(\Delta_g f) = \mathcal{L}_X(\Delta_g f) = -{}^{(X)}\pi^{ab}(\nabla^2 f)_{ab} + (g^{-1})^{ab}(\mathcal{L}_X(\nabla^2 f))_{ab} \tag{9.143}$$

由于

$$(g^{-1})^{ab}(\nabla^2(Xf))_{ab} = \Delta_g(Xf)$$

则由 (9.142) 和 (9.143), 引理的第一部分得证. 事实上这个结论对任意的 n 维流形 M 都成立.

对于第二部分, 我们考虑二维流形 M. $\nabla^2 f$ 的无迹部分为

$$\hat{\nabla}^2 f = \nabla^2 f - \frac{1}{2} g \Delta_g f$$

所以

$$\mathcal{L}_X(\hat{\nabla}^2 f) = \mathcal{L}_X(\nabla^2 f) - \frac{1}{2}{}^{(X)}\pi \Delta_g f - \frac{1}{2} g X(\Delta_g f) \tag{9.144}$$

将 (9.142) 和引理的第一部分代入, 我们得到

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X(\hat{\nabla}^2 f))_{ab} = &(\nabla^2(Xf))_{ab} - {}^{(X)}\pi^c_{1,ab} d_c f - \frac{1}{2}{}^{(X)}\pi_{ab}\Delta_g f \\ &- \frac{1}{2} g_{ab}(\Delta_g(Xf) - {}^{(X)}\pi^{cd}(\nabla^2 f)_{cd} - \mathrm{tr}^{(X)}\pi^c_1 d_c f)\end{aligned} \tag{9.145}$$

在上式两边取无迹部分, 则引理的第二部分得证. □

引理 9.6　设 f 是定义在超曲面 Σ_t 上的任意一个函数, 则如下公式成立:

$$T(\not\Delta f) - \not\Delta(Tf) = -{}^{(T)}\not\pi^{AB}(\not D^2 f)_{AB} - \mathrm{tr}^{(T)}\not\pi^B_1 \not d_B f$$

以及

$$(\hat{\not\mathcal{L}}_T \hat{\not D}^2 f)_{AB} - (\hat{\not D}^2(Tf))_{AB} = -\frac{1}{2}{}^{(T)}\hat{\not\pi}_{AB}\not\Delta f - {}^{(T)}\hat{\not\pi}^C_{1,AB}\not d_C f$$

这里

$${}^{(T)}\not\pi^C_{1,AB} = \frac{1}{2}(\not D_A{}^{(T)}\not\pi^C_B + \not D_B{}^{(T)}\not\pi^C_A - \not D^{C(T)}\not\pi_{AB})$$

是 $S_{t,u}$ 上诱导联络关于 T 的 Lie 导数, 而引理中的迹则是关于 $S_{t,u}$ 上诱导度量取的.

证明　由于 T 与 Σ_t 相切, 我们可以将注意力集中在 Σ_t 上. 同样我们将选取声学坐标 $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ 使得在给定的 Σ_t 上 $\Xi = 0$. 所以在这个 Σ_t 上有

$$T = \frac{\partial}{\partial u} \tag{9.146}$$

考虑任意一个定义在 Σ_t 上的 $S_{t,u}$ 1- 形式 α. 在坐标 $(u,\vartheta_1,\vartheta_2)$ 下有

$$(\not\nabla\alpha)_{AB}=\frac{\partial\alpha_B}{\partial\vartheta^A}-\not\Gamma^C_{AB}\alpha_C \tag{9.147}$$

对 (9.147) 关于 u 微分, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial u}(\not\nabla\alpha)_{AB}=\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}(\frac{\partial\alpha_B}{\partial u})-\not\Gamma^C_{AB}\frac{\partial\alpha_C}{\partial u}-\frac{\partial\not\Gamma^C_{AB}}{\partial u}\alpha_C \tag{9.148}$$

由 (9.146),

$$\frac{\partial\alpha_A}{\partial u}=(\not\mathcal{L}_T\alpha)_A,\quad \frac{\partial}{\partial u}(\not\nabla\alpha)_{AB}=(\not\mathcal{L}_T(\not\nabla\alpha))_{AB} \tag{9.149}$$

同样由 (9.146) 以及第三章的结论, 我们有

$$\frac{\partial\not g_{AB}}{\partial u}={}^{(T)}\not\pi_{AB}=2\kappa\theta_{AB},\quad \frac{\partial}{\partial u}(\not g^{-1})^{AB}=-{}^{(T)}\not\pi^{AB}=-2\kappa\theta^{AB} \tag{9.150}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial\not\Gamma^C_{AB}}{\partial u}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}((\not g^{-1})^{CD}(\frac{\partial\not g_{BD}}{\partial\vartheta_A}+\frac{\partial\not g_{AD}}{\partial\vartheta_B}-\frac{\partial\not g_{AB}}{\partial\vartheta^D}))\\&=-{}^{(T)}\not\pi^{CD}\not\Gamma^E_{AB}\not g_{DE}+\frac{1}{2}(\not g^{-1})^{CD}(\frac{\partial^{(T)}\not\pi_{BD}}{\partial\vartheta^A}+\frac{\partial^{(T)}\not\pi_{AD}}{\partial\vartheta^B}-\frac{\partial^{(T)}\not\pi_{AB}}{\partial\vartheta^D})\\&=\frac{1}{2}(\not g^{-1})^{CD}(\not\nabla_A{}^{(T)}\not\pi_{BD}+\not\nabla_B{}^{(T)}\not\pi_{AD}-\not\nabla_D{}^{(T)}\not\pi_{AB})\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial\not\Gamma^C_{AB}}{\partial u}={}^{(T)}\not\pi^C_{1,AB} \tag{9.151}$$

其中

$${}^{(T)}\not\pi^C_{1,AB}=\frac{1}{2}(\not\nabla_A{}^{(T)}\not\pi^C_B+\not\nabla_B{}^{(T)}\not\pi^C_A-\not\nabla^C{}^{(T)}\not\pi_{AB}) \tag{9.152}$$

将 (9.151) 代入 (9.148), 再由 (9.149), 我们得到

$$(\not\mathcal{L}_T(\not\nabla\alpha))_{AB}=(\not\nabla(\not\mathcal{L}_T\alpha))_{AB}-{}^{(T)}\not\pi^C_{1,AB}\alpha_C \tag{9.153}$$

这个对定义在 Σ_t 上的 $S_{t,u}$ 1- 形式 α 成立. 特别地, 我们取 $\alpha=\not df$, 其中 f 是定义在 Σ_t 上的函数. 在这种情形下, 我们有

$$\alpha_A=\frac{\partial f}{\partial\vartheta^A},\quad \frac{\partial\alpha_A}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}(\frac{\partial f}{\partial u})$$

即

$$\not\mathcal{L}_T(\not df)=\not d(Tf) \tag{9.154}$$

所以由 (9.153), 我们有

$$(\not{\mathcal{L}}_T(\not{D}^2 f))_{AB} = (\not{D}^2(Tf))_{AB} - {}^{(T)}\not{\pi}^C_{1,AB}\not{d}_C f \tag{9.155}$$

对任意定义在 Σ_t 上的函数 f 都成立. 由于

$$\not\Delta f = (\not{g}^{-1})^{AB}(\not{D}^2 f)_{AB}$$

由 (9.150), 我们有

$$T(\not\Delta f) = \not{\mathcal{L}}_T(\not\Delta f) = -{}^{(T)}\not{\pi}^{AB}(\not{D}^2 f)_{AB} + (\not{g}^{-1})^{AB}(\not{\mathcal{L}}_T(\not{D}^2 f))_{AB} \tag{9.156}$$

再由

$$(\not{g}^{-1})^{AB}(\not{D}^2(Tf))_{AB} = \not\Delta(Tf)$$

引理的第一部分得证.

为了证明第二部分, 我们注意到 $\not{D}^2 f$ 的无迹部分为

$$\hat{\not{D}}^2 f = \not{D}^2 f - \frac{1}{2}\not{g}\not\Delta f$$

所以

$$\not{\mathcal{L}}_T(\hat{\not{D}}^2 f) = \not{\mathcal{L}}_T(\not{D}^2 f) - \frac{1}{2}{}^{(T)}\not{\pi}\not\Delta f - \frac{1}{2}\not{g}T(\not\Delta f) \tag{9.157}$$

由 (9.155) 和引理的第一部分, 我们得到

$$\begin{aligned}(\not{\mathcal{L}}_T(\hat{\not{D}}^2 f))_{AB} = {} & (\not{D}^2(Tf))_{AB} - {}^{(T)}\not{\pi}^C_{1,AB}\not{d}_C f - \frac{1}{2}{}^{(T)}\not{\pi}_{AB}\not\Delta f \\ & -\frac{1}{2}\not{g}_{AB}(\not\Delta(Tf) - {}^{(T)}\not{\pi}^{CD}(\not{D}^2 f)_{CD} - \mathrm{tr}{}^{(T)}\not{\pi}^C_1\not{d}_C f)\end{aligned} \tag{9.158}$$

对上式取无迹部分, 我们证明了引理的第二部分. □

命题 9.3 对每对非负整数 (m,l) 和每个多重指标 $(i_1\cdots i_l)$, 我们有

$$\not\Delta^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l} - R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not\Delta\mu = {}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l} = {} & R_{i_l}\cdots R_{i_1}d_{m,0} + \sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}({}^{(R_{i_{l-k}})}\not{\pi}\cdot\not{D}^{2(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1}) \\ & +\sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}(\mathrm{tr}{}^{(R_{i_{l-k}})}\not{\pi}_1\cdot\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1})\end{aligned}$$

以及

$$d_{m,0}=\sum_{k=0}^{m-1}T^k({}^{(T)}\not{\pi}\cdot \not{D}^2\mu_{m-k-1,0})+\sum_{k=0}^{m-1}T^k(\mathrm{tr}^{(T)}\not{\pi}_1\cdot \not{d}\mu_{m-k-1,0})$$

证明　我们首先考虑 $l=0$ 的情形. 如果也有 $m=0$, 则显然

$$d_{0,0}=0 \tag{9.159}$$

我们将导出一个关于 $d_{m,0}$ 的递推公式. 考虑

$$d_{m-1,0}=\not{\Delta}\mu_{m-1,0}-T^{m-1}\not{\Delta}\mu$$

对上式作用 T, 我们得到

$$Td_{m-1,0}=T(\not{\Delta}\mu_{m-1,0})-T^m\not{\Delta}\mu \tag{9.160}$$

由引理 9.6 的第一部分, 我们得到

$$T(\not{\Delta}\mu_{m-1,0})=\not{\Delta}\mu_{m,0}-{}^{(T)}\not{\pi}\cdot \not{D}^2\mu_{m-1,0}-\mathrm{tr}^{(T)}\not{\pi}_1\cdot \not{d}\mu_{m-1,0} \tag{9.161}$$

将 (9.161) 代入 (9.160) 然后注意到

$$\not{\Delta}\mu_{m,0}-T^m\not{\Delta}\mu=d_{m,0}$$

我们得到了递推关系式

$$d_{m,0}=Td_{m-1,0}+{}^{(T)}\not{\pi}\cdot \not{D}^2\mu_{m-1,0}+\mathrm{tr}^{(T)}\not{\pi}_1\cdot \not{d}\mu_{m-1,0} \tag{9.162}$$

再由命题 8.2, 我们得到了 $d_{m,0}$ 的表达式.

接下来考虑 $l\geqslant 1$ 的情形, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_{l-1})}d_{m,l-1}=\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}-R_{i_{l-1}}\cdots R_{i_1}T^m\not{\Delta}\mu$$

对上式作用 R_{i_l}, 我们得到

$$R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}d_{m,l-1}=R_{i_l}\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}-R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not{\Delta}\mu \tag{9.163}$$

由引理 9.5 的第一部分, 我们有

$$\begin{aligned}&R_{i_l}\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}\\&=\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}-{}^{(R_{i_l})}\not{\pi}\cdot \not{D}^{2(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}-\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi}_1\cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}\end{aligned} \tag{9.164}$$

将 (9.164) 代入 (9.163) 并且注意到

$$\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l} - R_{i_l}\cdots R_{i_1}T^m\not{\Delta}\mu = {}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$$

我们得到了如下递推关系式:

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}\\&= R_{i_l}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}d_{m,l-1} + {}^{(R_{i_l})}\not{\pi}\cdot\not{D}^{2(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1} + \mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi}_1\cdot\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}\end{aligned} \tag{9.165}$$

再次运用命题 8.2, 命题得证. □

命题 9.4 对每对非负整数 (m,l) 以及每个多重指标 $(i_1\cdots i_l)$, 我们有

$$\hat{\not{D}}^{2(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l} - {}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l} = {}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l} &= \hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_1}}e_{m,0} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{l-1}\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_{l-k+1}}}\left({}^{(R_{i_{l-k}})}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1}\right)\\&\quad+\sum_{k=0}^{l-1}\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_{l-k+1}}}\left({}^{(R_{i_{l-k}})}\hat{\not{\pi}}_1\cdot\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1}\right)\end{aligned}$$

以及

$$e_{m,0} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\hat{\not{\mathcal{L}}}_T^k\left({}^{(T)}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}\mu_{m-k-1,0}\right) + \sum_{k=0}^{m-1}\hat{\not{\mathcal{L}}}_T^k\left({}^{(T)}\hat{\not{\pi}}_1\cdot\not{d}\mu_{m-k-1,0}\right)$$

证明 我们首先考虑 $l=0$ 的情形. 如果也有 $m=0$, 则由定义我们有

$$e_{0,0} = 0 \tag{9.166}$$

考虑

$$e_{m-1,0} = \hat{\not{D}}^2\mu_{m-1,0} - \hat{\not{\mu}}_{2,m-1,0}$$

将 $\hat{\not{\mathcal{L}}}_T$ 作用到上式, 我们有

$$\hat{\not{\mathcal{L}}}_T e_{m-1,0} = \hat{\not{\mathcal{L}}}_T\hat{\not{D}}^2\mu_{m-1,0} - \hat{\not{\mu}}_{2,m,0} \tag{9.167}$$

由引理 9.6 的第二部分, 我们有

$$\hat{\not{\mathcal{L}}}_T\hat{\not{D}}^2\mu_{m-1,0} = \hat{\not{D}}^2\mu_{m,0} - \frac{1}{2}{}^{(T)}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}\mu_{m-1,0} - {}^{(T)}\hat{\not{\pi}}_1\cdot\not{d}\mu_{m-1,0} \tag{9.168}$$

将 (9.168) 代入 (9.167) 并且注意到

$$\hat{\not{D}}^2 \mu_{m,0} - \hat{\not{\mu}}_{2,m,0} = e_{m,0}$$

我们得到

$$e_{m,0} = \hat{\not{\mathcal{L}}}_T e_{m-1,0} + \frac{1}{2}{}^{(T)}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}\mu_{m-1,0} + {}^{(T)}\hat{\not{\pi}}_1 \cdot \not{d}\mu_{m-1,0} \tag{9.169}$$

再由命题 8.2, 我们就得到了 $e_{m,0}$ 的表达式.

接下来我们考虑 $l \geqslant 1$ 的情形. 考虑

$$^{(i_1\cdots i_{l-1})}e_{m,l-1} = \hat{\not{D}}^{2\,(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1} - {}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l-1}$$

将 $\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}$ 作用到上式, 我们得到

$$\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}e_{m,l-1} = \hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\hat{\not{D}}^{2\,(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1} - {}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l} \tag{9.170}$$

由引理 9.5 的第二部分, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\hat{\not{D}}^{2\,(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}\\
&= \hat{\not{D}}^{2\,(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l} - \frac{1}{2}{}^{(R_{i_l})}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1} - {}^{(R_{i_l})}\hat{\not{\pi}}_1 \cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}
\end{aligned} \tag{9.171}$$

将 (9.171) 代入 (9.170) 并且注意到

$$\hat{\not{D}}^{2\,(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l} - {}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l} = {}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$$

我们有

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l} &= \hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}{}^{(i_1\cdots i_{l-1})}e_{m,l-1}\\
&\quad + \frac{1}{2}{}^{(R_{i_l})}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1} + {}^{(R_{i_l})}\hat{\not{\pi}}_1 \cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_{l-1})}\mu_{m,l-1}
\end{aligned} \tag{9.172}$$

再次运用命题 8.2, 命题得证. □

接下来我们研究 ${}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$ 的阶数. 首先我们应该研究 $d_{m,0}$. 这里主部是 $m+1$ 阶的, 并且来自于第一项求和式中的 $\not{\mathcal{L}}_T^k(\not{D}^2\mu_{m-k-1})$, 其主部为 $T^{m-1}\mu$ 的二阶球面导数, 同样在第二项求和式中, $\not{\mathcal{L}}_T^{m-1}\mathrm{tr}^{(T)}\not{\pi}_1$ 也包含主部, 其主部为 $\not{\mathcal{L}}_T^{m-1}\theta$ 的一阶球面导数. 当 $m=1$ 时, 后者的声学主部是 χ 的一阶球面导数, 当 $m \geqslant 2$ 时, 则是 $T^{m-2}\mu$ 的三阶球面导数 (由 (3.124)—(3.125)). 所以 $d_{m,l}$ 第一项中的主部

$$R_{i_l}\cdots R_{i_1}d_{m,0}$$

是 $m+l+1$ 阶的, 当 $m=1$ 时, 其声学主部为 χ 的 $l+1$ 阶球面导数, 以及 μ 的 $l+2$ 阶球面导数; 当 $m\geqslant 2$ 时, 其声学主部为 $T^{m-2}\mu$ 的 $l+3$ 阶球面导数, 以及 $T^{m-1}\mu$ 的 $l+2$ 阶球面导数.

${}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$ 中第二项的主部

$$\sum_{k=0}^{l-1} R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}({}^{(R_{i_{l-k}})}\not\pi\cdot\not D^2\mu_{m,l-k-1})$$

是 $m+l+1$ 阶的, 它是 $T^m\mu$ 的 $l+1$ 阶球面导数, 其中 $l\geqslant 1$. 最后, ${}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$ 中第三项

$$\sum_{k=0}^{l-1} R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}(\mathrm{tr}^{(R_{i_{l-k}})}\not\pi_1\cdot\not d^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1})$$

的主部是

$$(\not\mathcal{L}_{R_{i_l}}\cdots\not\mathcal{L}_{R_{i_2}}\mathrm{tr}^{(R_{i_1})}\not\pi_1)\cdot\not d\mu_{m,0}$$

由 ${}^{(R_i)}\pi_{AB}$ 的表达式, 这一项与 χ 的 l 阶球面导数有关, 从而这一项是 $l+1$ 阶的. 若 $m=0$, 这一项与 ${}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$ 表达式中的前两项的主部相同. 所以 ${}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$ 是 $m+l+1$ 阶的 —— 比主部低一阶 —— 当 $m=0$ 时, 其声学主部是 χ 的 l 阶球面导数, 和 $(l\geqslant 1)$ μ 的 $l+1$ 阶球面导数; 当 $m=1$ 时, 是 χ 的 $l+1$ 阶球面导数和 μ 的 $l+2$ 阶球面导数以及 $(l\geqslant 1)$ $T\mu$ 的 $l+1$ 阶球面导数; 当 $m\geqslant 2$ 时, 是 $T^{m-2}\mu$ 的 $l+3$ 阶球面导数和 $T^{m-1}\mu$ 的 $l+2$ 阶球面导数以及 $(l\geqslant 1)$ $T^m\mu$ 的 $l+1$ 阶球面导数.

我们同样需要研究 ${}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$ 的阶数. 首先我们应该研究 $e_{m,0}$ 的阶数. 这里主部是 $m+1$ 阶的, 它来自于 $T^k(\not\Delta\mu_{m-k-1,0})$ 中的第一项求和式, 其主部是 $T^{m-1}\mu$ 的二阶球面导数; 以及来自于 $\hat{\not\mathcal{L}}_T^{m-1(T)}\hat{\not\pi}_1$ 中的第二项求和式, 其主部是 $\not\mathcal{L}_T^{m-1}\theta$ 的一阶球面导数. 后者的声学主部是 χ 的一阶球面导数 ($m=1$ 时), 或者是 $T^{m-2}\mu$ 的二阶球面导数 ($m\geqslant 2$ 时) (由 (3.124)—(3.125)). 所以 ${}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$ 第一项中的主部

$$\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not\mathcal{L}}_{R_{i_1}}e_{m,0}$$

是 $m+l+1$ 阶的, 当 $m=1$ 时, 其声学主部是 χ 的 $l+1$ 阶球面导数以及 μ 的 $l+2$ 阶球面导数; 当 $m\geqslant 2$ 时, 其声学主部是 $T^{m-2}\mu$ 的 $l+3$ 阶球面导数和 $T^{m-1}\mu$ 的

$l+2$ 阶球面导数. ${}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$ 中第二项的主部

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{l-1}\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_{l-k+1}}}({}^{(R_{i_{l-k}})}\hat{\not{\pi}}\not{\Delta}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1})$$

同样是 $m+l+1$ 阶的, 当 $l\geqslant 1$ 时其声学主部是 $T^m\mu$ 的 $l+1$ 阶球面导数. 最后 ${}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$ 中第三项

$$\sum_{k=0}^{l-1}\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_{l-k+1}}}({}^{(R_{i_{l-k}})}\hat{\not{\pi}}_1\cdot\not{d}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}\mu_{m,l-k-1})$$

的主部是

$$(\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_l}}\cdots\hat{\not{\mathcal{L}}}_{R_{i_2}}{}^{(R_{i_1})}\hat{\not{\pi}}_1)\cdot\not{d}\mu_{m,0}$$

它与 χ 的 l 阶球面导数有关, 从而是 $l+1$ 阶的, 当 $m=0$ 时, 它与 ${}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$ 前两项的主部相同. 所以 ${}^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}$ 是 $m+l+1$ 阶的 —— 比主部低一阶 —— 当 $m=0$ 时, 其主部是 χ 的 l 阶球面导数以及 $(l\geqslant 1)$ μ 的 $l+1$ 阶球面导数; 当 $m=1$ 时, 是 χ 的 $l+1$ 阶球面导数和 μ 的 $l+2$ 阶球面导数以及 $(l\geqslant 1)$ $T\mu$ 的 $l+1$ 阶球面导数; 当 $m\geqslant 2$ 时, 是 $T^{m-2}\mu$ 的 $l+3$ 阶球面导数和 $T^{m-1}\mu$ 的 $l+2$ 阶球面导数以及 $(l\geqslant 1)$ $T^m\mu$ 的 $l+1$ 阶球面导数.

由 (9.134) 和命题 9.3, 在 $S_{t,u}$ 上 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}$ 满足如下椭圆方程:

$$\not{\Delta}{}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}=\mu^{-1}({}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l})+{}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l} \tag{9.173}$$

我们需要如下带 μ- 权 L^2 估计:

引理 9.7 设 (M,g) 是一个二维紧 Riemann 流形, 设 ϕ 是 (M,g) 上的函数, 并且对 M 上的某个函数 ρ 满足如下方程:

$$\Delta_g\phi=\rho$$

同样设 μ 是 M 上任意一个非负函数, 则在 M 上有如下估计成立:

$$\int_M\mu^2(\frac{1}{2}|\nabla^2\phi|^2+K|d\phi|^2)d\mu_g\leqslant 2\int_M\mu^2\rho^2d\mu_g+3\int_M|d\mu|^2|d\phi|^2d\mu_g$$

其中 K 是 (M,g) 的 Gauss 曲率.

证明 考虑 1- 形式

$$\psi=d\phi \tag{9.174}$$

我们有

$$\mathrm{div}_g\psi = \Delta_g\phi = \rho \tag{9.175}$$

所以得到

$$\mu d(\mathrm{div}_g\psi) = d(\mu\rho) - \rho d\mu \tag{9.176}$$

现在在任意一个局部坐标系下, $d(\mathrm{div}_g\psi)$ 是

$$\nabla_a(\nabla^b\psi_b)$$

而且我们有

$$\nabla_a(\nabla^b\psi_b) = \nabla^b(\nabla_a\psi_b) - S_a{}^b\psi_b \tag{9.177}$$

其中 $S_a{}^b = S_{ac}(g^{-1})^{bc}$, S_{ac} 是 (M,g) Ricci 的曲率的分量. 由于 $\mathrm{dim}M = 2$, 我们有

$$S_a{}^b = K\delta_a^b$$

同样注意到

$$\nabla_a\psi_b = \nabla_b\psi_a$$

(9.177) 变为

$$\nabla_a(\nabla^b\psi_b) = \nabla^b(\nabla_b\psi_a) - K\psi_a \tag{9.178}$$

代入 (9.176), 我们得到

$$\mu\nabla^b(\nabla_b\psi_a) - \mu K\psi_a = d_a(\mu\rho) - \rho d_a\mu \tag{9.179}$$

将方程两边同乘 $-\mu\psi^a$ 并在 M 上积分. 我们由分部积分得到

$$-\int_M \mu^2\psi^a\nabla^b(\nabla_b\psi_a)d\mu_g = \int_M \mu^2|\nabla\psi|^2 d\mu_g + \int_M 2\mu I^a d_a\mu d\mu_g \tag{9.180}$$

其中

$$I^a = \psi^b\nabla_b\psi^a \tag{9.181}$$

更进一步, 同样由分部积分,

$$-\int_M \mu\psi^a d_a(\mu\rho)d\mu_g = \int_M \mu\rho\,\mathrm{div}_g(\mu\psi)d\mu_g = \int_M (\mu^2\rho^2 + \mu\rho\psi^a d_a\mu)d\mu_g \tag{9.182}$$

由 (9.180) 和 (9.182), 我们得到

$$\int_M \mu^2(|\nabla\psi|^2 + K|\psi|^2)d\mu_g + \int_M 2\mu I^a d_a\mu d\mu_g = \int_M (\mu^2\rho^2 + 2\mu\rho\psi^a d_a\mu)d\mu_g \quad (9.183)$$

现在我们有

$$2\mu|I^a d_a\mu| \leqslant 2\mu|I||d\mu|$$

和

$$|I| \leqslant |\nabla\psi||\psi|$$

所以我们可以估计

$$2\mu|I^a d_a\mu| \leqslant 2\mu|d\mu||\psi||\nabla\psi| \leqslant \frac{1}{2}\mu^2|\nabla\psi|^2 + 2|d\mu|^2|\psi|^2 \quad (9.184)$$

同样我们有

$$2\mu|\rho\psi^a d_a\mu| \leqslant \mu^2\rho^2 + |d\mu|^2|\psi|^2 \quad (9.185)$$

由 (9.184)—(9.185), 恒等式 (9.183) 意味着

$$\int_M \mu^2(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + K|\psi|^2)d\mu_g \leqslant 2\int_M \mu^2\rho^2 d\mu_g + 3\int_M |d\mu|^2|\psi|^2 d\mu_g \quad (9.186)$$

所以引理得证. □

我们现在将引理 9.7 运用到 (9.173), 将 (M,g) 取为 $(S_{t,u}, \not{g})$, 将 ϕ 取为 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}$, 函数 ρ 取为

$$\mu^{-1}({}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l} + {}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}) + {}^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}$$

由引理 8.9, 取 δ_0 足够小, 我们有 $K \geqslant 0$, 所以我们得到

$$\begin{aligned} &\|\mu\not{D}^{2\,(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})} \\ \leqslant\, & C\|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})} + C\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})} \\ & + C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})} + C\|\not{d}\mu\|_{L^\infty(S_{t,u})}\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})} \end{aligned} \quad (9.187)$$

由 **F1**,

$$|\not{d}\mu| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad (9.188)$$

将 (9.188) 代入 (9.187) 有

$$\begin{aligned}
&\|\mu\not{D}^{2(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}\\
\leqslant& C\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}+C\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}+C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}
\end{aligned}\tag{9.189}$$

由命题 9.4, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}\\
\leqslant& C\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}+C\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}\\
&+C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}+C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}\|_{L^2(S_{t,u})}
\end{aligned}\tag{9.190}$$

9.4 传输方程解的估计

现在回到命题 9.2 的传输方程. 设

$$^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}=-2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}+{}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}\tag{9.191}$$

则传输方程有如下形式:

$$\begin{aligned}
&L^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}+(\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\\
=&-(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}(L\mu))^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}
\end{aligned}\tag{9.192}$$

像第八章中那样定义一个从 S^2 到 $S_{t,u}$ 的微分同胚 $\Phi_{t,u}$, 若 ω 是定义在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中的 $S_{t,u}$ 上的任意一个 r 阶协变张量场, 我们考虑其拉回 $\omega(t,u)=\Phi^*_{t,u}\omega$, S^2 上的一个依赖于参数 t 和 u 的 r 阶协变张量场. 如果我们考虑的是 $\not{\mathcal{L}}_L\omega$, 则 S^2 上与之相对应的张量场则是 $\frac{\partial\omega(t,u)}{\partial t}$. 传输方程 (9.192) 可以被视为 S^2 上关于 $^{(i_1\cdots i_l)}x'(t,u)$ 的依赖于 t 和 u 的传输方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}+(\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\\
=&-(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi-2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}
\end{aligned}\tag{9.193}$$

考虑 S^2 上依赖于参数 t 和 u 的函数 $\phi(t,u)$, 我们有

$$|\phi|\frac{\partial}{\partial t}|\phi|=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\phi^2=\phi\frac{\partial\phi}{\partial t}\tag{9.194}$$

则由传输方程 (9.193), 我们有

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\frac{\partial}{\partial t}{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l} + (\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})({}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l})^2 \\
&= -(\frac{1}{2}\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t}){}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l} + {}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l} \qquad (9.195)
\end{aligned}
$$

由于

$$
|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}| \leqslant |{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}||{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}|
$$

以及

$$
|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}| \leqslant |{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}||{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}|
$$

由假设 **AS** 和 (9.195), 我们有

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}\frac{\partial}{\partial t}{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l} + (\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}|^2 \\
&\leqslant (\frac{1}{2}\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}||{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}| + |{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}||{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}| \qquad (9.196)
\end{aligned}
$$

在 (9.194) 中取 $\phi = {}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}| + (\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}| \\
&\leqslant (\frac{1}{2}\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})|{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}| + |{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}| \qquad (9.197)
\end{aligned}
$$

这里的积分因子是

$$
\exp(\int_0^t (\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})(t', u)dt') = (\frac{\mu(t,u)}{\mu(0,u)})^{-2}A(t,u) \qquad (9.198)
$$

其中 $A(t,u)$ 由 (8.167) 定义并由 (8.169) 给出. 由 (9.197) 我们推出

$$
|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}| \leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}F'_{m,l}(t,u) + {}^{(i_1\cdots i_l)}G'_{m,l}(t,u) \qquad (9.199)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}F'_{m,l}(t,u) \\
&= (A(t,u))^{-1}(\mu(t,u))^2((\mu(0,u))^{-2}|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(0,u)| \\
&+ \int_0^t (\mu(t',u))^{-2}A(t',u)(\frac{1}{2}\text{tr}\chi - 2\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t})(t',u)|{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t',u)|dt') \qquad (9.200)
\end{aligned}
$$

以及

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}G'_{m,l}(t,u)\\&=(A(t,u))^{-1}(\mu(t,u))^2\cdot\int_0^t(\mu(t',u))^{-2}A(t',u)|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}(t',u)|dt'\end{aligned}\tag{9.201}$$

由 (8.173), 我们从 (9.200) 和 (9.201) 得到

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_l)}F'_{m,l}(t,u)\leqslant{}& e^{C\delta_0}(1-u+t)^{-2}({}^{(i_1\cdots i_l)}M'^0_{m,l}(t,u)\\&+{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t,u)+{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t,u))\end{aligned}\tag{9.202}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}M'^0_{m,l}(t,u)=(\frac{\mu(t,u)}{\mu(0,u)})^2(1-u)^2|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(0,u)|\tag{9.203}$$

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t,u)\\&=\int_0^t(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^2\cdot(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t',u))\cdot|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t',u)|dt'\end{aligned}\tag{9.204}$$

$${}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t,u)=\frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^2\mathrm{tr}\chi(t',u)|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t',u)|dt'\tag{9.205}$$

同样

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}G'_{m,l}(t,u)\\&\leqslant e^{C\delta_0}(1-u+t)^{-2}\cdot\int_0^t(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^2|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}(t',u)|dt'\end{aligned}\tag{9.206}$$

我们将估计 ${}^{(i_1\cdots i_l)}F'_{m,l}(t)$ 在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 上的 L^2 范数.

首先由 **A3** 以及 (8.333) 在 $t=0$ 处的取值有

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^0_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\leqslant C(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\tag{9.207}$$

转向 ${}^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}$. 将 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 分解为 $\mathcal{V}_{s-}$ 和 $\mathcal{V}_{s+}$, 它们分别由 (8.337) 和 (8.338) 定义. 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|^2_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&=\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}+\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\end{aligned}\tag{9.208}$$

由 Minkowski 不等式,

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant \int_0^t \|^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}dt' \tag{9.209}$$

其中

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t',u)\\&=(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^2(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t',u))|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t',u)|\end{aligned} \tag{9.210}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant(1+t')^2(\max_{\mathcal{V}_{s-}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s-}}(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t'))\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\end{aligned} \tag{9.211}$$

由 (8.343) 和 (8.344) (见定义 (8.249)),

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})} \leqslant C(1+t')^2M(t')\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t')\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{9.212}$$

定义

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t)=(1+t)\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{9.213}$$

假设对非负量 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P'^{(0)}_{m,l}$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P'^{(1)}_{m,l}$, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t)\leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}P'^{(0)}_{m,l}(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}P'^{(1)}_{m,l}(t) \tag{9.214}$$

我们定义非负非减量 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}$, 其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}(\bar{\mu}^a_m(t')^{(i_1\cdots i_l)}P'^{(0)}_{m,l}(t')) \tag{9.215}$$

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')^{1/2}\bar{\mu}^a_m(t')^{(i_1\cdots i_l)}P'^{(1)}_{m,l}(t')) \tag{9.216}$$

那么对 $t'\in[0,t]$, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t')\leqslant\bar{\mu}^{-a}_m(t')({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t')^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t)) \tag{9.217}$$

代入 (9.212) 并由 (9.213), 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}^{-a}_m(t')M(t')\end{aligned} \tag{9.218}$$

对任意 $t' \in [0,t]$ 成立. 将这个代入 (9.209), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))I_a(t)\end{aligned}\tag{9.219}$$

运用引理 8.11, 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant Ca^{-1}((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned}\tag{9.220}$$

与 (9.209) 和 (9.211) 相类似, 将 $\mathcal{V}_{s-}$ 换成 $\mathcal{V}_{s+}$, 我们有

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant\int_0^t\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'\tag{9.221}$$

以及

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^1_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant(1+t')^2(\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s+}}(-2\mu^{-1}(\frac{\partial\mu}{\partial t})_-(t'))\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\end{aligned}\tag{9.222}$$

将 (8.356), (8.357) 和 (9.213) 代入 (9.222), 再考虑 (9.221), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))^2\int_0^t\frac{1+\log(1+t')}{1+t'}{}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t')dt'\end{aligned}\tag{9.223}$$

所以由 (9.217), 我们有

$$\begin{aligned}\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant{}&C\delta_0(1+\log(1+t))^2({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\\&\cdot\int_0^t\frac{1+\log(1+t')}{1+t'}\bar{\mu}_m^{-a}(t')dt'\end{aligned}\tag{9.224}$$

由 (8.363), 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))^4({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{1-a}(t)\end{aligned}\tag{9.225}$$

将 (9.220) 和 (9.225) 组合起来并考虑 $a\delta_0\leqslant C^{-1}$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^1_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&\leqslant Ca^{-1}((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned}\tag{9.226}$$

这里我们同样用到了定义 (8.248).

转到 ${}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t,u)$, 我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|^2_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&=\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}+\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|^2_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\end{aligned}\tag{9.227}$$

以及

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\leqslant\int_0^t\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}dt'\tag{9.228}$$

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant\int_0^t\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'\tag{9.229}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t',u)=\frac{1}{2}(\frac{\mu(t,u)}{\mu(t',u)})^2(1-u+t')^2\mathrm{tr}\chi(t',u)|{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t',u)|\tag{9.230}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant\frac{1}{2}(1+t')^2(\max_{\mathcal{V}_{s-}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s-}}(\mathrm{tr}\chi(t'))\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\end{aligned}\tag{9.231}$$

由 (8.343) 和 (8.371) 有

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\leqslant C(1+t')\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t')\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\tag{9.232}$$

再由 (9.213) 和 (9.217), 我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\leqslant C{}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t')\\&\leqslant C({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t')^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}^{-a}_m(t')\\&\leqslant C'({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t')^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}^{-a}_m(t)\end{aligned}\tag{9.233}$$

其中我们用到了引理 8.11 的推论 2. 将 (9.233) 代入 (9.228), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\\&\leqslant C((1+t){}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}^{-a}_m(t)\end{aligned}\tag{9.234}$$

与 (9.231) 相类似地, 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant\frac{1}{2}(1+t')^2(\max_{\mathcal{V}_{s+}}\frac{\mu(t)}{\mu(t')})^2\max_{\mathcal{V}_{s+}}(\mathrm{tr}\chi(t'))\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\end{aligned}\tag{9.235}$$

这里我们要考虑两种情形: $t'<\sqrt{t}$ 或者 $t'\geqslant\sqrt{t}$. 在第一种情形 (8.378) 成立, 在第二种情形 (8.377) 成立. 再回忆 (8.371), 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant C(1+\log(1+t))^{2\,(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t'),\ t'\leqslant\sqrt{t}\\&\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\leqslant C^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t'),\ t'\geqslant\sqrt{t}\end{aligned}\tag{9.236}$$

将 (9.236) 代入 (9.229), 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\&\leqslant\int_0^{\sqrt{t}}\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'+\int_{\sqrt{t}}^{t}\|^{(i_1\cdots i_l)}N'^2_{m,l}(t,t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'\\&\leqslant C(1+\log(1+t))^2\int_0^{\sqrt{t}}{}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t')dt'+C\int_{\sqrt{t}}^{t}{}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}(t')dt'\\&\leqslant C(1+\log(1+t))^2\int_0^{\sqrt{t}}\bar{\mu}_m^{-a}(t')({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t')^{-1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))dt'\\&\quad+C\int_{\sqrt{t}}^{t}\bar{\mu}_m^{-a}(t')({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t')^{-1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))dt'\\&\leqslant C(1+\log(1+t))^2((1+t)^{1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/4\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\&\quad+C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\&\leqslant C'((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned}\tag{9.237}$$

其中我们用到了引理 8.11 的推论 2 以及 (9.217).

将 (9.234) 和 (9.237) 组合起来, 我们得到

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}M'^2_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&\leqslant C((1+t)^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned}\tag{9.238}$$

(9.202), (9.207), (9.226) 和 (9.238) 意味着

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_l)}F'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&\leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\&\quad+C(1+t)^{-1}({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{-1/2\,(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned}\tag{9.239}$$

我们现在考虑 (9.206). 由 (8.383),

$$
{}^{(i_1\cdots i_l)}G'_{m,l}(t,u)\leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^2|{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}(t',u)|dt' \quad (9.240)
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\|{}^{(i_1\cdots i_l)}G'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\leqslant{}& C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot\int_0^t(1+t')^2\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}(t')\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}dt' \quad (9.241)
\end{aligned}
$$

现在 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}$ 由 (9.191) 给出. 由引理 9.4 后面的讨论, ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 的主部由 (9.118), (9.120) 和 (9.126) 组成. 定义函数 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l}$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{0,l}\\
&={}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{0,l}-\xi\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l-\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x'_{0,l-1},\ m=0 \quad (9.242)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l}={}&{}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}-\xi\cdot\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}\\
&-m\Lambda^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}-\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x'_{m,l-1},\ m\geqslant 1
\end{aligned}
\quad (9.243)
$$

那么 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l}$ 不包含声学主部, 我们有

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{0,l}={}&-2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,0,l}+\xi\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l\\
&+\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x'_{0,l-1}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{0,l},\ m=0 \quad (9.244)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}={}&-2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}+\xi\cdot\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}+m\Lambda^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}\\
&+\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x'_{m,l-1}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l},\ m\geqslant 1 \quad (9.245)
\end{aligned}
$$

定义

$$
X'_{m,l}=\max_{i_1\cdots i_l}\|{}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \quad (9.246)
$$

当 $m=0$ 时, 我们将用 $X'_{0,l}(t)$ 和 $X_l(t)$ 来估计 $\|\tilde{g}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}$, 它由 (8.390) 式定义, 当 $m\geqslant 1$ 时, 我们则用 $X'_{m,l}(t)$ 和 $X'_{m-1,l+1}(t)$ 来估计. 首先考虑 (9.244) 和 (9.245) 右端的第二项. $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ 由 (9.59) 给出. 由连续性假设 **A**, **E** 和 **F**, 我们有

$$|\xi|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{9.247}$$

所以由逐点估计 (9.119), 我们有

$$\begin{aligned}\|\xi\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}&\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))X_l(t)\\ \|\xi\cdot\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}&\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X'_{m-1,l+1}(t)\end{aligned} \tag{9.248}$$

接下来考虑 (9.245) 右端的第三项. 由 (6.89) 和 (6.99), 我们有

$$|\Lambda|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{9.249}$$

所以由逐点估计 (9.121) 有

$$\|m\Lambda^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m-1,l}\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\leqslant Cm\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X'_{m-1,l+1}(t) \tag{9.250}$$

接下来考虑 (9.244) 和 (9.245) 中倒数第二项. 由逐点估计 (9.127) 和 (8.393),

$$\begin{aligned}&\|\sum_{k=0}^{l-1}{}^{(R_{i_{l-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{l-k-1}i_{l-k+1}\cdots i_l)}x'_{m,l-1}\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\ &\leqslant Cl\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X'_{m,l}(t)\end{aligned} \tag{9.251}$$

最后我们考虑 (9.244) 和 (9.245) 中的第一项. 由 **F2**, 我们有

$$\begin{aligned}&\|2\mu\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\ &\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\end{aligned} \tag{9.252}$$

我们运用 (9.190). 由 (8.396), (9.190) 等价于

$$\begin{aligned}&\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}|(t,u)\|_{L^2(S^2)}\\ &\leqslant C\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(t,u)\|_{L^2(S^2)}+C\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t,u)\|_{L^2(S^2)}\\ &\quad+C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}(t,u)\|_{L^2(S^2)}+C\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}|(t,u)\|_{L^2(S^2)}\\ &\quad+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}|(t,u)\|_{L^2(S^2)}\end{aligned} \tag{9.253}$$

在 $[0,\epsilon_0]$ 上面取 L^2 范数有

$$
\begin{aligned}
&\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\not{\mu}}_{2,m,l}|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant & C\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+C\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+C\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}
\tag{9.254}
$$

由 (9.248), (9.250), (9.251), (9.252) 和 (9.254), 我们从 (9.244) 和 (9.245) 得到

$$
\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{0,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant & C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X'_{0,l}(t)\\
&+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))X_l(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}Q'_{0,l}(t),\ m=0\\
&\|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{g}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant & C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X'_{m,l}(t)\\
&+C(m+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))X'_{m-1,l+1}(t)\\
&+{}^{(i_1\cdots i_l)}Q'_{m,l}(t),\ m\geqslant 1
\end{aligned}
\tag{9.255}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}Q'_{m,l}(t)=&C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\mu_{m,l}|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\mu^{(i_1\cdots i_l)}d_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\mu|^{(i_1\cdots i_l)}e_{m,l}|(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
&+\|^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}
\tag{9.256}
$$

现在回到 (9.193). 在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 上面取 L^2 范数, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant & \|^{(i_1\cdots i_l)}F'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+\|^{(i_1\cdots i_l)}G'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}
\end{aligned}
\tag{9.257}
$$

代入 (9.239), (9.241) 和 (9.255) 意味着

$$
\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{0,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}B'_{0,l}(t)\\
&+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))X_l(t')dt'\\
&+C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+\log(1+t'))X'_{0,l}(t')dt',\ m=0\\
&\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}B'_{m,l}(t)\\
&+C(m+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+\log(1+t'))X'_{m-1,l+1}(t')dt'\\
&+C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+\log(1+t'))X'_{m,l}(t')dt',\ m\geqslant 1
\end{aligned}
\tag{9.258}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}B'_{m,l}(t) =& C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\
&+C(1+t)^{-1}({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(0)}_{m,l,a}(t)+(1+t)^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}'^{(1)}_{m,l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\
&+C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^{2(i_1\cdots i_l)}Q'_{m,l}(t')dt'
\end{aligned}
\tag{9.259}
$$

对 (9.258) 关于 $i_1\cdots i_l$ 取最大值, 并且回忆定义 (9.246), 我们得到

$$
\begin{aligned}
X'_{0,l}\leqslant& B'_{0,l}(t)+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))X_l(t')dt'\\
&+C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot\int_0^t(1+\log(1+t'))X'_{0,l}(t')dt',\ m=0\\
X'_{m,l}\leqslant& B'_{m,l}(t)+C(m+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot\int_0^t(1+\log(1+t'))X'_{m-1,l+1}(t')dt'\\
&+C(l+1)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot\int_0^t(1+\log(1+t'))X'_{m,l}(t')dt',\ m\geqslant 1
\end{aligned}
\tag{9.260}
$$

其中

$$B'_{m,l}(t) = \max_{i_1 \cdots i_l} {}^{(i_1 \cdots i_l)} B'_{m,l}(t) \tag{9.261}$$

设

$$l = n - 1 - m$$

(9.260) 是关于 $X'_{m,n-1-m}, m = 0, \cdots, n-1$ 的常积分不等式. 对 $m = 0$, 我们有一个关于 $X'_{0,n-1}$ 的积分不等式, 其右端含有 X_{n-1}, 这个我们在第八章中已经估计过了. 当 $m \geqslant 1$ 时, 我们有一个关于 $X'_{m,n-1-m}$ 的积分不等式, 其右端含有 $X'_{m-1,n-1-(m-1)}$. 所以这些积分不等式所依赖的量我们都已经估计过了. 设

$$Y'_{l,m}(t) = \int_0^t (1 + \log(1 + t')) X'_{m,l}(t') dt' \tag{9.262}$$

回忆 (8.406), 由于

$$\frac{dY'_{m,l}(t)}{dt} = (1 + \log(1 + t)) X'_{m,l}(t)$$

$Y'_{m,l}$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{dY'_{0,l}(t)}{dt} \leqslant & (1 + \log(1 + t)) B'_{0,l}(t) + C\delta_0 (1 + t)^{-2} (1 + \log(1 + t))^3 Y_l(t) \\ & + C(l + 1)\delta_0 (1 + t)^{-2} (1 + \log(1 + t))^3 Y'_{0,l}(t), \ m = 0 \\ \frac{dY'_{m,l}(t)}{dt} \leqslant & (1 + \log(1 + t)) B'_{m,l}(t) \\ & + C(m + 1)\delta_0 (1 + t)^{-2} (1 + \log(1 + t))^3 Y'_{m-1,l+1}(t) \\ & + C(l + 1)\delta_0 (1 + t)^{-2} (1 + \log(1 + t))^3 Y'_{m,l}(t), \ m \geqslant 1 \end{aligned} \tag{9.263}$$

这里积分因子是

$$e^{-C_l(t)}$$

其中 $C_l(t)$ 如 (8.409). 所以我们得到

$$\begin{aligned} Y'_{0,l}(t) \leqslant & e^{C_l(t)} \int_0^t e^{-C_l(t')} (1 + \log(1 + t')) B'_{0,l}(t') dt' \\ & C\delta_0 \int_0^t (1 + t')^{-2} (1 + \log(1 + t'))^3 Y_l(t') dt', \ m = 0 \\ Y'_{m,l}(t) \leqslant & e^{C_l(t)} \int_0^t e^{-C_l(t')} (1 + \log(1 + t')) B'_{m,l}(t') dt' \\ & + C(m + 1)\delta_0 \int_0^t (1 + t')^{-2} (1 + \log(1 + t'))^3 Y'_{m-1,l+1}(t') dt', \ m \geqslant 1 \end{aligned} \tag{9.264}$$

由于积分

$$\int_0^\infty \frac{(1+\log(1+t'))^3}{(1+t')^2} dt'$$

收敛, 如果 δ_0 满足一个形如 (8.411) 的小性条件, 再考虑到 $Y_l, Y'_{m-1,l+1}$ 是 t 的非减函数, (9.264) 意味着

$$\begin{aligned} Y'_{0,l}(t) &\leqslant 2\int_0^t (1+\log(1+t))B'_{0,l}(t')dt' + C\delta_0 Y_l(t), \ m=0 \\ Y'_{m,l}(t) &\leqslant 2\int_0^t (1+\log(1+t'))B'_{m,l}(t')dt' + C(m+1)\delta_0 Y'_{m-1,l+1}(t), \ m \geqslant 1 \end{aligned} \tag{9.265}$$

设 $l = n-1-m, m = 0,1,\cdots,n-1$, 我们有

$$Y'_{0,n-1}(t) \leqslant 2\int_0^t (1+\log(1+t'))B'_{0,n-1}(t')dt' + C\delta_0 Y_{n-1}(t) \tag{9.266}$$

并且对 $m = 1,\cdots,n-1$, 运用一个不等式版的命题 8.2, 我们推出

$$\begin{aligned} &Y'_{m,n-1-m}(t) \\ &\leqslant (m+1)!(C\delta_0)^m Y'_{0,n-1}(t) \\ &\quad +2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!}(C\delta_0)^k \int_0^t (1+\log(1+t'))B'_{m-k,n-1-(m-k)}(t')dt' \end{aligned} \tag{9.267}$$

代入 (8.412), 这意味着

$$\begin{aligned} Y'_{m,n-1-m}(t) \leqslant\ & 2\int_0^t (1+t')(1+\log(1+t'))B_{n-1}(t')dt' \\ & +2\sum_{k=0}^{m}\int_0^t (1+\log(1+t'))B'_{k,n-1-k}(t')dt', \ m=0,\cdots,n-1 \end{aligned} \tag{9.268}$$

前提是依赖于 n 的 δ_0 足够小. 从而 (8.412) 和 (9.268) 意味着

$$\begin{aligned}
&Y_{n-1}(t)+nY'_{0,n-1}(t)\\
\leqslant\ &2(n+1)\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))B_{n-1}(t')dt'\\
&+2n\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{0,n-1}(t')dt',\ m=0\\
&(m+1)Y'_{m-1,n-1-(m-1)}(t)+(n-m)Y'_{m,n-1-m}(t)\\
\leqslant\ &2(n+1)\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))B_{n-1}(t')dt'\\
&+2(n+1)\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{k,n-1-k}(t')dt'\\
&+2(n-m)\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{m,n-1-m}(t')dt',\ m=1,\cdots,n-1
\end{aligned} \tag{9.269}$$

回忆 (9.258) 并且设 $l=n-1-m$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{0,n-1}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ &{}^{(i_1\cdots i_{n-1})}B'_{0,n-1}(t)+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2(Y_{n-1}(t)+nY'_{0,n-1}(t)),\ m=0\\
&\|^{(i_1\cdots i_{n-1-m})}x'_{m,n-1-m}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ &{}^{(i_1\cdots i_{n-1-m})}B'_{m,n-1-m}(t)C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot((m+1)Y'_{m-1,n-1-(m-1)}(t)+(n-m)Y'_{m,n-1-m}(t)),\ m\geqslant 1
\end{aligned} \tag{9.270}$$

最终将 (9.269) 代入 (9.270), 我们得到了如下估计:

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}x'_{0,n-1}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ &{}^{(i_1\cdots i_{n-1})}B'_{0,n-1}(t)+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot(2(n+1)\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))B_{n-1}(t')dt'\\
&+2n\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{0,n-1}(t')dt'),\ m=0
\end{aligned} \tag{9.271}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_{n-1-m})}x'_{m,n-1-m}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\
\leqslant\ &^{(i_1\cdots i_{n-1-m})}B'_{m,n-1-m}(t)+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\\
&\cdot(2(n+1)\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))B_{n-1}(t')dt'\\
&+2(n+1)\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{k,n-1-k}(t')dt'\\
&+2(n-m)\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{m,n-1-m}(t')dt'),\ m\geqslant 1
\end{aligned}
\tag{9.272}
$$

第十章 x^i 的一阶导数的球面导数的控制. 关于 χ 的假设和估计

10.1 初步准备

这一章的目的之一是估计空间直角坐标 x^i 和 $\hat{T}x^i$, $i=1,2,3$ 的球面导数, 即关于 R_j, $j=1,2,3$ 的导数. 这一章的估计都是建立在关于 χ 的连续性假设之上. 这些估计将用来估计交换向量场的形变张量的球面导数.

我们首先讨论算子 $\not{\mathcal{L}}_X$ 的一般性定义, 其中 X 是任意一个与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, 我们也要讨论算子 $\not{\mathcal{L}}_L$ 和 $\not{\mathcal{L}}_T$ 作用在任意 T_p^q 型 $S_{t,u}$ 张量场的情形. 首先考虑 $S_{t,u}$ 上 1- 形式 ξ 的情形. 设 X 是一个与 $TS_{t,u}$ 相切的向量场. 则 $\not{\mathcal{L}}_X\xi$ 是 $S_{t,u}$ 上的一个内蕴定义. 然而为了定义 $\not{\mathcal{L}}_L\xi$ 我们必须考虑 ξ 作为一个 $S_{t,u}$ 1- 形式往某个给定的 C_u 上的延拓, 即要求 $\xi(L)=0$. 然后再定义 $\not{\mathcal{L}}_L\xi$ 是通常 Lie 导数 $\mathcal{L}_L\xi$, 一个 C_u 上的内蕴量, 在 $TS_{t,u}$ 上的限制. 注意到在任何一种情形都有 $(\mathcal{L}_L\xi)(L)=0$. 我们可以用相类似的方法定义 $\not{\mathcal{L}}_T\xi$, 只需把 C_u 换成 Σ_t.

当 ξ 是 $S_{t,u}$ 上 p 阶协变张量场时, 定义方法与 $S_{t,u}$ 上 1- 形式的情形完全相同. 接下来考虑 $S_{t,u}$ 上切向量场 Y 的情形, X 则是另外一个 $S_{t,u}$ 上的切向量场. 此时 $\not{\mathcal{L}}_XY$ 定义为 $\mathcal{L}_XY=[X,Y]$. 由引理 8.2, $\mathcal{L}_LY=[L,Y]={}^{(Y)}Z$ 是一个 $S_{t,u}$ 上的切

向量场, 所以 $\not{\mathcal{L}}_L Y$ 被定义为 $\mathcal{L}_L Y$. 类似地 (见引理 10.18), $\not{\mathcal{L}}_T Y$ 被定义为 $\mathcal{L}_T Y$.

对于 $S_{t,u}$ 上的 q 阶共变张量场, 定义方式完全相同. 同样对于 $S_{t,u}$ 上的 T_p^q 型张量场 ϑ, 定义方式也是相类似的. 注意到上述关于 $\not{\mathcal{L}}_X\vartheta$, $\not{\mathcal{L}}_L\vartheta$ 和 $\not{\mathcal{L}}_T\vartheta$ 的定义不依赖于声学度量 g. 所以我们有

$$\not{\mathcal{L}}_X(\vartheta\otimes\varphi)=(\not{\mathcal{L}}_X\vartheta)\otimes\varphi+\vartheta\otimes(\not{\mathcal{L}}_X\varphi) \tag{10.1}$$

其中 X 是 $S_{t,u}$ 上任意一个切向量场. 同样

$$\not{\mathcal{L}}_L(\vartheta\otimes\varphi)=(\not{\mathcal{L}}_L\vartheta)\otimes\varphi+\vartheta\otimes(\not{\mathcal{L}}_L\varphi) \tag{10.2}$$

$$\not{\mathcal{L}}_T(\vartheta\otimes\varphi)=(\not{\mathcal{L}}_T\vartheta)\otimes\varphi+\vartheta\otimes(\not{\mathcal{L}}_T\varphi) \tag{10.3}$$

我们注意到将 L 换成 Q 也有相类似的结论成立.

由上述讨论我们有, 对 $X,Y\in TS_{t,u}$ 有

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_L g)(X,Y)&=L(g(X,Y))-g([L,X],Y)-g(X,[L,Y])\\ &=L(\not{g}(X,Y))-\not{g}([L,X],Y)-\not{g}(X,[L,Y])=(\not{\mathcal{L}}_L\not{g})(X,Y)\end{aligned}$$

即

$$^{(L)}\not{\pi}=\not{\mathcal{L}}_L\not{g}=2\chi \tag{10.4}$$

类似地, 我们有

$$^{(T)}\not{\pi}=\not{\mathcal{L}}_T\not{g} \tag{10.5}$$

和

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_T\bar{g})(X,Y)&=T(\bar{g}(X,Y))-\bar{g}([T,X],Y)-\bar{g}(X,[T,Y])\\ &=T(\not{g}(X,Y))-\not{g}([T,X],Y)-\not{g}(X,[T,Y])=(\not{\mathcal{L}}_T\not{g})(X,Y)\end{aligned}$$

即

$$\not{\mathcal{L}}_T\not{g}=2\kappa\theta \tag{10.6}$$

给定一个正整数 l, 我们记 $\not{E}_l$ 为如下连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的正整数 C 使得对任意 $t \in [0, s]$ 有

$$\not{E}_l: \max_{i_1 \cdots i_l} \max_{\alpha} \|R_{i_l} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

同样, 为了记号的统一, 我们记 $\not{E}_0$ 为第六章中基本的连续性假设 $\mathbf{E1}$:

$$\not{E}_0: \max_{\alpha} |\psi_\alpha| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

给定一个正整数 l, 我们记 $\not{E}_{[l]}$ 为如下连续性假设:

$$\not{E}_{[l]}: \not{E}_0 \quad \text{且} \cdots\cdots \text{且} \quad \not{E}_l$$

给定一个正整数 n, 我们记

$$n_* = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{若 } n \text{ 是偶数} \\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{若 } n \text{ 是奇数} \end{cases} \tag{10.7}$$

引理 10.1 设 G 是关于变量 $(\psi_\alpha,\ \alpha = 0, 1, 2, 3)$ 的光滑函数. 设连续性假设 $\not{E}_{[l_*]}$ 对某个正整数 l 成立. 则存在不依赖于 s 的常数 C, C_l 使得如下估计成立:

$$\begin{aligned} &\|R_{i_l} \cdots R_{i_1} G\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\ \leqslant\ & C \sum_{\alpha} \|R_{i_l} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} + C_l \delta_0 (1+t)^{-1} \sum_{k=1}^{l-1} \max_{i_1 \cdots i_k} \max_{\alpha} \|R_{i_k} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \end{aligned}$$

证明 由直接计算可得. □

现在考虑函数 $\hat{T}^j$. 由 (3.200)—(3.202), 我们有

$$R_i \hat{T}^j = R_i^A \not{d}_A = \not{d}_i \cdot \not{d}x^j \tag{10.8}$$

其中

$$\not{d}_i = m \cdot R_i \tag{10.9}$$

这里, m 是

$$m = m_b \cdot \not{g}^{-1} \tag{10.10}$$

其中

$$m_b = \theta = -\alpha^{-1}\chi + \not{k} \tag{10.11}$$

回忆第六章中关于函数 y^i 的定义:

$$\hat{T}^j = -\frac{x^j}{1-u+t} + y^j \tag{10.12}$$

由于 $R_i x^j = R_i \cdot \not{d}x^j$, 我们有

$$R_i y^j = \not{\lambda}'_i \cdot \not{d}x^j \tag{10.13}$$

其中

$$\not{\lambda}'_i = \not{\lambda}_i + \frac{R_i}{1-u+t} \tag{10.14}$$

由 (10.9)—(10.11), 我们有

$$\not{\lambda}'_i = m' \cdot R_i \tag{10.15}$$

其中

$$m' = m'_b \cdot \not{g}^{-1} \tag{10.16}$$

以及

$$m'_b = m_b + \frac{\not{g}}{1-u+t} \tag{10.17}$$

是 $S_{t,u}$ 上的二阶协变张量场:

$$m'_b = -\frac{(\alpha^{-1}-1)\not{g}}{1-u+t} - \alpha^{-1}(\chi - \frac{\not{g}}{1-u+t}) + \not{k} \tag{10.18}$$

我们接下来考虑直角坐标函数 x^j 的球面导数. 由 (6.6), 我们有

$$(R_i)^j = \Pi^j_k(\mathring{R}_i)^k \tag{10.19}$$

其中 Π^j_k 是 Π 的分量, 即 Σ_t 上到 $S_{t,u}$ 的关于度量 $\bar{g}$ 的正交投影:

$$\Pi^j_k = \delta^j_k - \bar{g}_{kl}\hat{T}^l\hat{T}^j = \delta^j_k - \hat{T}^j\hat{T}^k \tag{10.20}$$

而

$$(\mathring{R}_i)^j = \epsilon_{imj} x^m \tag{10.21}$$

回忆 (6.130):

$$\bar{g}(\mathring{R}_i, \hat{T}) = \lambda_i = \epsilon_{imj} x^m y^j \tag{10.22}$$

我们得到

$$R_i = \mathring{R}_i - \lambda_i \hat{T}^j \partial_j \tag{10.23}$$

对任意非负整数 k, 定义函数

$$^{(k)}x^j_{i_1 \cdots i_k} = \mathring{R}_{i_k} \cdots \mathring{R}_{i_1} x^j \tag{10.24}$$

这些都是直角坐标的线性函数, 所以

$$^{(k)}c^j_{l;i_1 \cdots i_k} = \frac{\partial^{(k)} x^j_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^l} \tag{10.25}$$

是常数. 对每个非负整数 k 由如下方程定义函数 $^{(k)}\delta^j_{i_1 \cdots i_j}$:

$$R_{i_k} \cdots R_{i_1} x^j = {}^{(k)}x^j_{i_1 \cdots i_k} - {}^{(k)}\delta^j_{i_1 \cdots i_k} \tag{10.26}$$

特别地,

$$^{(0)}\delta^j = 0 \tag{10.27}$$

再由 (10.23),

$$^{(1)}\delta^j_i = \lambda_i \hat{T}^j \tag{10.28}$$

在 (10.26) 中将 k 换为 $k-1$, 然后作用 R_{i_k}, 我们得到

$$R_{i_k} R_{i_{k-1}} \cdots R_{i_1} x^j = R_{i_k} {}^{(k-1)}x^j_{i_1 \cdots i_{k-1}} - R_{i_k} {}^{(k-1)}\delta^j_{i_1 \cdots i_{k-1}} \tag{10.29}$$

由 (10.23)—(10.25),

$$R_{i_k} {}^{(k-1)}x^j_{i_1 \cdots i_{k-1}} = {}^{(k)}x^j_{i_1 \cdots i_k} - {}^{(k-1)}c^j_{l;i_1 \cdots i_{k-1}} \lambda_{i_k} \hat{T}^l \tag{10.30}$$

将这个代入 (10.29) 然后与 (10.26) 比较, 我们得到

$$^{(k)}\delta^j_{i_1\cdots i_k} = R_{i_k}\,^{(k-1)}\delta^j_{i_1\cdots i_{k-1}} + {}^{(k-1)}c^j_{l;i_1\cdots i_{k-1}}\lambda_{i_k}\hat{T}^l \tag{10.31}$$

现在我们可以运用命题 8.2, 将 A_n 取为 R_{i_k}, x_n 取为 $^{(k)}\delta^j_{i_1\cdots i_k}$ 以及 y_n 取为

$$^{(k-1)}c^j_{l;i_1\cdots i_{k-1}}\lambda_{i_k}\hat{T}^l$$

由 (10.27) 有 $x_0 = 0$, 我们得到

$$^{(k)}\delta^j_{i_1\cdots i_k} = \sum_{m=1}^{k} {}^{(m-1)}c^j_{l;i_1\cdots i_{m-1}} R_{i_k}\cdots R_{i_{k-m+2}}(\lambda_{i_m}\hat{T}^l) \tag{10.32}$$

由于 $^{(k)}x$ 是直角坐标的线性函数, 我们由 (10.25) 得到

$$^{(k)}x^j_{i_1\cdots i_k} = {}^{(k)}c^j_{l;i_1\cdots i_k}x^l \tag{10.33}$$

由 (10.21) 和 (10.24) 有

$$^{(0)}x^j = x^j, \quad {}^{(1)}x^j_i = \epsilon_{ilj}x^l \tag{10.34}$$

更进一步,

$$^{(2)}x^j_{ik} = \delta_{jk}x^i - \delta_{ik}x^j \tag{10.35}$$

对于 $k \geqslant 2$ 我们由 (10.24) 和 (10.35) 得到

$$\begin{aligned}
^{(k)}x^j_{i_1\cdots i_k} &= \mathring{R}_{i_k}\cdots\mathring{R}_{i_3}\,^{(2)}x^j_{i_1 i_2} \\
&= \mathring{R}_{i_k}\cdots\mathring{R}_{i_3}(\delta_{ji_2}x^{i_1} - \delta_{i_1 i_2}x^j) \\
&= \delta_{ji_2}\,^{(k-2)}x^{i_1}_{i_3\cdots i_k} - \delta_{i_1 i_2}\,^{(k-2)}x^j_{i_3\cdots i_k}
\end{aligned} \tag{10.36}$$

由 (10.36) 可知对 $k \geqslant 2$ 有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}|^{(k)}x^j_{i_1\cdots i_k}| = \max_{j;i_1\cdots i_{k-2}}|^{(k-2)}x^j_{i_1\cdots i_{k-2}}| \tag{10.37}$$

而由 (10.34),

$$\max_{j;i}|^{(1)}x^j_i| = \max_j|^{(0)}x^j| = \max_j|x^j| \tag{10.38}$$

从而我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} |{}^{(k)}x^j_{i_1\cdots i_k}| = \max_j |x^j| \tag{10.39}$$

再由 (6.131) 可知,

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|{}^{(k)}x^j_{i_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant 1+t \tag{10.40}$$

引理 10.2 设

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立. 则如果 δ_0 足够小 (可能依赖于 l), 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\lambda_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$

和

$$\max_{j;ii_1\cdots i_k} \|{}^{(k+1)}\delta^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

证明 注意到 (6.143) 和 (10.27), 引理对 $l=0$ 成立. 则由 (10.12), (10.22), (10.26), (10.40) 和 (10.32), 我们可以运用数学归纳法. □

引理 10.3 设

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l_*$ 成立. 则如果 δ_0 足够小 (可能依赖于 l), 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\lambda_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l(1+t)\mathcal{Y}_{[l]}$$

和

$$\max_{j;ii_1\cdots i_k} \|{}^{(k+1)}\delta^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l(1+t)\mathcal{Y}_{[l]}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立. 这里

$$\mathcal{Y}_k = \max_{j;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^j\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}, \quad \mathcal{Y}_{[l]} = \sum_{k=0}^{l}\mathcal{Y}_k$$

我们同样定义

$$\mathcal{W}_0 = \max_{\alpha} \|\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

并且对 $k \neq 0$ 有

$$\mathcal{W}_k = \max_{\alpha; i_1 \cdots i_k} \|R_{i_k} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

以及

$$\mathcal{W}_{[l]} = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{W}_k$$

证明 由 (10.22), (10.32) 和 (10.40), 引理对 $l = 0$ 成立. 然后我们可以运用数学归纳法. □

引理 10.4 对每个非负整数 k, 我们有

$$R_{i_k} \cdots R_{i_1} R_i y^j = {}^{(k)}\not{q}'_{ii_1 \cdots i_k} \cdot \not{d} x^j + {}^{(k)}\not{r}'_{ii_1 \cdots i_k}$$

这里

$$^{(k)}\not{q}'_{ii_1 \cdots i_k} = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \not{q}'_i$$

以及

$$^{(k)}\not{r}^j_{ii_1 \cdots i_k} = \sum_{m=0}^{k-1} R_{i_k} \cdots R_{i_{k-m+1}} ({}^{(k-m-1)}\not{q}'_{ii_1 \cdots i_{k-m-1}} \cdot \not{d}(R_{i_{k-m}} x^j))$$

证明 由

$$^{(0)}\not{q}'_i = \not{q}'_i, \quad {}^{(0)}\not{r}^j_i = 0$$

引理在 $k = 0$ 时化为 (10.13). 那么运用归纳法以及命题 8.2, 引理得证. □

由 (10.15) 和关于系数 $^{(k)}\not{q}'_{ii_1 \cdots i_k}$ 的公式以及由引理 10.4 给出的 $^{(k)}\not{r}^j_{ii_1 \cdots i_k}$, 很容易看出 $^{(k)}\not{q}'_{ii_1 \cdots i_k}$ 包含关于 R_i 的 k 阶球面导数, 而 $^{(k)}\not{r}^j_{ii_1 \cdots i_k}$ 包含关于 R_i 的 $k-1$ 阶球面导数, 这里我们说 “关于 R_i 的 l 阶球面导数” 是表示 $S_{t,u}$ 上的切向量场 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} R_i$, 其中 $m = 0, \cdots, l$. 我们接下来将导出这些向量场的表达式. 最基本的则是由下述引理给出的关于

$$\not{\mathcal{L}}_{R_i} R_j = [R_i, R_j]$$

的表达式. 设 w_i 为

$$w_i = (w_i)_b \cdot \not{g}^{-1} \tag{10.41}$$

其中

$$(w_i)_b = \epsilon_{ijm} y^j \bar{g}_{mn} \not{d}x^n = \epsilon_{ijm} y^j \not{d}x^m \tag{10.42}$$

定义

$$\tilde{\not{q}}'_i = \not{q}'_i - w_i \tag{10.43}$$

引理 10.5 我们有

$$[R_i, R_j] = -\epsilon_{ijk} R_k + \lambda_i \tilde{\not{q}}'_j - \lambda_j \tilde{\not{q}}'_i$$

证明 我们有

$$R_i = (R_i)^m \partial_m$$

由 (10.23), 我们有

$$(R_i)^m = (\mathring{R}_i)^m - \lambda_i \hat{T}^m$$

所以

$$\begin{aligned}
[R_i, R_j] &= (R_i((R_j)^m) - R_j((R_i)^m))\partial_m \\
&= (R_i((\mathring{R}_j)^m - \lambda_j \hat{T}^m) - R_j((\mathring{R}_i)^m - \lambda_i \hat{T}^m))\partial_m
\end{aligned} \tag{10.44}$$

现在,

$$R_i((\mathring{R}_j)^m) = R_i(\epsilon_{jkm} x^k) = \epsilon_{jkm} (R_i)^k$$
$$= -\epsilon_{jmk}((\mathring{R}_i)^k - \lambda_i \hat{T}^k) = -\epsilon_{jmk}\epsilon_{ilk} x^l + \epsilon_{jmk} \lambda_i \hat{T}^k$$

由于

$$\epsilon_{jmk}\epsilon_{ilk} + \epsilon_{mik}\epsilon_{jlk} + \epsilon_{ijk}\epsilon_{mlk} = 0$$

我们得到

$$R_i((\mathring{R}_j)^m) - R_j((\mathring{R}_i)^m) = -\epsilon_{ijk}(\mathring{R}_k)^m + (\epsilon_{ikm}\lambda_j - \epsilon_{jkm}\lambda_i)\hat{T}^k \tag{10.45}$$

将 (10.45) 代入 (10.44) 得到

$$\begin{aligned}[R_i, R_j] = &-\epsilon_{ijk}\mathring{R}_k - \lambda_i v_j + \lambda_j v_i \\ &-(R_i(\lambda_j) - R_j(\lambda_i))\hat{T} - (\lambda_j R_i(\hat{T}^m) - \lambda_i R_j(\hat{T}^m))\partial_m\end{aligned} \tag{10.46}$$

其中

$$v_i = \epsilon_{ikm}\hat{T}^k\partial_m \tag{10.47}$$

由 (10.12), (10.13) 有

$$R_i(\hat{T}^m)\partial_m = -(1-u+t)^{-1}R_i + \not{d}'_i \tag{10.48}$$

再将 (10.48) 代入 (10.46), 后者变为

$$[R_i, R_j] = -\epsilon_{ijk}\mathring{R}_k - (R_i(\lambda_j) - R_j(\lambda_i))\hat{T} + \lambda_i(\not{d}'_j - v'_j) - \lambda_j(\not{d}'_i - v'_i) \tag{10.49}$$

其中

$$v'_i = v_i + (1-u+t)^{-1}R_i \tag{10.50}$$

由于 $[R_i, R_j]$ 与 $S_{t,u}$ 相切, 我们可以对 (10.49) 的右端作用投影算子 Π. 这样就消去了第二项, 然后由于 $\Pi\mathring{R}_i = R_i$, 我们得到

$$[R_i, R_j] = -\epsilon_{ijk}R_k + \lambda_i(\not{d}'_j - \Pi v'_j) - \lambda_j(\not{d}'_i - \Pi v'_i) \tag{10.51}$$

由 (10.43), 我们必须证明

$$\Pi v'_i = w_i \tag{10.52}$$

由 (10.50), 我们有

$$\Pi v'_i = \Pi\tilde{v}_i \tag{10.53}$$

其中

$$\tilde{v}_i = v_i + (1-u+t)^{-1}\mathring{R}_i \tag{10.54}$$

由 (10.47), (10.12) 和 (10.21), 我们有

$$\tilde{v}_i = \epsilon_{ikm} y^k \partial_m \tag{10.55}$$

所以在标架 (X_A, $A = 1, 2$) 下, 我们有

$$\Pi \tilde{v}_i = \bar{g}(\tilde{v}_i, X_B)(\not{g}^{-1})^{BA} X_A \tag{10.56}$$

和

$$\bar{g}(\tilde{v}_i, X_B) = \bar{g}_{mn}(\tilde{v}_i)^m X_B^n = \epsilon_{ikm} y^k \bar{g}_{mn} \not{d}_B x^n = \epsilon_{ikm} y^k \not{d}_B x^m \tag{10.57}$$

将 (10.57) 与 (10.42) 比较, 我们知道

$$\bar{g}(\tilde{v}_i, X_B) = (w_i)_b(X_B) \tag{10.58}$$

将 (10.58) 代入 (10.56), 我们得到

$$\Pi \tilde{v}_i = w_i \tag{10.59}$$

所以由 (10.53), 引理得证. □

由 (10.15), (10.43),

$$\tilde{\not{d}}'_i = m' \cdot R_i - w_i \tag{10.60}$$

定义 $S_{t,u}$ 上的张量场 μ_i:

$$\mu_i = \lambda_i m' \tag{10.61}$$

以及 $S_{t,u}$ 上的切向量场 ν_{ij}:

$$\nu_{ij} = -\lambda_i w_j + \lambda_j w_i \tag{10.62}$$

引理 10.5 中的公式有如下形式:

$$[R_i, R_j] = -\epsilon_{ijk} R_k + \mu_i \cdot R_j - \mu_j \cdot R_i + \nu_{ij} \tag{10.63}$$

引理 10.6 对每个非负整数 k, 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} R_j = {}^{(k)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_k} R_m + {}^{(k)}\beta_{j;i_1\cdots i_k} \cdot R_m + {}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}$$

系数 ${}^{(k)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_k}$ 都是常数, 它们由

$$ {}^{(k)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_k} = (-1)^k \epsilon_{i_k n_k m}\epsilon_{i_{k-1}n_{k-1}n_k}\cdots\epsilon_{i_1 n_1 n_2}\delta^{n_1}_j $$

给出. 系数 ${}^{(k)}\beta_{j;i_1\cdots i_k} = ({}^{(k)}\beta^m_{i_1\cdots i_k},\ m=1,2,3)$ 是 T^1_1 型的 $S_{t,u}$ 张量场的三元组, 它由

$$ {}^{(k)}\beta_{j;i_1\cdots i_k} = \sum_{n=0}^{k-1} A_{i_k}\cdots A_{i_{k-n+1}}{}^{(k-n)}\rho_{j;i_1\cdots i_k} $$

给出. 这里 A_i 是作用在 T^1_1 型 $S_{t,u}$ 张量场三元组 $z=(z^m,\ m=1,2,3)$ 上的算子, 它由

$$ (A_i z)^m = \not{\mathcal{L}}_{R_i} z^m - \sum_n \epsilon_{inm} z^n + z^m\cdot\mu_i - (\sum_n z^n\cdot\mu_n)\delta^m_i $$

给出. 而 ${}^{(k)}\rho_{j;i_1\cdots i_k} = ({}^{(k)}\rho^m_{j;i_1\cdots i_k},\ m=1,2,3)$ 是 T^1_1 型 $S_{t,u}$ 张量场的三元组, 它由

$$ {}^{(k)}\rho^m_{j;i_1\cdots i_k} = {}^{(k-1)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_k}\mu_{i_k} - (\sum_n {}^{(k-1)}\alpha^n_{j;i_1\cdots i_k}\mu_n)\delta^m_{i_k} $$

给出. 最后系数 ${}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}$ 是 $S_{t,u}$ 上的切向量场, 它由

$$ \begin{aligned} {}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k} = & \sum_{n=0}^{k-1} {}^{(k-1-n)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_{k-n-1}} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k-n+1}}}\nu_{i_{k-n}m} \\ & + \sum_{n=0}^{k-1} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k-n+1}}}({}^{(k-n-1)}\beta^m_{j;i_1\cdots i_{k-n-1}}\cdot\nu_{i_{k-n}m}) \end{aligned} $$

给出.

证明 设

$$ {}^{(0)}\alpha^m_j = \delta^m_j,\quad {}^{(0)}\beta^m_j = 0,\quad {}^{(0)}\gamma_j = 0 \tag{10.64} $$

则 $k=0$ 时引理显然成立. 并且容易看出 $k=1$ 时引理化为 (10.63). 再运用归纳法和命题 8.2 以及注意到 (10.64), 则引理得证. □

为了分析算子 A_i, 我们定义乘子算子 M_i. 这些是三维矩阵, 其矩阵元 $(M_i)^m_n$, $m,n=1,2,3$ 是 T^1_1 型的 $S_{t,u}$ 张量场, 它们由

$$ (M_i)^m_n = -\epsilon_{inm} I + \delta^m_n\mu_i - \delta^m_i\mu_n \tag{10.65} $$

给出. 这里 I 是 T_1^1 型的 $S_{t,u}$ 张量场, 如果在 $S_{t,u}$ 每一点处的切空间考虑, 它是恒等变换. 这些矩阵右作用于 T_1^1 型 $S_{t,u}$ 张量场的三元组 $z=(z^m,\ m=1,2,3)$:

$$(z\cdot M_i)^m=\sum_n z^n\cdot(M_i)_n^m \tag{10.66}$$

所以如果定义矩阵乘法为

$$(M_i\cdot M_j)_n^m=\sum_k(M_i)_n^k\cdot(M_j)_k^m \tag{10.67}$$

则我们有

$$(z\cdot M_i)\cdot M_j=z\cdot(M_i\cdot M_j) \tag{10.68}$$

算子 A_i 由矩阵 M_i 定义:

$$A_iz=\not{\mathcal{L}}_{R_i}z+z\cdot M_i \tag{10.69}$$

我们同样可以定义算子 A_i 作用于矩阵 K:

$$A_iK=\not{\mathcal{L}}_{R_i}K+K\cdot M_i \tag{10.70}$$

注意到如果我们同样记 I 为恒等矩阵, 则由 (10.70), 我们有

$$A_iI=M_i \tag{10.71}$$

由 (10.69) 和 (10.70), 我们对 k 使用归纳法可以导出如下公式:

$$A_{i_k}\cdots A_{i_1}z=\sum_{\text{分解}}(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\cdot(M)^{s_2} \tag{10.72}$$

这里求和是关于所有 $\{1,\cdots,k\}$ 的有序分解 $\{s_1,s_2\}$, 同样我们记

$$(M)^{s_2}=A_{i_{n_p}}\cdots A_{i_{n_1}}I,\quad \text{若}\quad s_2=\{n_1,\cdots,n_p\},p=|s_2| \tag{10.73}$$

引入矩阵 I_i 和 N_i:

$$(I_i)_n^m=-\epsilon_{inm}I \tag{10.74}$$

$$(N_i)_n^m=\delta_n^m\mu_i-\delta_i^m\mu_n \tag{10.75}$$

我们有

$$M_i = I_i + N_i \tag{10.76}$$

对任意正整数 k 和多重指标 $(i_1, \cdots, i_k)$, 我们引入矩阵 ${}^{(k)}I_{i_1\cdots i_k}$ 和 ${}^{(k)}B_{i_1\cdots i_k}$:

$${}^{(k)}I_{i_1\cdots i_k} = I_{i_1}\cdots I_{i_k} \tag{10.77}$$

以及

$${}^{(k)}B_{i_1\cdots i_k} = A_{i_k}\cdots A_{i_1}I - {}^{(k)}I_{i_1\cdots i_k} \tag{10.78}$$

我们同样设 ${}^{(0)}I = I, {}^{(0)}B = 0$. 从而容易看到

$$({}^{(k)}I_{i_1\cdots i_k})^m_n = {}^{(k)}\alpha^m_{n;i_1\cdots i_k}I \tag{10.79}$$

显然 ${}^{(k)}B_{i_1\cdots i_k}$ 包含 N_i 的 1 到 k 次幂, 以及有 $k-q$ 阶球面导数作用于其上的 q 次幂. 所以 ${}^{(k)}B_{i_1\cdots i_k}$ 包含 N_i 的 $k-1$ 阶球面导数. 所以 (10.73) 可以被写为

$$(M)^{s_2} = {}^{(p)}I_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}} + {}^{(p)}B_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}} \tag{10.80}$$

最终, 用我们导出 (10.39), 我们有

$$\max_{m,j;i_1\cdots i_k} |{}^{(k)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_k}| = \max_{m,j} |{}^{(0)}\alpha^m_j| = 1 \tag{10.81}$$

从而

$$\max_{n,m;i_1\cdots i_k} |({}^{(k)}I_{i_1\cdots i_k})^m_n| = 1 \tag{10.82}$$

10.2 y^i 的估计

给定一个非负整数 l, 记 $\mathbf{E}^Q_l$ 为如下连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的常数 C 使得对 $t \in [0, s]$ 有

$$\mathbf{E}^Q_l: \max_{i_1\cdots i_l}\max_{\alpha} \|R_{i_l}\cdots R_{i_1}Q\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma^{\epsilon_0}_t)} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

记 $\mathbf{E}^Q_{[l]}$ 为连续性假设:

$$\mathbf{E}^Q_{[l]}: \mathbf{E}^Q_0 \quad \text{且} \cdots\cdots \text{且} \quad \mathbf{E}^Q_l$$

给定正整数 l, 记 $\not{\mathbf{X}}_l$ 为连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的常数 C 使得对 $t \in [0,s]$ 有

$$\not{\mathbf{X}}_l : \max_{i_1 \cdots i_l} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

同样记 $\not{\mathbf{X}}_0$ 为连续性假设:

$$\not{\mathbf{X}}_0 : |\chi - \frac{\not{g}}{1-u+t}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

这个与第六章中的 **F2** 相同. 从而我们记

$$\not{\mathbf{X}}_{[l]} : \not{\mathbf{X}}_0 \quad 且 \cdots\cdots 且 \quad \not{\mathbf{X}}_l$$

10.2.1 $R_{i_k} \cdots R_{i_1} y^j$ 的 L^∞ 估计

命题 10.1 设 **H0** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l]}$, $\not{\mathbf{E}}^Q_{[l-1]}$ 和 $\not{\mathbf{X}}_{[l-1]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (可能依赖于 l), 我们有

$$\max_{j;i_1 \cdots i_k} \|R_{i_k} \cdots R_{i_1} y^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

证明 我们将运用数学归纳法. 当 $l=0$ 时命题就是 (6.177), 这是命题的假设. 接下来设命题对 $l-1$ 成立. 则我们有

$$\max_{j;i_1 \cdots i_k} \|R_{i_k} \cdots R_{i_1} y^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_{l-1}\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{10.83}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

这里我们将运用引理 10.4 中的表达式. 首先注意到由引理 10.2, 我们有

$$\max_{j;i_1 \cdots i_k} \|^{(k)}\delta^j_{i_1 \cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_{l-1}\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{10.84}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

再由 (10.26) 和 (10.40), 我们有

$$\max_{j;i_1 \cdots i_k} \|R_{i_k} \cdots R_{i_1} x^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t) \tag{10.85}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

所以我们需要做的就是估计 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{d}_i'$, 其中 $0\leqslant k\leqslant l-1$. 首先由 $\mathbf{E}_{[l]}$ 和 $\mathbf{H0}$, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}(\alpha^{-1})\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{10.86}$$

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{10.87}$$

其中 $1\leqslant k\leqslant l-1$.

再由 (6.59) 和 $\not{\mathbf{X}}_{[l-1]}$, 我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}{}^{(R_j)}\not{\pi}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{10.88}$$

对 $0\leqslant k\leqslant l-1$ 成立. 这里我们同样用到了归纳假设使得下式成立:

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\lambda_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_{l-1}\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{10.89}$$

所以由 $\not{\mathbf{X}}_{[l-1]}$ 以及 (10.16) 和 (10.18) 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}m'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{10.90}$$

对 $0\leqslant k\leqslant l-1$ 成立.

然后由引理 10.6, 我们容易得到

$$\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}R_j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C(1+t) \tag{10.91}$$

其中 $0\leqslant k\leqslant l$.

事实上由 (10.89) 和 (10.90), 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\mu_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{10.92}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

再由 (10.75) 有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}N_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{10.93}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

由 (10.80) 前面的讨论有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}B_{i_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{10.94}$$

再由 (10.80), (10.82) 和 (10.94), 我们有

$$\|(M)^{s_2}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C \quad 对于 \quad |s_2| \leqslant l \tag{10.95}$$

(前提是依赖于 l 的 δ_0 足够小). 所以由 (10.72) 可知,

$$\max_{i_1\cdots i_k} \|A_{i_k}\cdots A_{i_1}z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_k \sum_{m=0}^{k} \max_{i_1\cdots i_m} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{10.96}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

由引理 10.6 和 (10.92) 有

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_{m+n}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+n}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+1}}}{}^{(m)}\rho_{j;i_1\cdots i_m}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ &\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\end{aligned} \tag{10.97}$$

对所有 m 和 $n\leqslant l-1$ 成立.

再由 (10.96), 我们得到

$$\|A_{i_{m+n}}\cdots A_{i_{m+1}}{}^{(m)}\rho_{j;i_1\cdots i_m}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{10.98}$$

对所有 m 和 $n\leqslant l-1$ 成立.

所以最终我们有

$$\begin{aligned}&\max_{j;i_1\cdots i_{m+n}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+n}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+1}}}{}^{(m)}\beta_{j;i_1\cdots i_m}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ &\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\end{aligned} \tag{10.99}$$

对所有 $m+n\leqslant l$ 成立.

我们仍然需要考虑 ${}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}$. 由引理 10.6 的表达式和归纳假设, 我们容易得到

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|{}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2 \tag{10.100}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

从而我们得到了 (10.91). 再由 (10.91), (10.90) 和 (10.15), 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{y}'_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{10.101}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

从而命题得证. □

这个命题有一些推论. 首先由引理 10.2, 我们有

推论 10.1.a 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\lambda_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$

和

$$\max_{j;ii_1\cdots i_k}\|^{(k+1)}\delta_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

上述第二式意味着

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}x^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C(1+t)$$

对 $k=0,\cdots,l+1$ 成立, 前提是 δ_0 足够小 (可能依赖于 l).

由命题 10.1 的证明, 我们有

推论 10.1.b 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\hat{T}^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\quad 对所有\quad k=0,\cdots,l$$

和

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\psi_{\hat{T}}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}\quad 对所有\quad k=0,\cdots,l$$

并且

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not\psi\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}\quad 对所有\quad k=0,\cdots,l$$

以及

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not\psi\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}\quad 对所有\quad k=0,\cdots,l-1$$

推论 10.1.c 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}\quad 对所有\quad k=0,\cdots,l-1$$

推论 10.1.d 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad 对所有 \quad k=0,\cdots,l-1$$

推论 10.1.e 在命题 10.1 的假设下, 如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}R_j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t) \quad 对所有 \quad k=0,\cdots,l$$

更准确些, 我们有

$$\max_{m,j;i_1\cdots i_k}|{}^{(k)}\alpha^m_{j;i_1\cdots i_k}|=1 \quad 对所有 \quad k$$
$$\max_{m,j;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\beta^m_{j;i_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2$$
$$对所有 \quad k=0,\cdots,l\ ({}^{(0)}\beta^m_j=0)$$
$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2$$
$$对所有 \quad k=0,\cdots,l\ ({}^{(0)}\gamma_j=0)$$

最后, 我们有

推论 10.1.f 在命题 10.1 的假设下我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\not{\phi}'_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad 对所有 \quad k=0,\cdots,l-1$$

和

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\not{r}^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad 对所有 \quad k=0,\cdots,l-1$$

10.2.2 $R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^j$ 的 L^2 估计

定义

$$\mathcal{A}_0=\|\chi-\frac{\not{\phi}}{1-u+t}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

对 $k\neq 0$ 有

$$\mathcal{A}_k=\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\chi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

和

$$\mathcal{A}_{[l]} = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{A}_k$$

同样定义

$$\mathcal{W}_k^Q = \max_{\alpha;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1} Q\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}, \quad \mathcal{W}_{[l]}^Q = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{W}_k^Q$$

命题 10.2 设 **H0** 和估计 (6.177) 成立. 设 l 是正整数并设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*]}$, $\not{\mathbf{E}}_{[l_*-1]}^Q$ 和 $\not{\mathbf{X}}_{[l_*-1]}$ 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\mathcal{Y}_k \leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]})$$

对 $k = 0, \cdots, l$ 成立.

证明 证明同样是由数学归纳法. $l=0$ 时命题显然成立. 设命题对 $1, \cdots, l-1$ 成立并且考虑 l 的情形. 命题 10.2 与命题 10.1 假设相同, 只不过是把 l 换成了 l_*. 所以命题 10.1 对 l_* 成立. 所以我们有关于 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \not{d}_i'$ 和 $\not{d}((R)^{s_2}x^j)$ 的 L^∞ 估计, 其中 $k = 0, \cdots, l_*-1$, $|s_2| \leqslant l_*$. 同样, 命题 10.1 的所有推论对 l_* 成立. 和前面一样, 我们将运用引理 10.4 中的表达式, 我们将得到一个关于 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \not{d}_i'$ 和 $\not{d}((R)^{s_2}x^j)$ 的 L^2 估计, 其中 $k = 0, \cdots, l-1$, $|s_2| \leqslant l-1$. 由 (10.18), 我们有

$$\|(\not{\mathcal{L}}_R)^s m_b'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l]} + \mathcal{A}_{[l-1]}) + C_l(1+t)^{-1}\mathcal{Y}_{[l-1]} \tag{10.102}$$

对 $|s| \leqslant l-1$ 成立. 这里我们用到了引理 10.3, 从而有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|R_{i_1}\cdots R_{i_k}\lambda_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_{l-1}(1+t)\mathcal{Y}_{[l-1]} \tag{10.103}$$

对 $k = 0, \cdots, l-1$ 成立.

这是因为引理 10.3 的假设对 $l-1$ 是满足的.

同样我们有

$$\begin{aligned}&\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s(R)}\not{t}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant{}& C_l\mathcal{Y}_{[l-2]} + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l-1]} + C_l\delta_0(1+\log(1+t))\mathcal{A}_{[l-2]}\end{aligned} \tag{10.104}$$

对 $s=0,\cdots,l-2$ 成立. 这里我们用到了关于 λ_i 的归纳假设.

最后我们处理 (10.15) 中有一半以上的导数落到 R_i 的情形. 这里我们必须用引理 10.6. 这个表达式中右端第一项和第二项中的第二个因子很明显用 L^∞ 范数界定. 所以首先我们对 $k=0,\cdots,l-1$ 考虑 ${}^{(k)}\beta^m_{j;i_1\cdots i_k}$. 对 $k=0,\cdots,l-1$, 考虑关于 T^1_1 型 $S_{t,u}$ 张量场三元组 z 的表达式 (10.72). 对于 (10.72) 中的和, 我们有两种情形需要考虑.

情形 1: $|s_2|\leqslant l_*$ 和情形 2: $|s_1|\leqslant l_*-1$

在第一种情形, 由 (10.95), 将 l 换成 l_*, 我们有

$$\begin{aligned}\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\cdot(M)^{s_2}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}&\leqslant\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|(M)^{s_2}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C\sum_{m=0}^{l-1}\max_{i_1\cdots i_m}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\end{aligned}\tag{10.105}$$

在第二种情形, 我们像 (10.80) 那样表示 $(M)^{s_2}$. 我们用 (10.82) 估计 (10.80) 中第一项的 L^∞ 范数:

$$\begin{aligned}\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\cdot{}^{(p)}I_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}&\leqslant\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|{}^{(p)}I_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C\sum_{m=0}^{l-1}\max_{i_1\cdots i_m}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\end{aligned}\tag{10.106}$$

对于 (10.80) 中第二项的贡献, 我们需要估计它的 L^2 范数. 由 (10.80) 上边的讨论, 我们需要对 $k=0,\cdots,l-2$ 估计

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}N_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

再由 (10.75), 我们需要对 $k=0,\cdots,l-2$ 估计

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\mu_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

为了得到这些估计, 我们将运用定义 (10.61). 由 (10.103) (将 l 换成 $l-1$), 我们有关于 λ_i 的 L^2 估计. 而对于 m' 的 L^2 估计, 我们运用 (10.104) 和 (10.102) 以及 (10.88) 和 (10.90), 则我们得到

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}m'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l-1]}+\mathcal{A}_{[l-2]})+C_l(1+t)^{-1}\mathcal{Y}_{[l-2]}\end{aligned}\tag{10.107}$$

对 $k=0,\cdots,l-2$ 成立.

将这个和 (10.103) 与 (10.90) 及 (10.89) 组合起来 (将 l 换成 l_*), 我们得到

$$\begin{aligned}&\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\mu_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l-1]}+\mathcal{A}_{[l-2]})\\&\quad+C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{Y}_{[l-2]}\end{aligned}\tag{10.108}$$

对 $k=0,\cdots,l-2$ 成立.

所以我们有

$$\begin{aligned}&\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}N_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l-1]}+\mathcal{A}_{[l-2]})\\&\quad+C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{Y}_{[l-2]}\end{aligned}\tag{10.109}$$

所以在第二种情形, (10.80) 第二项的贡献被

$$\begin{aligned}&\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\cdot{}^{(p)}B_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant\|(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|{}^{(p)}B_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\max_{m\leqslant l_*-1}\max_{i_1\cdots i_m}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\quad\cdot(\mathcal{Y}_{[l-2]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]})\end{aligned}\tag{10.110}$$

界定. 所以对一个 T_1^1 型的 $S_{t,u}$ 上的张量场三元组 z, 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_k}\|A_{i_k}\cdots A_{i_1}z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\sum_{m=0}^{l-1}\max_{i_1\cdots i_m}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\quad+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\max_{m\leqslant l_*-1}\max_{i_1\cdots i_m}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_m}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\quad\cdot(\mathcal{Y}_{[l-2]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]})\end{aligned}\tag{10.111}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

由引理 10.6 中三元组 ${}^{(k)}\rho_{j;i_1\cdots i_k}$ 的表达式和 (10.81) 以及在 (10.108) 中将 l 换成 $l-1$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_{m+n}}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+n}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+1}}}{}^{(m)}\rho_{j;i_1\cdots i_m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_{[l-1]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})\end{aligned}\tag{10.112}$$

对 m 和 $n \leqslant l-1$ 成立.

接下来我们将把 (10.111) 运用到三元组 ${}^{(m)}\rho_{j;i_1\cdots i_m}$, 同时还运用 L^2 估计 (10.112) 以及 L^∞ 估计 (10.97), 将 l 换成 l_*, 从而得到

$$\begin{aligned}&\|A_{i_{m+n}}\cdots A_{i_{m+1}}{}^{(m)}\rho_{j;i_1\cdots i_m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_{[l-1]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})\end{aligned} \tag{10.113}$$

对 m 和 $n \leqslant l-1$ 成立.

所以

$$\begin{aligned}&\max_{j;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\beta_{j;i_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_{[l-1]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})\end{aligned} \tag{10.114}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

更一般地, 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{j;i_1\cdots i_{m+n}}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+n}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{m+1}}}{}^{(m)}\beta_{j;i_1\cdots i_m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_{[l-1]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})\end{aligned} \tag{10.115}$$

对满足 $m+n\leqslant l$ 的 m 和 n 成立.

我们转向引理 10.6 中系数 ${}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}$ 的表达式. 由于我们已经有了 (10.115), 所以我们需要的是对 $k=0,\cdots,l-2$ 关于 $\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\nu_{ij}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计. 由 (10.62), 我们所需要的是一个关于 $\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}w_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计, 从而可以得到一个关于 $\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(w_i)_b\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计, 它对 $k=0,\cdots,l-2$ 成立. 考虑 (10.42), y^i 导数的 L^2 估计正是归纳假设. 而由于我们有

$$R_q(R)^{s_2}x^j={}^{(p+1)}x^j_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}q}-{}^{(p+1)}\delta^j_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}q} \tag{10.116}$$

其中 $s_2=\{n_1,\cdots,n_p\}, p=|s_2|$. 所以由 **H0**, 我们有

$$|\not{d}(R)^{s_2}x^j|\leqslant C(1+t)^{-1}\sum_{q=1}^{3}(|{}^{(p+1)}x^j_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}q}|+|{}^{(p+1)}\delta^j_{i_{n_1}\cdots i_{n_p}q}|) \tag{10.117}$$

由 (10.40), 我们可以估计 (10.117) 右端第一项的 L^∞ 范数. 由对 l_* 成立的命题 10.1, 引理 10.3 的假设成立, 当然, 把引理 10.3 假设中的 l 换成 $l-1$ 都是成立的.

所以我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|^{(k+1)}\delta^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_{l-1}(1+t)\mathcal{Y}_{[l-1]} \tag{10.118}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立. 所以我们可以估计第二项的 L^2 范数. 将 (10.118), (10.85) 和归纳假设以及命题 10.1 的结论组合起来, 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(w_i)_b\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\mathcal{Y}_{[l-1]} \tag{10.119}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立. 将这个与 (10.104), (10.88) 以及 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(w_i)_b$ 的 L^∞ 范数组合起来, 我们得到

$$\begin{aligned}&\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}w_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l(\mathcal{Y}_{[l-1]}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2((1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]}))\end{aligned} \tag{10.120}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立. 所以由 (10.62), 我们容易得到

$$\begin{aligned}&\max_{i,j;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\nu_{ij}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_{[l-1]}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2((1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]}))\end{aligned} \tag{10.121}$$

将这个与 (10.114) 组合起来, 我们知道引理 10.6 中表达式最后两项的 L^2 范数被

$$C_l\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_{[l-1]}+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]}) \tag{10.122}$$

界定. 我们用 $1+t$ 估计第一项的 L^∞ 范数. 将 (10.122) 与 (10.107), 推论 10.1.e 以及 (10.90) 组合起来, 我们有

$$\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{d}'_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\mathcal{Y}_{[l-1]}+C_l\delta_0((1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]}) \tag{10.123}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

接下来我们要考虑 $\not{d}((R)^{s_2}x^j)$ 当 $|s_2|\leqslant l-1$ 时的 L^2 估计. 回忆从 (10.116) 到 (10.118) 的讨论, L^2 范数的贡献被 (10.118) 界定. 将这个与推论 10.1.f, (10.85) 以及 **H0** 组合起来, 我们得到

$$\|^{(k)}\not{\gamma}^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\mathcal{Y}_{[l-1]}+C_l\delta_0((1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]}) \tag{10.124}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

所以最终我们得到

$$\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^j\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\mathcal{Y}_{[l-1]}+C_l\delta_0((1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]}) \tag{10.125}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

回忆归纳假设,

$$\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^j\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]}) \tag{10.126}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

将这个代入 (10.125), 命题得证. □

像前面一样, 我们有许多推论. 首先由引理 10.3, 我们有

推论 10.2.a 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\lambda_i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l-1]}) \tag{10.127}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立, 以及

$$\max_{j;ii_1\cdots i_k}\|{}^{(k+1)}\delta^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l-1]}) \tag{10.128}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

然后由命题 10.2 的证明, 我们容易得到

推论 10.2.b 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\psi_{\hat{T}}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立,

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{\psi}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立, 以及

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{\psi}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}))$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

推论 10.2.c 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}))$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

推论 10.2.d 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C_l(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))((1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]})$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

推论 10.2.e 在命题 10.2 的假设下, 引理 10.6 中 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}R_j$ 表达式的系数满足

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\beta_{j;i_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})$$

对 $k=1,\cdots,l$ 成立,

$$\max_{j;i_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\gamma_{j;i_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]})$$

对 $k=1,\cdots,l$ 成立.

最后我们有

推论 10.2.f 在命题 10.2 的假设下, 引理 10.4 中 $R_{i_k}\cdots R_{i_1}R_jy^j$ 表达式的系数满足

$$\max_{ii_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\not{q}'_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立, 以及

$$\max_{ii_1\cdots i_k}\|{}^{(k)}\not{\gamma}^j_{ii_1\cdots i_k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]})$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

我们现在将估计函数 L^i 的球面导数. 在这之后我们将估计 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\kappa^{-1}\zeta$ 和 $S_{t,u}$ 上的切向量场 ${}^{(R_i)}Z$. 由 (6.64) 和 (6.65),

$$L^j=\frac{x^j}{1-u+t}+z^j \tag{10.129}$$

其中

$$z^j = -\alpha y^j + \frac{(\alpha-1)x^j}{1-u+t} - \psi^j \tag{10.130}$$

定义

$$\psi_L = L^\mu \not{d}\psi_\mu \tag{10.131}$$

和

$$\omega_{L\hat{T}} = \hat{T}^i(L\psi_i) \tag{10.132}$$

作为命题 10.1 的一个推论, 类比于推论 10.1.b, 我们有

推论 10.1.g 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1} z^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1} L^j\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立. 并且

$$\max_{i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1} \psi_L\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}$$

对 $k=1,\cdots,l$ 成立, 以及

$$\max_{i_1\cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \psi_L\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立,

$$\max_{i_1\cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \omega_{L\hat{T}}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

同样, 作为命题 10.2 的一个推论, 类比于推论 10.2.b, 我们有

推论 10.2.g 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\max_{j;i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1} z^j\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]})$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立. 并且

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\psi_L\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))$$

对 $k=1,\cdots,l$ 成立, 以及

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{\psi}_L\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}))$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立,

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_l}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\omega_{L\hat{T}}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ &C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{[l-1]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}+\mathcal{W}_{[l-1]}))\end{aligned}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

现在考虑 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\kappa^{-1}\zeta$. 它由 (3.53) 给出:

$$\kappa^{-1}\zeta=\alpha\varepsilon-\not{d}\alpha \tag{10.133}$$

首先在命题 10.1 的假设下, 我们考虑 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上关于 $\kappa^{-1}\zeta$ 的 $l-1$ 阶球面导数的 L^∞ 估计. 由推论 10.1.b, 我们推出:

推论 10.1.h 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(\kappa^{-1}\zeta)\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

接下来在命题 10.2 的假设下, 我们考虑 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上关于 $\kappa^{-1}\zeta$ 的 $l-1$ 阶球面导数的 L^2 估计. 由推论 10.2.g 和 (10.133), 容易看出

推论 10.2.h 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(\kappa^{-1}\zeta)\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}))$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

转向 $S_{t,u}$ 上的切向量场 ${}^{(R_i)}Z$. 它们是与 $S_{t,u}$ 上 1- 形式 ${}^{(R_i)}\not{\pi}_L$ 相对应的:

$${}^{(R_i)}Z={}^{(R_i)}\not{\pi}_L\cdot\not{g}^{-1} \tag{10.134}$$

由 (6.67) 有

$$^{(R_i)}\not\pi_L = -(\chi - \frac{\not g}{1-u+t}) \cdot R_i + \epsilon_{ijm} z^j \not d x^m + \lambda_i (\kappa^{-1}\zeta) \tag{10.135}$$

再由命题 10.1 的推论, 我们有

推论 10.1.i 在命题 10.1 的假设下, 我们有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|\not\mathcal{L}_{R_{i_k}} \cdots \not\mathcal{L}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)}\not\pi_L\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k = 0, \cdots, l-1$ 成立, 以及

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|\not\mathcal{L}_{R_{i_k}} \cdots \not\mathcal{L}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)} Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k = 0, \cdots, l-1$ 成立.

由命题 10.1 的推论 (将 l 换成 l_*) 以及命题 10.2 的推论, 我们有

推论 10.2.i 在命题 10.2 的假设下, 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{i;i_1\cdots i_k} \|\not\mathcal{L}_{R_{i_k}} \cdots \not\mathcal{L}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)}\not\pi_L\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]} + \mathcal{W}_{[l-1]})
\end{aligned}$$

对 $k = 0, \cdots, l-1$ 成立, 以及

$$\begin{aligned}
&\max_{i;i_1\cdots i_k} \|\not\mathcal{L}_{R_{i_k}} \cdots \not\mathcal{L}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)} Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]} + \mathcal{W}_{[l-1]})
\end{aligned}$$

对 $k = 0, \cdots, l-1$ 成立.

10.3 Q_l 和 P_l 的界

这一节的目的是为了得到关于 $^{(i_1\cdots i_l)}Q_l$ 和 $^{(i_1\cdots i_l)}P_l$ 合适的界, 这两个量通过 $^{(i_1\cdots i_l)}B_l$ 出现在第八章关于 $^{(i_1\cdots i_l)}x_l$ 的估计中.

10.3.1 Q_l 的估计

我们首先考虑由 (8.100) 给出的 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 i:

$$\begin{aligned}
i &= \beta_A^* - \alpha^{-1}((\chi - \frac{\not g}{1-u+t}) \cdot \not g^{-1} - (\mathrm{tr}\chi - \frac{2}{1-u+t})I) \cdot (\kappa^{-1}\zeta) \\
&:= i_1 + i_2
\end{aligned} \tag{10.136}$$

由 (4.32)—(4.33), 上式右端第一项为

$$i_1 = \beta^*_A = \eta^{-2}(\not{g}^{-1})^{BC}(\frac{1}{2}X_A(-\eta^2+|\mathbf{v}|^2)\not{\psi}(X_B,X_C) - \frac{1}{2}X_B(-\eta^2+|\mathbf{v}|^2)\not{\psi}(X_A,X_C))$$
$$-\eta^{-2}(\not{g}^{-1})^{BC}(\not{\psi}(X_A,X_C)L^jX_B(\psi_j) - L^jX_A(\psi_j)\not{\psi}(X_C,X_B)) \quad (10.137)$$

显然在命题 10.1 中将 l 换成 $l+1$, 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i_1\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4} \quad (10.138)$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

同样容易看到

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i_2\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t)) \quad (10.139)$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立. 所以我们得到

引理 10.7 设 **H0** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l+1]}$, $\not{\mathbf{E}}^Q_{[l]}$ 和 $\not{\mathbf{X}}_{[l]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\max_{i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

由直接计算以及命题 10.2 的推论 (l 换成 $l+1$), 不难得出

$$\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i_1\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(\mathcal{W}_{[l+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \quad (10.140)$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

类似地, 我们有

$$\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i_2\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{A}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0) \quad (10.141)$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立. 从而我们得到

引理 10.8 设 **H0** 和 (6.177) 成立. 设 l 是一个正整数, 设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{l_*+1}$, $\not{\mathbf{E}}^Q_{[l_*]}$ 和 $\not{\mathbf{X}}_{[l_*]}$ 成立. 则我们有

$$\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{A}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0) \quad (10.142)$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

接下来在引理 10.8 的假设下, 我们估计 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_l)}i_l$ 的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数, 它由命题 8.4 给出:

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}i_l = &(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi)\cdots(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_1})}\not\pi)i \\
&+\sum_{k=0}^{l-1}(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi)\cdots(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{l-k+1}})}\not\pi)^{(i_1\cdots i_{l-k})}q_{l-k}
\end{aligned}
\tag{10.143}
$$

我们首先估计 (10.143) 右端的第一项. 我们有

$$
\begin{aligned}
&(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi)\cdots(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not\pi)i \\
=\ &\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k_1<\cdots<k_j=1}^{l}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\overset{>\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k_j}}}<}{(\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{k_j}})}\not\pi)}\cdots\overset{>\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k_1}}}<}{(\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{k_1}})}\not\pi)}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}i
\end{aligned}
\tag{10.144}
$$

我们需要考虑两种情形:

情形 1: 最多只有 l_* 阶球面导数落到因子

$$
\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{k_1}})}\not\pi,\cdots,\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{k_j}})}\not\pi
$$

上; 和

情形 2: 上述因子中有一个有多余 l_* 阶的球面导数. 则其余因子最多只有 l_* 阶球面导数.

在情形 1, 我们运用推论 10.1.d 将 l 换成 l_*+1, 则我们知道 (10.144) 右端第二项被

$$
\begin{aligned}
&C_l(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)))^j(\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{A}_{[l-j]} \\
&+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l-j+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0))
\end{aligned}
$$

界定.

在情形 2, 落到 i 上的导数最多只有 l_* 阶. 所以由引理 10.7 和推论 10.2.d, 我们得到了一个关于 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数的估计:

$$
\begin{aligned}
&C_l(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)))^{j-1}\cdot\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t)) \\
&\cdot(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-j]}+\mathcal{W}_{[l-j+1]})
\end{aligned}
$$

这里我们用到了如下事实: 在命题 10.2 的假设下, 我们由推论 10.2.d 有

$$\max_{i;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})\tag{10.145}$$

将这些结论组合起来我们得到了 (10.144) 右端第二项的界:

$$\begin{aligned}&C_l(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)))^{j-1}(\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{A}_{[l-j]}\\&+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l-j+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0))\end{aligned}\tag{10.146}$$

接下来考虑 (10.143) 右端的第二项. 首先我们定义算子 $\check{D}$:

$$(\check{\not{D}}\vartheta)_{ABC}=\frac{1}{2}(\not{D}_A\vartheta_{BC}+\not{D}_B\vartheta_{AC}-\not{D}_C\vartheta_{AB})\tag{10.147}$$

其中 ϑ 是 $S_{t,u}$ 上的二阶对称协变张量场.

所以命题 8.4 中 ${}^{(i_1\cdots i_j)}q_j$ 表达式的第二项是

$$(\check{\not{D}}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1})\cdot(\not{g}^{-1}\cdot{}^{(R_j)}\hat{\not{\pi}}\cdot\not{g}^{-1})$$

同样, 第三项为

$${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1}\cdot(\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}{}^{(R_j)}\hat{\not{\pi}}\cdot\not{g}^{-1})$$

而由直接计算, 我们有

$$\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}{}^{(X)}\hat{\not{\pi}}\cdot\not{g}^{-1}=\mathrm{tr}{}^{(X)}\not{\pi}_1\tag{10.148}$$

这里 ${}^{(X)}\not{\pi}_1$ 的定义是 (9.140):

$${}^{(X)}\not{\pi}^C_{1,AB}=\frac{1}{2}(\not{D}_A{}^{(X)}\not{\pi}^C_B+\not{D}_B{}^{(X)}\not{\pi}^C_A-\not{D}^{C(X)}\not{\pi}_{AB})$$

我们得到

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_j)}q_j=&\frac{1}{4}\mathrm{tr}{}^{(R_j)}\not{\pi}\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)+(\check{\not{D}}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1})\cdot(\not{g}^{-1}\cdot{}^{(R_j)}\hat{\not{\pi}}\cdot\not{g}^{-1})\\&+{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\hat{\chi}_{j-1}\cdot\mathrm{tr}{}^{(R_{i_j})}\not{\pi}_1\end{aligned}\tag{10.149}$$

为了估计上述这些项的贡献, 我们需要一些引理, 它们的证明都是非常直接的.

引理 10.9 设 h 是 $S_{t,u}$ 上任意一个光滑函数, ϑ 是 $S_{t,u}$ 上任意一个二阶对称协变张量场. 则对于非负整数 k, 有如下公式成立:

$$\begin{aligned}{}^{(i_1\cdots i_k)}c_k:=&\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\not{D}^2h-\not{D}^2(R_{i_k}\cdots R_{i_1}h)\\=&-\sum_{m=0}^{k-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k-m+1}}}({}^{(R_{i_{k-m}})}\not{\pi}_1\cdot\not{d}(R_{i_{k-m-1}}\cdots R_{i_1}h))\end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\breve{\not{D}}\vartheta-\breve{\not{D}}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\vartheta\\
&=-\sum_{m=0}^{k-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k-m+1}}}({}^{(R_{i_{k-m}})}\not{\pi}_1\cdot\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k-m-1}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\vartheta)
\end{aligned}
$$

下述假设可以视为 **H2** 的变体, 它们将用在上述引理的证明中.

H2′: 存在一个常数 C (不依赖于 s) 使得对 $S_{t,u}$ 上的任意一个二阶对称协变张量场 ϑ, 我们有

$$
|\not{D}\vartheta|^2\leqslant C(1+t)^{-2}\Big(\sum_j|\not{\mathcal{L}}_{R_j}\vartheta|^2+|\vartheta|^2\Big)
$$

引理 10.10 设 **H0**, **H1**, **H2′** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l+1]}$, $\not{\mathbf{E}}^Q_{[l]}$ 和 $\mathbf{X}_{[l]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$
\max_{j;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}{}^{(R_j)}\not{\pi}_1\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))
$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

引理 10.11 设 **H0**, **H1**, **H2′** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+1]}$, $\not{\mathbf{E}}^Q_{[l_*]}$ 和 $\mathbf{X}_{[l_*]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$
\max_{j;i_1\cdots i_k}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}{}^{(R_j)}\not{\pi}_1\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})
$$

对 $k=0,\cdots,l-1$ 成立.

运用这些估计, 不难得到 (10.143) 中第二项的 L^2 估计:

$$
\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}\Big\|\sum_{k=0}^{l-1}\Big(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_l})}\not{\pi}\Big)\cdots\Big(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{(R_{i_{l-k+1}})}\not{\pi}\Big)^{(i_1\cdots i_{l-k})}q_{l-k}\Big\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned}
\tag{10.150}
$$

联合上述估计与 (10.145) 和 (10.142), 我们得到

命题 10.3 在引理 10.14 的假设下, 我们有

$$
\max_{i_1\cdots i_l}\|{}^{(i_1\cdots i_l)}i_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})
$$

前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l).

我们转向 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l$:

$$
{}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} g_0 - {}^{(i_1\cdots i_l)}w_l + \sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y_{l-k} \tag{10.151}
$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_j)}y_j$ 由命题 8.3 给出, 而 ${}^{(i_1\cdots i_l)}w_l$ 为

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}w_l \\
&= \sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z}{}^{(i_1\cdots i_{l-k-1})}x_{l-k-1} - \sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z}{}^{(i_1\overset{>i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}x_{l-1}
\end{aligned} \tag{10.152}
$$

我们现在引入关于 μ 的球面导数的连续性假设. 给定正整数 l, 我们记 $\not{\mathbf{M}}_l$ 为如下连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的常数 C 使得对 $t\in[0,s]$, 我们有

$$
\not{\mathbf{M}}_l:\ \max_{i_1\cdots i_l}\|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mu\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))
$$

同样记 $\not{\mathbf{M}}_0$ 为如下连续性假设:

$$
\not{\mathbf{M}}_0:\ |\mu-1|\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))
$$

然后我们记 $\not{\mathbf{M}}_{[l]}$ 为如下连续性假设:

$$
\not{\mathbf{M}}_{[l]}:\ \not{\mathbf{M}}_0\quad \text{且}\cdots\cdots\text{且}\quad \not{\mathbf{M}}_l
$$

我们同样引入如下量:

$$
\mathcal{B}_0 = \|\mu-1\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}
$$

以及对 $k\neq 0$,

$$
\mathcal{B}_k = \max_{i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\mu\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\quad \text{且}\quad \mathcal{B}_{[l]}=\sum_{k=0}^{l}\mathcal{B}_k
$$

则由 (8.27) 和 (8.29), 我们得到

引理 10.12　设 **H0** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}^T_{[l_*+1]}, \not{\mathbf{E}}^Q_{[l_*+1]}, \not{\mathbf{E}}_{[l_*+2]}$ 以及 $\not{\mathbf{X}}_{[l_*]}$ 和 $\not{\mathbf{M}}_{[l_*]}$ 对某个正整数 l 成立. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}\|\not{d}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\check{g}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(\mathcal{W}^T_{[l+1]}+\mathcal{W}^Q_{[l+1]}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+2]}\\
&\quad +\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[l+1]})
\end{aligned}
$$

成立, 前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l). 增长因子 $1+\log(1+t)$ 是从 μ 和一个正则项的乘积来的.

这里连续性假设 $\not{E}_{[l]}^T$ 按如下定义:

$$\not{E}_{[l]}^T : \not{E}_0^T \quad 且 \cdots\cdots 且 \quad \not{E}_l^T$$

其中 $\not{E}_l^T$ 是如下假设:

$$\not{E}_l^T : \max_{i_1 \cdots i_l} \max_{\alpha} \|R_{i_l} \cdots R_{i_1} T\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

现在我们回到关于 $S_{t,u}$ 1- 形式 g_0 的方程 (8.37) 以便估计剩下的项. 由方程

$$L\mu = m + \mu e$$

和 (8.27), 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1 \cdots i_l} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\mathrm{tr}\chi \not{d}(\check{f} + 2L\mu))\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-3}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l+1]}^Q + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \\
&+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]})
\end{aligned} \tag{10.153}$$

在引理 10.12 的假设下成立 (不算 $\not{E}_{[l_*+1]}^T$), 这是因为 m 和 $\check{f}$ 中有一些项可以相互抵消. 同样因为这个, $\mathcal{A}_{[l]}$ 系数的衰减是 $(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))$.

接下来我们考虑 (8.37), 由 (8.38), 它可以写为

$$(\not{d}\mu)(\mu^{-1}(L\mu)\mathrm{tr}\chi - \mathrm{tr}\alpha)$$

则在引理 10.12 的假设下 (不算 $\not{E}_{[l_*+1]}^T$), 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1 \cdots i_l} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} ((\not{d}\mu)(\mu^{-1}(L\mu)\mathrm{tr}\chi - \mathrm{tr}\alpha))\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-3}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l+1]}^Q + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+2]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \\
&+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]})
\end{aligned} \tag{10.154}$$

这个估计的具体推导可以见第十二章.

综合上述结果, 我们有

引理 10.13 设 **H0**, **H1**, **H2′** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{E}_{[l_*+2]}$, $\not{E}_{[l_*+1]}^Q$ 和 $\not{X}_{[l_*]}$, $\not{M}_{[l_*+1]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们

有

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}g_0\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ &C_l(1+t)^{-3}\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{[l+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l+2]})+\delta_0\mathcal{W}^T_{[l+1]}\\
&+\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]})
\end{aligned}$$

现在考虑 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l$ 的公式 (10.151) 中的第三项:

$$\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y_{l-k}\tag{10.155}$$

其中 $S_{t,u}$ 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_j)}y_j,\ j=1,\cdots,l$ 由命题 8.3 给出:

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_j)}y_j=&(R_{i_j}\mu){}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}\\
&+(\mu R_{i_j}(\mathrm{tr}\chi-e)-R_{i_j}m+{}^{(R_{i_j})}Z\mu-eR_{i_j}\mu)\cdot\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\\
&+\frac{1}{2}(R_{i_j}\mathrm{tr}\chi)\not{d}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}\check{f}_{j-1}
\end{aligned}\tag{10.156}$$

$S_{t,u}$ 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 由 (8.78) 给出:

$${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}=\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}f_0)+{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}\tag{10.157}$$

其中

$$f_0=L\mathrm{tr}\chi+|\chi|^2$$

我们在推导 (10.153) 的时候已经处理过了, 并且

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}=&\sum_{m=0}^{j-2}\not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_{j-m}}{}^{(R_{i_{j-m-1}})}ZR_{i_{j-m-2}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)\\
&+\sum_{m=1}^{j-1}\sum_{k_1<\cdots<k_m=1}^{j-1}(R_{i_{k_m}}\cdots R_{i_{k_1}}\mathrm{tr}\chi)(\not{d}R_{i_{j-1}}\overset{>i_{k_m}\cdots i_{k_1}<}{\cdots}R_{i_1}\mathrm{tr}\chi)
\end{aligned}\tag{10.158}$$

对 $j\geqslant 2$ 成立; 而 $b_0=0$.

为了估计求和式 (10.154) 的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数, 我们必须估计

$$\max_{i_1\cdots i_{j+k}}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+1}}}{}^{(i_1\cdots i_j)}y_j\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})},\quad j+k=l\tag{10.159}$$

从而我们需要估计

$$\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})},\quad j+k\leqslant l \tag{10.160}$$

以及

$$\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})},\quad j+k\leqslant l_* \tag{10.161}$$

由于在推导 (10.153) 时我们已经处理 (10.156) 右端的第一项, 所以我们只需要估计

$$\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})},\quad j+k\leqslant l \tag{10.162}$$

以及

$$\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})},\quad j+k\leqslant l_* \tag{10.163}$$

这些量的界如下:

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ & C_l\delta_0^2(1+t)^{-5}(1+\log(1+t))^2\end{aligned} \tag{10.164}$$

对 $j+k\leqslant l_*$ 成立, 以及

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}b_{j-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))\\ &\cdot((1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{Y}_0+\mathcal{W}_{[l]})\end{aligned} \tag{10.165}$$

对 $j+k\leqslant l$ 在命题 10.1 的假设下 (l_*+1 取代 l) 成立.

上述估计和 f_0 的估计共同意味着

引理 10.14 设 **H0**, **H1**, **H2**$'$ 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E}_{[l_*+2]}$, $\mathbf{E}^Q_{[l_*+1]}$ 和 $\mathbf{X}_{[l_*]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), $S_{t,u}$ 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}$ 满足如下估计:

$$\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}}{}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-4}$$

对 $j+k \leqslant l_*$ 成立, 以及

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_{j-1+k}} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j-1+k}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_j}} {}^{(i_1\cdots i_{j-1})}a_{j-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l(1+t)^{-3}(\mathcal{W}_{[l+2]} + \delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}^Q_{[l+1]} + \mathcal{W}^Q_{[l]} \\
&\quad +\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]}))
\end{aligned}$$

对 $j+k \leqslant l$ 成立.

由引理 10.14 和连续性假设 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+k}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+1}}} ((R_{i_j}\mu)^{(i_1\cdots i_{j-1})} a_{j-1})\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \\
&\quad \cdot(\mathcal{W}_{[l+2]} + \delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}^Q_{[l+1]} + \mathcal{W}^Q_{[l]} \\
&\quad +\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) + C_l\delta_0(1+t)^{-4}\mathcal{B}_{[l]}
\end{aligned} \tag{10.166}$$

对 $j+k=l$ 成立.

我们接下来考虑 (10.156) 右端的第二项. 我们有如下估计:

$$\begin{aligned}
&\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+k}}} ((\mu R_{i_j}(\mathrm{tr}\chi - e) - R_{i_j}m + {}^{(R_{i_j})}Z\mu - eR_{i_j}\mu) \\
&\cdot \not{d}(R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi))\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}((1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \mathcal{W}^T_{[l]} + \mathcal{Y}_0 + \mathcal{W}_{[l]} \\
&\quad +(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned}$$

同样我们需要用到连续性假设 $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$.

考虑 (10.156) 右端的最后一项. 回忆

$$\check{f} = \mu f = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\tau_{\underline{L}} \tag{10.167}$$

则由 (8.24) 以及 $\mathbf{M}_{[l_*]}$, 我们得到

$$\max_{i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\check{f}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}, \quad k \leqslant l_* \tag{10.168}$$

和

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_k} \|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\check{f}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l(\mathcal{W}^T_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l]} + (1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l]}) \\
&\quad +(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{[l]})
\end{aligned} \tag{10.169}$$

对 $k \leqslant l$ 成立.

所以由连续性假设 $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+k}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{j+1}}}((R_{i_j}\mathrm{tr}\chi)(\not{d}R_{i_{j-1}}\cdots R_{i_1}\check{f}))\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-3}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l]}\\
&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{[l]}^T+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]}^Q+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[l]})) \quad (10.170)
\end{aligned}
$$

对 $j+k=l$ 成立.

综合上述结果我们得到了如下引理:

引理 10.15 设 **H0**, **H1**, **H2$'$** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+2]}$, $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+1]}^Q$, $\not{\mathbf{E}}_{[l_*]}^T$, $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$ 和 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$ 对某个正整数 l 成立. 假设 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}\|\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}y_{l-k}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-3}((1+\log(1+t))\times(\mathcal{W}_{[l+2]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l+1]}^Q\\
&+\mathcal{W}_{[l]}^T+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]}^Q)+\mathcal{W}_{[l]}\\
&+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l]})
\end{aligned}
$$

为了估计 $S_{t,u}$ 上由 (10.151) 给出的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l$, 我们仍需考虑由 (10.152) 定义的 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ${}^{(i_1\cdots i_l)}w_l$. 用相类似的方法处理, 我们得到

引理 10.16 设 **H0** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+2]}$, $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+1]}^Q$, $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+1]}^T$, $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$ 和 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}\|{}^{(i_1\cdots i_l)}w_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-3}\cdot(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]}+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]}^T\\
&+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2(\mathcal{W}_{[l]}^Q+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l]}))
\end{aligned}
$$

将引理 10.13, 10.15 和 10.16 综合起来, 我们得到如下命题:

命题 10.4 设 **H0**, **H1**, **H2$'$** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+2]}$, $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+1]}^Q$ 和 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*+1]}^T$ 以及 $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$ 和 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足

够小 (依赖于 l), 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_l}\|^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-3}\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q+\delta_0(\mathcal{W}_{[l+1]}^T+\mathcal{W}_{[l+2]}))\\ &+\delta_0(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]}))\end{aligned}$$

接下来考虑

$$2\mu\not{D}\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l+\mu\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{h}_l \tag{10.171}$$

用相同的方法处理, 我们有

引理 10.17 设 **H0** 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E}_{[l_*+1]}$, $\mathbf{E}_{[l_*]}^Q$ 和 $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$ 对某个正整数 l 成立. 于是我们有

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_l}\|\mu\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{h}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})\end{aligned}$$

前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l).

最后 (10.171) 中的第一项可以如下估计:

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_l}\|\mu\not{D}\hat{\chi}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\hat{\chi}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{[l]})\end{aligned} \tag{10.172}$$

命题 10.4 与引理 10.17 和 (10.170) 给出了 $\|^{(i_1\cdots i_l)}\ddot{g}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的界. 为了估计 ${}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l(t)$, 我们仍需估计 $\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 和 $\|^{(i_1\cdots i_l)}z_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$. 由 (10.168), 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{i_1\cdots i_l}\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]}^T+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]}+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]})\\ &+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]}^Q)\end{aligned} \tag{10.173}$$

非负函数 ${}^{(i_1\cdots i_l)}z_l$ 由 (8.392) 给出. 用相同的方法处理, 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}\|{}^{(i_1\cdots i_l)}z_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\
&\cdot(\mathcal{W}^T_{[l+1]}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{[l+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l+2]})\\
&+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[l+1]})
\end{aligned}\tag{10.174}$$

现在我们可以写下 ${}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l$ 的估计:

命题 10.5 设 **H0**, **H1**, **H2**$'$ 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E}_{[l_*+2]}$, $\mathbf{E}^Q_{[l_*+1]}$ 和 $\mathbf{E}^T_{[l_*+1]}$ 以及 $\mathbf{X}_{[(l+1)_*]}$ 和 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$ 对某个正整数 l 成立. 则我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l}{}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l\\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-4}\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{[l+1]}+\delta_0(\mathcal{W}^T_{[l+1]}+\mathcal{W}_{[l+2]}))\\
&+\delta_0(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]}))
\end{aligned}$$

前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l).

10.3.2 P_l 的估计

我们现在考虑 ${}^{(i_1\cdots i_l)}B_l$ 的表达式 (8.403) 中的主部, 即

$$C(1+t)^{-2}({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(0)}_{l,a}(t)+(1+t)^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(1)}_{l,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)$$

这里, ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(0)}_{l,a}$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}^{(1)}_{l,a}$ 由 (8.348) 和 (8.349) 所定义. 回忆

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t)=(1+t)^2\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\tag{10.175}$$

我们需要一个关于 $\|\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的更准确的估计.

由 (8.333) 和 **H0**, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l\leqslant C\sum_j\|R_j{}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}=C\sum_j\|R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\check{f}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\tag{10.176}$$

这里需要回忆第八章中 $\check{f}$ 的定义:

$$\check{f}=\mu f=-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\tau_{\underline{L}}\tag{10.177}$$

我们可以用声学度量的定义和 (8.24) 将上式写为

$$\check{f} = -2m - \frac{1}{2}\alpha^{-1}\kappa\frac{dH}{dh}Lh := -2m - \mu\bar{e} \tag{10.178}$$

这里我们用到了如下事实:

$$\alpha = \eta, \quad \partial_t - \psi_i\partial_i = B = L + \alpha\kappa^{-1}T$$

我们有

$$m = m_T^\alpha(T\psi_\alpha) \tag{10.179}$$

其中

$$m_T^0 = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}, \quad m_T^i = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\psi_i \tag{10.180}$$

以及

$$\bar{e} = \bar{e}_L^\alpha(L\psi_\alpha) \tag{10.181}$$

其中

$$\bar{e}_L^0 = \frac{1}{2}\alpha^{-2}\frac{dH}{dh}, \quad \bar{e}_L^i = -\frac{1}{2}\alpha^{-2}\frac{dH}{dh}\psi_i \tag{10.182}$$

则

$$\begin{aligned} & R_j R_{i_l}\cdots R_{i_1}\check{f} \\ = & -2m_T^\alpha(R_j R_{i_l}\cdots R_{i_1}T\psi_\alpha) - \mu\bar{e}_L^\alpha(R_j R_{i_l}\cdots R_{i_1}L\psi_\alpha) + {}^{(i_1\cdots i_l j)}n_{l+1} \end{aligned} \tag{10.183}$$

这里, ${}^{(i_1\cdots i_l j)}n_{l+1}$ 是低阶项:

$$\begin{aligned} {}^{(i_1\cdots i_l j)}n_{l+1} = & -\sum_{|s_1|\geqslant 1}((R)^{s_1}\mu)((R)^{s_2}\bar{e}) \\ & -2\sum_{|s_1|\geqslant 1}((R)^{s_1}m_T^\alpha)((R)^{s_2}T\psi_\alpha) \\ & -\sum_{|s_1|\geqslant 1}\mu((R)^{s_1}\bar{e}_L^\alpha)((R)^{s_2}L\psi_\alpha) \end{aligned} \tag{10.184}$$

我们有

$$|m_T^0 - \frac{1}{2}\ell| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad |m_T^i| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{10.185}$$

以及

$$|\bar{e}_L^0| \sim |\ell| \tag{10.186}$$

由 (10.181)—(10.183) 和 (10.185)—(10.186), 我们有

$$\begin{aligned}
&\|R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1} \check{f}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant (|\ell| + C\delta_0(1+t)^{-1}) \sum_\alpha \|R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1} T\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\quad + C\sum_\alpha \|\mu R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1} L\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} + \|^{(i_1\cdots i_l j)} n_{l+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}
\end{aligned} \tag{10.187}$$

其中常数 C 是不依赖于 l 的. 在命题 10.5 的假设下我们可以推出

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_l j} \|^{(i_1\cdots i_l j)} n_{l+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1} (\mathcal{W}_{[l]}^T + (1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]}^Q + \mathcal{W}_{[l+1]} + (1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]})
\end{aligned} \tag{10.188}$$

接下来我们需要如下引理, 其证明与引理 8.2 类似.

引理 10.18 设 Y 是定义在时空区域 $W_{\epsilon_0}^*$ 中的任意一个与 $S_{t,u}$ 相切的向量场, 则我们有

$$[T, Y] = {}^{(Y)}\Theta$$

其中 ${}^{(Y)}\Theta$ 是 $S_{t,u}$ 上与 Y 相关的切向量场, 对任意向量 $V \in TW_{\epsilon_0}^*$ 满足如下条件:

$$g({}^{(Y)}\Theta, V) = {}^{(Y)}\pi(T, \Pi V)$$

在标架 (L, T, X_1, X_2) 下有

$${}^{(Y)}\Theta = {}^{(Y)}\Theta^A X_A, \quad {}^{(Y)}\Theta^A = {}^{(Y)}\pi_{TB}(\not{g}^{-1})^{AB}$$

在直角坐标中, 我们有

$$[T, R_i] = (T(R_i)^j - R_i T^j)\partial_j \tag{10.189}$$

由于 $T = \kappa\hat{T}$, 我们有

$$R_i T^j = (R_i\kappa)\hat{T}^j + \kappa R_i \hat{T}^j$$

再由 (10.8), 我们有

$$R_i T^j = (R_i\kappa)\hat{T}^j + \kappa \not{\chi}_i \cdot \not{d} x^j \tag{10.190}$$

将这个投影到 $S_{t,u}$:

$$\Pi(R_i\hat{T}^j\partial_j) = \kappa\not{d}_i \tag{10.191}$$

另一方面由 (10.21), (10.23),

$$(R_i)^j = \epsilon_{imj}x^m - \lambda_i\hat{T}^j$$

所以

$$T(R_i)^j = \epsilon_{imj}T^m - (T\lambda_i)\hat{T}^j - \lambda_i T(\hat{T}^j) \tag{10.192}$$

由 (3.191) 有

$$T(\hat{T}^j) = q_T^j \tag{10.193}$$

这里 q_T 是 $S_{t,u}$ 上的向量场, 它由

$$q_T = (q_T)_b \cdot \not{g}^{-1} \tag{10.194}$$

给出, 其中

$$(q_T)_b = -\not{d}\kappa \tag{10.195}$$

将 (10.193) 代入 (10.192), 我们得到

$$T(R_i)^j\partial_j = \kappa v_i - (T\lambda_i)\hat{T} - \lambda_i q_T \tag{10.196}$$

其中 v_i 由 (10.47) 定义. 投影到 $S_{t,u}$:

$$\Pi(T(R_i)^j\partial_j) = \kappa\Pi v_i - \lambda_i q_T \tag{10.197}$$

我们得到

$$[T, R_i] = \kappa\Pi v_i - \lambda_i q_T - \kappa\not{d}_i \tag{10.198}$$

定义向量场 v_i' 如 (10.50), 则方程 (10.52) 成立, 所以

$$\Pi v_i = w_i - (1-u+t)^{-1}R_i \tag{10.199}$$

从而由 (10.43) 和 (10.14), 我们得到

$$[T, R_i] = -\kappa \tilde{\not{d}}' - \lambda_i q_T \tag{10.200}$$

所以我们证明了如下引理:

引理 10.19 我们有

$$[T, R_i] = {}^{(R_i)}\Theta = -\kappa \tilde{\not{d}}' - \lambda_i q_T$$

现在在命题 10.1 的假设下 (用 $l_* + 1$ 代替 l), 同时假设 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$, 我们由 (10.194) 和 (10.195) 得到

$$\max_{i_1 \cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} q_T\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{10.201}$$

对 $k \leqslant l_*$ 成立, 同样由推论 10.2.d (将 l 换成 $l+1$), 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{i_1 \cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} q_T\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\ &\leqslant C_l((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]}))\end{aligned} \tag{10.202}$$

由 (10.101) 和 (10.41)—(10.42), 以及命题 10.1 (用 $l_* + 1$ 代替 l), 我们有

$$\max_{i; i_1 \cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \tilde{\not{d}}_i'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{10.203}$$

对 $k \leqslant l_*$ 成立, 再由 (10.120) 和 (10.123) (用 $l+1$ 代替 l) 有

$$\begin{aligned}&\max_{i; i_1 \cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \tilde{\not{d}}_i'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\ &\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \mathcal{W}_{[l+1]})\end{aligned} \tag{10.204}$$

对 $k \leqslant l$ 成立.

上述估计与推论 10.1.a (用 l_* 代替 l) 以及推论 10.2.a 共同得出如下引理:

引理 10.20 在命题 10.1 的假设下 (用 $l_* + 1$ 代替 l) 以及 $\mathbf{M}_{[l_*+1]}$, 我们有

$$\max_{i; i_1 \cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)}\Theta\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2$$

对 $k \leqslant l_*$ 成立, 以及

$$\begin{aligned}&\max_{i; i_1 \cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)}\Theta\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\ &\leqslant C_l(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]} + \mathcal{W}_{[l+1]})\end{aligned}$$

对 $k \leqslant l$ 成立, 前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l).

现在考虑交换子

$$TR_{i_l} \cdots R_{i_1} - R_{i_l} \cdots R_{i_1} T = {}^{(i_1 \cdots i_l)}A_l^T \tag{10.205}$$

由引理 10.19,

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}A_l^T = R_{i_l}{}^{(i_1 \cdots i_{l-1})}A_{l-1}^T + {}^{(R_{i_l})}\Theta R_{i_{l-1}} \cdots R_{i_1} \tag{10.206}$$

再由命题 8.2,

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}A_l^T = \sum_{k=0}^{l-1} R_{i_l} \cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(R_{i_{l-k}})}\Theta R_{i_{l-k-1}} \cdots R_{i_1} \tag{10.207}$$

所以我们有

$$\begin{aligned} R_{i_{l+1}} R_{i_l} \cdots R_{i_1} T \psi_\alpha = {} & T R_{i_{l+1}} R_{i_l} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha \\ & - \sum_{k=0}^{l} R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_{l-k+2}}{}^{(R_{i_{l-k+1}})}\Theta R_{i_{l-k}} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha \end{aligned} \tag{10.208}$$

我们将运用如下引理, 其证明与引理 8.5 类似.

引理 10.21 对任意与 $S_{t,u}$ 相切的向量场 X, 任意函数 ϕ 和正整数 l, 我们有

$$[X, R_{i_l} \cdots R_{i_1}]\phi = -\sum_{j=1}^{l} \sum_{k_1 < \cdots < k_j = 1}^{l} {}^{(i_{k_1} \cdots i_{k_j})}Y R_{i_l} \overset{> i_{k_j} \cdots i_{k_1} <}{\cdots} R_{i_1} \phi$$

其中 ${}^{(i_{k_1} \cdots i_{k_j})}Y$ 是 $S_{t,u}$ 上的切向量场

$${}^{(i_{k_1} \cdots i_{k_j})}Y = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k_j}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{k_1}}} X$$

考虑 (10.207) 右端求和式中与 $k \in \{0, \cdots, l\}$ 对应的任意一项. 设

$$X = {}^{(R_{i_{l-k+1}})}\Theta, \quad \phi = R_{i_{l-k}} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha \tag{10.209}$$

运用引理 10.21, 我们将这一项写成

$$R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_{l-k+2}} X \phi = X \cdot \not{d}(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_{l-k+2}} \phi) + \sum_{|s_1|>0} (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1} X \cdot \not{d}(R)^{s_2} \phi \tag{10.210}$$

由引理 10.20, (10.209) 右端的第一项的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}_{[l+1]} \tag{10.211}$$

界定. (10.210) 中求和式中的任意一项是 X 的 $|s_1|$ 阶球面导数与 ψ_α 的 $|s_2|+l-k+1$ 阶球面导数的乘积, 并且 $|s_1|+|s_2|=k$. 所以 (10.210) 中的求和式包含 X 的最多 $k\leqslant l$ 阶球面导数和 ψ_α 的最多 l 阶球面导数 (注意到 $|s_1|\geqslant 1$).

我们需要考虑如下两种情形:

情形 1: $|s_1|\leqslant l_*$ 和情形 2: $|s_1|\geqslant l_*+1$.

在情形 1, 我们用引理 10.20 的第一部分估计第一个因子的 L^∞ 范数, 从而得到 L^2 估计

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}_{[l]} \tag{10.212}$$

在情形 2, 我们有 $|s_2|\leqslant k-l_*-1$, 所以

$$|s_2|+l-k+1\leqslant l-l_*\leqslant l_*+1$$

而连续性假设 $\mathbf{E}_{[l_*+1]}$ 让我们可以估计第二个因子的 L^∞ 范数. 同样运用引理 10.20 的第一部分估计第一个因子的 L^2 范数, 我们得到一个 L^2 估计

$$C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]}+\mathcal{W}_{[l+1]}) \tag{10.213}$$

将 (10.211)—(10.213) 组合起来, 我们得到

$$\begin{aligned}&\|\sum_{k=0}^{l}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_{l-k+2}}{}^{(R_{i_{l-k+1}})}\Theta R_{i_{l-k}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[l+1]}\\&\quad+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]})\end{aligned} \tag{10.214}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

我们有一个与 (10.208) 类似的交换子公式, 其中 ${}^{(R_i)}Z$ 取代 ${}^{(R_i)}\Theta$, L 取代 T, 即:

$$\begin{aligned}R_{i_{l+1}}R_{i_l}\cdots R_{i_1}L\psi_\alpha=&LR_{i_{l+1}}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\\&-\sum_{k=0}^{l}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_{l-k+2}}{}^{(R_{i_{l-k+1}})}ZR_{i_{l-k}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\end{aligned} \tag{10.215}$$

由推论 10.1.i (l_*+1 代替 l) 以及推论 10.2.i ($l+1$ 代替 l) 取代引理 10.20, 我们推出

$$\begin{aligned}
&\|\mu\sum_{k=0}^{l}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_{l-k+2}}{}^{(R_{i_{l-k+1}})}ZR_{i_{l-k}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned} \tag{10.216}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 成立.

回忆第五章, 对于变分 ψ, 我们有

$$\begin{aligned}
\|T\psi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}&\leqslant C\sqrt{\mathcal{E}_0[\psi]}\\
\|\sqrt{\mu}(L\psi+\nu\psi)\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}&\leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\mathcal{E}_1'[\psi]}
\end{aligned} \tag{10.217}$$

而

$$\|\mu\nu R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]} \tag{10.218}$$

所以除去交换子的估计, 我们知道 (10.187) 右端的第一项有如下估计:

$$(|\ell|+C\delta_0(1+t)^{-1})\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]} \tag{10.219}$$

而 (10.187) 右端的第二项有如下估计:

$$\begin{aligned}
&C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\\
&\cdot\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]}+C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]}
\end{aligned} \tag{10.220}$$

事实上, 考虑到交换子估计 (10.214) 和 (10.216), 我们有如下命题:

命题 10.6 在命题 10.5 的假设下, 我们有

$$^{(i_1\cdots i_l)}P_l\leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}+{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}$$

其中

$$^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}=|\ell|\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]}$$

以及

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}\\
&= C\delta_0(1+t)^{-1}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]}\\
&\quad +C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]}\\
&\quad +C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l+1]}+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l]}^T+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{[l]}^Q\\
&\quad +(1+t)^{-1}((1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})+\mathcal{B}_{[l+1]}))
\end{aligned}
$$

第十一章　x^i 的一阶导数的空间导数的控制. 关于 μ 的假设和估计

11.1　$T\hat{T}^i$ 的估计

11.1.1　基本引理

这一章的第一部分是估计 $\hat{T}x^i = \hat{T}^i$ 的空间导数, 其中至少有一阶是关于 T 的. 这里空间导数是指关于 T 和旋转向量场 $R_j : j = 1, 2, 3$ 的导数. 再结合第十章的结论我们就得到了 x^i 关于所有交换向量场的一阶导数的空间导数的估计. 这一章估计的推导都是建立在与 μ 有关的连续性假设以及第十章中关于 χ 的连续性假设的基础上. 这些结果将用来估计交换向量场形变张量的空间导数.

我们首先定义一些范数. 接下来 ξ 是定义在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 中的任意一个 $S_{t,u}$ 上的张量场. 我们首先只定义关于球面导数的 L^∞ 和 L^2 范数. 对于非负整数 l, 我们定义

$$\|\xi\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \max_{0\leqslant n\leqslant l} \max_{i_1\cdots i_n} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \xi\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.1}$$

$$\|\xi\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \sum_{n=0}^{l} \max_{i_1\cdots i_n} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \xi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.2}$$

然后定义关于所有空间导数的 L^∞ 和 L^2 范数.

对于满足 $k \leqslant l$ 的非负整数 k, l, 我们定义

$$\|\xi\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \max_{0\leqslant m\leqslant k} \|(\not{\mathcal{L}}_T)^m \xi\|_{\infty,[l-m],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.3}$$

$$\|\xi\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \sum_{m=0}^{k} \|(\not{\mathcal{L}}_T)^m \xi\|_{2,[l-m],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.4}$$

同样, 我们记

$$\|\xi\|_{\infty,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \|\xi\|_{\infty,[l,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \quad \|\xi\|_{2,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \|\xi\|_{2,[l,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.5}$$

由上述定义, $\|\xi\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 是

$$\max_{i_1\cdots i_n} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_T)^m \xi\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.6}$$

上式为在

$$\{(m,n) : 0 \leqslant n \leqslant l-m, 0 \leqslant m \leqslant k\} \tag{11.7}$$

取最大. 对 $\|\xi\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 也是类似的.

同样 $\|\xi\|_{\infty,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 是 (11.6) 关于

$$\{(m,n) : m,n \geqslant 0, m+n \leqslant l\} \tag{11.8}$$

取最大. 相类似地, 我们有 $\|\xi\|_{2,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}}$.

我们引入一些连续性假设. 接下来 C 是一个不依赖于 s 的常数, 对 $t \in [0,s]$ 我们有

$$\mathbf{E}_{m,n} : \max_{\alpha;i_1\cdots i_n} \|R_{i_n} \cdots R_{i_1} (T)^m \psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0 (1+t)^{-1}$$

特别地,

$$\mathbf{E}_{0,0} : \max_{\alpha} \|\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0 (1+t)^{-1}$$

我们记 $\mathbf{E}_{\{l\}}$ 是满足 (11.8) 的 $\mathbf{E}_{m,n}$ 的组合. 常数 C 只依赖于 l. 注意到 $\mathbf{E}_{0,n}$ 与 $\not{\mathbf{E}}_n$ 相同, 并且 $\mathbf{E}_{\{l\}}$ 包含 $\not{\mathbf{E}}_{[l]}$.

给定不同时为 0 的非负整数 m, n, 记 $\mathcal{W}_{m,n}$ 为

$$\mathcal{W}_{m,n} = \max_{\alpha;i_1\cdots i_n} \|R_{i_n} \cdots R_{i_1} (T)^m \psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.9}$$

特别地, 我们记 $\mathcal{W}_{0,0}$ 为

$$\mathcal{W}_{0,0} = \max_{\alpha} \|\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.10}$$

然后记 $\mathcal{W}_{\{l\}}$ 为满足 (11.8) 的 $\mathcal{W}_{m,n}$ 的和. 注意到 $\mathcal{W}_{0,n}$ 与 $\mathcal{W}_n$ 相同并且 $\mathcal{W}_{\{l\}}$ 包含了 $\mathcal{W}_{[l]}$. 我们有

$$\max_{\alpha} \|\psi_\alpha\|_{2,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant \mathcal{W}_{\{l\}} \tag{11.11}$$

下述引理将引理 10.1 推广到了所有的空间导数, 可以通过直接计算证明.

引理 11.1 设 G 是定义在 $(0,0,0,0)$ 的邻域中关于 $(\psi_\alpha,\ \alpha=0,1,2,3)$ 的光滑函数, 设 G_0 是常数:

$$G_0 = G(0,0,0,0)$$

设连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*\}}$ 对某个正整数 l 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\|G - G_0\|_{2,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\mathcal{W}_{\{l\}}$$

C 是不依赖于 l 的常数.

对于范数 (11.3) 和 (11.4) 我们有如下引理, 它将在后面被反复用到.

引理 11.2 **a**. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ 是定义在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 中的 $S_{t,u}$ 上的张量场, 记

$$\xi_1 \cdots \xi_N$$

为任意带有缩并的张量积. 同样设 k, l 是非负整数满足 $k \leqslant l$. 则我们有

$$\|\xi_1 \cdots \xi_N\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \sum_{i=1}^{N} \Big(\prod_{j\neq i} \|\xi_j\|_{\infty,[k,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\Big) \|\xi_i\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$

b. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ 同上, ϑ 是另一个定义在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 中的 $S_{t,u}$ 上的张量场. 设 k, l 是满足 $k \leqslant l$ 的正整数. 则我们有

$$\begin{aligned}
&\|\xi_1 \cdots \xi_N \cdot \vartheta\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&\leqslant C_l \|\vartheta\|_{\infty,[k-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \sum_{i=1}^{N} \Big(\prod_{j\neq i} \|\xi_j\|_{\infty,[k-1,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\Big) \|\xi_i\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&\quad + C_l \Big(\prod_{i=1}^{N} \|\xi_i\|_{\infty,[k-1,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\Big) \|\vartheta\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}
\end{aligned}$$

证明 直接计算可得. □

a 将被应用到 $S_{t,u}$ 上的张量场 $\xi_1, \cdots, \xi_N$, 其阶数至多是 1, 而 **b** 将被应用到当 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ 的阶数至多为 1, 而 $S_{t,u}$ 上的张量场 ϑ 的阶数为 2 时.

像第十章的命题 10.1 和命题 10.2 中 $\hat{T}^i$ 或 y^i 的球面导数那样, $\hat{T}^i$ 的空间导数 (其至少有一个是关于 T 的导数) 的估计将起关键作用. 由 (10.193), 我们有

$$T\hat{T}^i = q_T \cdot \not{d}x^i \tag{11.12}$$

其中

$$q_T = (q_T)_b \cdot \not{g}^{-1} \tag{11.13}$$

以及

$$(q_T)_b = -\not{d}\kappa \tag{11.14}$$

$\hat{T}^i$ 关于 T 的高阶导数将通过如下引理推导出来.

引理 11.3 对任意非负整数 m, 我们有

$$(T)^{m+1}\hat{T}^i = p_{T,m}\hat{T}^i + q_{T,m} \cdot \not{d}x^i + \sum_{n=0}^{m-1} r_{T,m}^n \cdot \not{d}(T)^n\hat{T}^i$$

其中 $p_{T,m}$ 是函数而 $q_{T,m}$ 是 $S_{t,u}$ 上的切向量场, 满足如下递推关系式:

$$p_{T,m} = Tp_{T,m-1} + \not{d}\kappa \cdot q_{T,m-1}$$
$$q_{T,m} = \not{\mathcal{L}}_T q_{T,m-1} + q_T p_{T,m-1}$$

其初始条件为

$$p_{T,0} = 0, \quad q_{T,0} = q_T$$

同样 $r_{T,m}^n$ 是 $S_{t,u}$ 上的切向量场, 满足如下递推关系式:

$$r_{T,m}^0 = \not{\mathcal{L}}_T r_{T,m-1}^0 + \kappa q_{T,m-1}$$
$$r_{T,m}^n = \not{\mathcal{L}}_T r_{T,m-1}^n + r_{T,m-1}^{n-1} \quad 对于 \quad n \in \{1, \cdots, m-2\}$$
$$r_{T,m}^{m-1} = r_{T,m-1}^{m-2}$$

其初始条件为

$$r^0_{T,0} = 0$$

证明 证明就是直接计算. □

现在我们研究上述引理中的递推关系式. 首先我们有一个关于矩阵

$$\begin{bmatrix} p_{T,m} \\ q_{T,m} \end{bmatrix}$$

的递推关系式. 这里我们考虑列向量

$$\begin{bmatrix} \phi \\ X \end{bmatrix}$$

其中 ϕ 是函数 X 是 $S_{t,u}$ 上的切向量场. 定义作用在这样列向量上的算子 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \not{\mathcal{L}}_T + \mathbf{B} \tag{11.15}$$

其中

$$\not{\mathcal{L}}_T \begin{bmatrix} \phi \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\phi \\ \not{\mathcal{L}}_T X \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{B}$ 是乘子算子:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \phi \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \not{d}\kappa \\ q_T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \not{d}\kappa \cdot X \\ q_T \phi \end{bmatrix} \tag{11.16}$$

用算子 $\mathbf{A}$ 表示的话, 则递推关系式有如下形式:

$$\begin{bmatrix} p_{T,m} \\ q_{T,m} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} p_{T,m-1} \\ q_{T,m-1} \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

其满足初值条件

$$\begin{bmatrix} p_{T,0} \\ q_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_T \end{bmatrix} \tag{11.18}$$

的解为

$$\begin{bmatrix} p_{T,m} \\ q_{T,m} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^m \begin{bmatrix} 0 \\ q_T \end{bmatrix} \tag{11.19}$$

转向由 $S_{t,u}$ 上张量场 $r^n_{T,m}$ 满足的二维递推关系式. 第一个递推关系式为

$$r^0_{T,m} = \not{\mathcal{L}}_T r^0_{T,m-1} + \kappa q_{T,m-1} \tag{11.20}$$

由初始条件

$$r^0_{T,0} = 0 \tag{11.21}$$

我们有

$$r^0_{T,m} = \sum_{j=0}^{m-1} (\not{\mathcal{L}}_T)^j (\kappa q_{T,m-1-j}) \tag{11.22}$$

接下来我们考虑第三个递推关系式

$$r^{m-1}_{T,m} = r^{m-2}_{T,m-1} \tag{11.23}$$

从而

$$r^{m-1}_{T,m} = r^0_{T,1} = \kappa q_T \tag{11.24}$$

最后我们考虑第二个递推关系式, 其形式如下 (设 $k = m - n$):

$$r^{m-k}_{T,m} = \not{\mathcal{L}}_T r^{m-k}_{T,m-1} + r^{m-1-k}_{T,m-1} \tag{11.25}$$

对 $k = 2, \cdots, m-1$ 成立.

给定正整数 k, 记 $\mathcal{N}_k$ 为如下正整数的集合:

$$\mathcal{N}_k = \{m \geqslant k\} \tag{11.26}$$

在 $\mathcal{N}_k$ 上我们按如下方式定义函数 x_k, 其值域 $\mathcal{X}$ 包含在 $S_{t,u}$ 上切向量场组成的空间中:

$$x_k(m) = r^{m-k}_{T,m} \tag{11.27}$$

设 $\mathbf{L}_k$ 是把 $\mathcal{X}$- 取值的、定义在 $\mathcal{N}_{k-1}$ 上的函数映到 $\mathcal{X}$- 取值的、定义在 $\mathcal{N}_k$ 上的函数的线性映射:

$$(\mathbf{L}_k f)(m) = \not{\mathcal{L}}_T(f(m-1)), \quad \forall m \in \mathcal{N}_k \tag{11.28}$$

则 (11.25) 有如下形式:

$$x_k(m) - x_k(m-1) = (\mathbf{L}_k x_{k-1})(m), \quad \forall m \in \mathcal{N}_{k+1}, k \geqslant 2 \tag{11.29}$$

设

$$y_k = \mathbf{L}_k x_{k-1} \tag{11.30}$$

我们可以将 (11.29) 写为

$$x_k(m) - x_k(m-1) = y_k(m), \quad \forall m \in \mathcal{N}_{k+1}, k \geqslant 2 \tag{11.31}$$

对 (11.31) 在 $m \in \{k+1, \cdots, j\}$ 上求和, 我们得到

$$\sum_{m=k+1}^{j} (x_k(m) - x_k(m-1)) = x_k(j) - x_k(k)$$

即

$$x_k(m) = x_k(k) + \sum_{j=k+1}^{m} y_k(j), \quad \forall m \in \mathcal{N}_k, k \geqslant 2 \tag{11.32}$$

在 (11.27) 中取 $m = k$,

$$x_k(k) = c_k = r^0_{T,k} \tag{11.33}$$

由 (11.22) 给出, 而由 (11.30) 和 (11.28), 右端求和项为

$$\sum_{j=k+1}^{m} y_k(j) = \sum_{j=k+1}^{m} (\mathbf{L}_k x_{k-1})(j) = \sum_{j=k+1}^{m} \not{\mathcal{L}}_T(x_{k-1}(j-1)) \tag{11.34}$$

定义作用在 $\mathcal{X}$- 取值、定义域为 $\mathcal{N}_k$ 的函数 f 上的算子 $\mathbf{M}_k$:

$$(\mathbf{M}_k f)(m) = \sum_{j=k}^{m-1} (\not{\mathcal{L}}_T f)(j) \tag{11.35}$$

如果用 $\mathbf{M}_k$ 和常数 c_k 表示, (11.32) 变成如下关于 k 的递推关系式, 其中 x_k 是 $\mathcal{X}$-取值的函数:

$$x_k = c_k + \mathbf{M}_k x_{k-1}, \quad k \geqslant 2 \tag{11.36}$$

这里 c_k 可以视为定义在 $\mathcal{N}_k$ 上的常数函数. 由 (11.27) 和 (11.24), 对 $k=1$ 我们有

$$x_1(m) = r_{T,m}^{m-1} = \kappa q_T, \quad \forall m \in \mathcal{N}_1 \tag{11.37}$$

所以由 (11.33), 对 $k=1$ 有

$$x_1 = c_1 \tag{11.38}$$

如果我们设 $x_0 = 0$, 则 (11.36) 对 $k=1$ 成立:

$$\begin{aligned} & x_k = c_k + \mathbf{M}_k x_{k-1}, \quad k \geqslant 1 \\ & x_0 = 0 \end{aligned} \tag{11.39}$$

对这个递推关系式应用命题 8.2, 我们有

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{M}_k \cdots \mathbf{M}_{k-i+1} c_{k-i} \tag{11.40}$$

现在由 (11.35) 有

$$(\mathbf{M}_k c)(m) = (m-k)\not{C}_T c, \quad \forall m \in \mathcal{N}_k \tag{11.41}$$

对任意正整数 l, 定义如下取值和定义域都在非负整数集合上的函数 N_l:

$$\begin{aligned} & N_0(n) = 1 \quad \text{对所有非负整数 } n \\ & N_l(n) = \sum_{m=1}^{n} N_{l-1}(m) \end{aligned} \tag{11.42}$$

特别地, 我们有

$$N_l(0) = 0 \quad \text{对所有正整数 } l \tag{11.43}$$

事实上, 容易看出

$$N_l(n) = \frac{n \cdots (n+l-1)}{l!} \quad \text{对所有非负整数 } n \text{ 和所有正整数 } l \tag{11.44}$$

对 j 做归纳可以看出对任意非负整数 j, 我们有

$$(\mathbf{M}_{k-i+j}\cdots\mathbf{M}_{k-i+1}c_{k-i})(m) = N_j(m-k+i-j)(\not{\mathcal{L}}_T)^j c_{k-i} \tag{11.45}$$

在上式中设 $j=i$, 我们得到

$$(\mathbf{M}_k\cdots\mathbf{M}_{k-i+1}c_{k-i})(m) = N_i(m-k)(\not{\mathcal{L}}_T)^i c_{k-i}, \quad \forall m\in\mathcal{N}_k \tag{11.46}$$

将这个代入 (11.40) 得到

$$x_k(m) = \sum_{i=0}^{k-1} N_i(m-k)(\not{\mathcal{L}}_T)^i c_{k-i}, \quad \forall m\in\mathcal{N}_k, \forall k\geqslant 1 \tag{11.47}$$

我们可以将上述结论收入到下面的引理中:

引理 11.4 设 $\mathbf{A}$ 为如下算子:

$$\mathbf{A} = \not{\mathcal{L}}_T + \mathbf{B} \quad \text{作用于} \quad \begin{bmatrix}\phi\\ X\end{bmatrix}$$

其中 ϕ 是一个函数, X 是一个 $S_{t,u}$ 上的切向量场, $\mathbf{B}$ 是如下乘积算子:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0 & \not{d}\kappa\\ q_T & 0\end{bmatrix}$$

函数 $p_{T,m}$ 和 $S_{t,u}$ 上的切向量场 $q_{T,m}$ 如下:

$$\begin{bmatrix}p_{T,m}\\ q_{T,m}\end{bmatrix} = \mathbf{A}^m \begin{bmatrix}p_T\\ q_T\end{bmatrix}$$

而 $S_{t,u}$ 上的切向量场 $r^n_{T,m-1}$, $n\in\{0,\cdots,m-1\}$ 由下式给出:

$$r^n_{T,m} = \sum_{i=0}^{m-1-n} N_i(n)\sum_{j=i}^{m-1-n}(\not{\mathcal{L}}_T)^j(\kappa q_{T,m-1-n-j})$$

其中 $N_i(n)$ 是非负整数:

$$N_i(n) = \begin{cases}1, & \text{若} \quad i=0\\ \dfrac{n\cdots(n+i-1)}{i!}, & \text{若} \quad i\geqslant 1\end{cases}$$

$S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $(q_T)_b$ 可以被直接估计, 而为了估计 $S_{t,u}$ 上的切向量场 q_T, 它出现在了上述公式中, 我们必须估计 $\not{g}^{-1}$ 关于 T 的导数. 现在,

$$\not{\mathcal{L}}_T\not{g}^{-1} = -\not{g}^{-1} \cdot {}^{(T)}\not{\pi} \cdot \not{g}^{-1}, \quad {}^{(T)}\not{\pi} = \not{\mathcal{L}}_T\not{g} \tag{11.48}$$

所以对 $(\not{\mathcal{L}}_T)^{m+1}\not{g}^{-1}$ 的估计就化为了对 $(\not{\mathcal{L}}_T)^{m(T)}\not{\pi}$ 的估计. 由 (3.27), 我们有

$${}^{(T)}\not{\pi} = 2\kappa\theta = -2\alpha^{-1}\kappa\chi + 2\kappa\not{k} \tag{11.49}$$

定义

$$\chi' = \chi - \frac{\not{g}}{1-u+t} \tag{11.50}$$

和

$${}^{(T)}\not{\pi}' = -2\alpha^{-1}\kappa\chi' + 2\kappa\not{k} \tag{11.51}$$

我们有

$${}^{(T)}\not{\pi} = {}^{(T)}\not{\pi}' + \lambda(1-u+t)^{-1}\not{g} \tag{11.52}$$

其中 λ 是如下函数:

$$\lambda = -2(\alpha^{-1}\kappa) \tag{11.53}$$

我们可以用一种更直接的方式估计 ${}^{(T)}\not{\pi}'$ 关于 T 的导数. 由这些 ${}^{(T)}\not{\pi}$ 关于 T 的导数, 我们将可以运用 $S_{t,u}$ 上的对称二阶协变张量场 ${}^{(m;T)}\not{\pi}$, 其定义将要用到多项式 $p_m(x)$.

对每个正整数 m, 我们定义

$$p_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{对于} \quad m=0 \\ (m+x)\cdots(1+x), & \text{对于} \quad m \geqslant 1 \end{cases} \tag{11.54}$$

归纳地, 我们可以看到

$$m!(1+x\sum_{n=0}^{m-1}\frac{p_n(x)}{(n+1)!}) = p_m(x) \tag{11.55}$$

对每个非负整数 m, 我们定义

$$ {}^{(m;T)}\not{\pi} = (\not{\mathcal{L}}_T)^{m(T)}\not{\pi} - \lambda p_m(\lambda)(1-u+t)^{-m-1}\not{g} \tag{11.56} $$

注意到

$$ {}^{(0;T)}\not{\pi} = {}^{(T)}\not{\pi}' \tag{11.57} $$

由 (11.53), 考虑到在常状态时 $\lambda = -2$, 我们定义

$$ \lambda' = \lambda + 2 \tag{11.58} $$

引理 11.5 设 l 是一个正整数, m 是一个非负整数, 其中 $m \leqslant l$. 设

$$ \max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) $$

和

$$ \|\lambda'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) $$

则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$ \max_{0\leqslant k\leqslant m} \|{}^{(k;T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) $$

证明 对 $k \in \{0,\cdots,m\}$, 我们将 $(\not{\mathcal{L}}_T)^k$ 运用到 (11.52). 由直接计算可得

$$ \begin{aligned} {}^{(k;T)}\not{\pi} = {} & (\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi}' \\ & + \sum_{k_1+k_3=k,k_3\geqslant 1} \frac{k!}{k_3!}(1-u+t)^{-k_1-1}\lambda^{(k_3-1;T)}\not{\pi} \\ & + \sum_{k_1+k_2=k,k_2\geqslant 1} \frac{k!}{k_2!}(1-u+t)^{-k_1-1}((T)^{k_2}\lambda)\not{g} \\ & + \sum_{k_1+k_2+k_3=k,k_2,k_3\geqslant 1} \frac{k!}{k_2!k_3!}(1-u+t)^{-k_1-k_3-1}((T)^{k_2}\lambda)\lambda p_{k_3-1}(\lambda)\not{g} \\ & + \sum_{k_1+k_2+k_3=k,k_2,k_3\geqslant 1} \frac{k!}{k_2!k_3!}(1-u+t)^{-k_1-1}((T)^{k_2}\lambda)^{(k_3-1;T)}\not{\pi} \end{aligned} \tag{11.59} $$

对 $n \in \{0,\cdots,l-k\}$, 我们将 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}$ 运用到 (11.59). 右端第一项被

$$ \|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.60} $$

界定. 将右端第一项的求和式分解为

$$\lambda = -2 + \lambda' \tag{11.61}$$

设

$$k' = k_3 - 1 \tag{11.62}$$

-2 那一项的贡献为

$$2\sum_{k'=0}^{k-1} \frac{k!}{(k'+1)!}(1-u+t)^{k'-k}\|^{(k';T)}\not{t}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.63}$$

而 λ' 那一项则被

$$C_l\delta_0(1+\log(1+t))\sum_{k'=0}^{k-1} \frac{k!}{(k'+1)!}(1-u+t)^{k'-k}\|^{(k';T)}\not{t}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.64}$$

界定. 最后一项被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0(1+\log(1+t))\\&\times\sum_{k'=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-k'} \frac{k!}{(j+1)!(k'+1)!}(1-u+t)^{k'-k+1+j}\|^{(k';T)}\not{t}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\end{aligned} \tag{11.65}$$

界定. 这里我们设

$$k_2 = 1 + j \tag{11.66}$$

接下来我们考虑第二项求和式

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{k!}{(j+1)!}(1-u+t)^{j-k}((T)^{j+1}\lambda')\not{g} \tag{11.67}$$

由第一个假设, 我们有

$$\|((T)^{j+1}\lambda')\not{g}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\|(T)^{j+1}\lambda'\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.68}$$

对 $k \geqslant 1$ 成立, 前提 δ_0 足够小 (依赖于 l). 则由第二个假设, 我们知道第二个求和项被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.69}$$

界定. 最后我们需要处理第三项. 我们有

$$\lambda p_{k'}(\lambda) = -2p_{k'}(-2) + q_{k'+1}(\lambda') \tag{11.70}$$

其中 $q_{k'+1}(\lambda')$ 是一个关于 λ' 的 $k'+1$ 阶多项式, 其常数项为 0. 由引理的第二个假设, 第三项中的常数项被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.71}$$

界定, 而多项式 $q_{k'+1}(\lambda')$ 的贡献则被

$$C_l\delta_0(1+\log(1+t))\sum_{k'=0}^{k-2}(\sum_{i=1}^{k'+1}(\delta_0(1+\log(1+t)))^i)(1+t)^{-2-k'} \tag{11.72}$$

界定. 简单计算可知, 这一项被

$$C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{11.73}$$

界定, 前提是 δ_0 足够小.

综合 (11.60), (11.63), (11.64), (11.65), (11.69), (11.71) 和 (11.73), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|{}^{(k;T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant &\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\sum_{k'=0}^{k-1}\|{}^{(k';T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned} \tag{11.74}$$

由于

$$\sum_{k'=0}^{k-1}\|{}^{(k';T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant \sum_{k'=0}^{k-1}\|{}^{(k';T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-1-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant \sum_{k'=0}^{k-1}\|{}^{(k';T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.75}$$

(11.74) 化为

$$x_k \leqslant c_k + a\sum_{k'=0}^{k-1}x_{k'}, \quad 对于 \quad k=0,\cdots,m \tag{11.76}$$

其中

$$
\begin{aligned}
x_k &= \|^{(k;T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
c_k &= \|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
a &= C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned} \tag{11.77}
$$

再由直接计算可得

$$
x_k \leqslant c_k + a\sum_{k'=0}^{k-1}(1+a)^{k-1-k'}c_{k'}, \quad 对于 \quad k=0,\cdots,m \tag{11.78}
$$

所以

$$
\max_{0\leqslant k\leqslant m} x_k \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m} c_k(1+a\sum_{k'=0}^{m-1}(1+a)^{m-1-k'}) = (1+a)^m \max_{0\leqslant k\leqslant m} c_k \tag{11.79}
$$

将 (11.77) 代入并注意到 $(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\leqslant 1$, 我们得到

$$
\max_{0\leqslant k\leqslant m}\|^{(k;T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\|^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)))
$$

□

引理 11.6 设 l 是一个正整数, m 是一个非负整数满足 $m\leqslant l$. 假设

$$
\begin{aligned}
\max_i\|^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
\|\lambda'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))
\end{aligned}
$$

以及

$$
\|^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
$$

则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\|^{(k;T)}\not{\pi}\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant{}& C_l\|^{(T)}\not{\pi}'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + C_l(1+t)^{-1} \\
&\cdot(\|\lambda'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \delta_0(1+\log(1+t))\max_i\|^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}})
\end{aligned}
$$

证明 我们将运用 (11.59). 证明与引理 11.6 相似. 像第十章那样, 当我们估计一个乘积的 L^2 范数时, 我们将低阶导数项用 L^∞ 范数界定, 高阶导数项用 L^2 范数界定.

□

由引理 11.5 和引理 11.6, 我们可以用 ${}^{(T)}\not{\pi}'$ 关于 T 的导数的估计来估计 ${}^{(T)}\not{\pi}$ 关于 T 的导数的 L^∞ 和 L^2 范数.

引理 11.7 在引理 11.5 的假设下, 我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(T)}\not{\pi}+2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[0,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\ &\|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi}-2(1-u+t)^{-2}\not{g}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\max_{2\leqslant k\leqslant m}\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k\,(T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\end{aligned}$$

证明 我们考虑公式 (11.56) (把 m 换成 $k\in\{0,\cdots,m\}$):

$$(\not{\mathcal{L}}_T)^{k\,(T)}\not{\pi}={}^{(k;T)}\not{\pi}+\lambda p_k(\lambda)(1-u+t)^{-k-1}\not{g}\tag{11.80}$$

我们像 (11.70) 那样表示 $\lambda p_k(\lambda)$, 把 $-2p_k(-2)$ 的贡献移到左边, 我们得到

$$\begin{aligned}{}^{(T)}\not{\pi}+2(1-u+t)^{-1}\not{g}&={}^{(0;T)}\not{\pi}+q_1(\lambda')(1-u+t)^{-1}\not{g}\\ \not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi}-2(1-u+t)^{-2}\not{g}&={}^{(1;T)}\not{\pi}+q_2(\lambda')(1-u+t)^{-2}\not{g}\\ (\not{\mathcal{L}}_T)^{k\,(T)}\not{\pi}&={}^{(k;T)}\not{\pi}+q_{k+1}(\lambda')(1-u+t)^{-k-1}\not{g}\end{aligned}\tag{11.81}$$

对 $k\geqslant 2$ 成立.

我们首先在 (11.81) 第一项的两边同时取 $\|\ \ \|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数. 由于

$$\begin{aligned}&\|q_1(\lambda')\not{g}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C\|\lambda'\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+C_l\|\lambda'\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\max_j\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l\delta_0(1+\log(1+t))\end{aligned}\tag{11.82}$$

(δ_0 足够小), 将引理 11.5 中关于 $\|{}^{(0;T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 在 $m=0$ 时的估计代入便能得到引理的第一个结论. (11.81) 中另外两种情形可以用相似的方法处理, 从而引理得证. □

引理 11.8 设引理 11.6 的假设成立, 定义

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{[0,l]} &= \|{}^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ \mathcal{T}_{[1,l]} &= \|{}^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\quad + \|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi} - 2(1-u+t)^{-2}\not{g}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\end{aligned}$$

以及对 $m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{[m,l]} &= \|{}^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\quad + \|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi} - 2(1-u+t)^{-2}\not{g}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{m} \|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k\,(T)}\not{\pi}\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\end{aligned}$$

则我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{[m,l]} &\leqslant C_l \|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\quad + C_l(1+t)^{-1}(\|\lambda'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \delta_0(1+\log(1+t))\max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}})\end{aligned}$$

证明 证明与引理 11.7 和引理 11.6 相类似. □

为了建立这一章关于 $\hat{T}^i$ 至少含有一阶 T- 导数的空间导数估计的命题, 对于给定的 $S_{t,u}$ 1- 形式 ξ, 我们需要估计如下交换子:

$$^{(i_1\cdots i_n)}c_{m,n}[\xi] = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_T)^m \not{D}\xi - \not{D}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_T)^m \xi \tag{11.83}$$

引理 11.9 交换子 $^{(i_1\cdots i_n)}c_{m,n}[\xi]$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}^{(i_1\cdots i_n)}c_{m,n}[\xi] &= \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} c_{m,0}[\xi] \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{n-j+1}}} ({}^{(R_{i_{n-j}})}\not{\pi}_1 \cdot \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{n-j-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_T)^m \xi)\end{aligned}$$

其中 $c_{m,0}[\xi]$ 由

$$c_{m,0}[\xi] = -\sum_{i=0}^{m-1} (\not{\mathcal{L}}_T)^i ({}^{(T)}\not{\pi}_1 \cdot (\not{\mathcal{L}}_T)^{m-i-1}\xi)$$

给出. 这里 ${}^{(T)}\not{\pi}_1$ 由 (9.151) 和 (9.152) 给出.

证明 运用命题 8.2 和直接计算即可证明该引理. □

我们现在要用由 (10.147) 定义的算子 $\check{\not{D}}$ 估计 ${}^{(T)}\not{\pi}_1$. 我们有

$$ {}^{(T)}\not{\pi}_1 = {}^{(T)}(\not{\pi}_1)_b \cdot \not{g}^{-1}, \quad {}^{(T)}(\not{\pi}_1)_b = \check{\not{D}}{}^{(T)}\not{\pi} \tag{11.84} $$

我们需要如下引理 10.9 的变体, 其证明可以直接得到.

引理 11.10 设 ϑ 是 $S_{t,u}$ 上任意一个对称二阶协变张量场. 则对任意非负整数 m 有如下交换公式成立:

$$ (\not{\mathcal{L}}_T)^m \check{\not{D}}\vartheta - \check{\not{D}}(\not{\mathcal{L}}_T)^m\vartheta = -\sum_{k=0}^{m-1}(\not{\mathcal{L}}_T)^k({}^{(T)}\not{\pi}_1 \cdot (\not{\mathcal{L}}_T)^{m-k-1}\vartheta) $$

我们转到如下引理:

引理 11.11 设 l 是一个正整数, m 是一个非负整数满足 $m \leqslant l-1$. 同样设 **H2$'$** 成立. 假设

$$ \begin{aligned} \|\lambda'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) \\ \|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\ \max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \end{aligned} $$

如果 $l \geqslant 2$, 则

$$ \max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) $$

从而如果 δ_0 足够小 (依赖 l), 我们有

$$ \|{}^{(T)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[m,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) $$

证明　为了证明引理, 我们只需要估计

$$ \|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k\,(T)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[l-1-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.85} $$

我们将对 k 运用数学归纳法. 由于在当前引理的假设下引理 11.7 成立, 将下式代入:

$$ \|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} $$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\|{}^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
\|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi} - 2(1-u+t)^{-2}\not{g}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
\max_{2\leqslant k\leqslant m}\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned}
\tag{11.86}
$$

我们有

$$
{}^{(T)}(\not{\pi}_1)_b = \check{\not{D}}({}^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}) \tag{11.87}
$$

则由引理 10.9 我们得到了 $k=0$ 时的结论.

然后我们由引理 11.9 得到

$$
(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}(\not{\pi}_1)_b = \check{\not{D}}(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi} + d'_k \tag{11.88}
$$

$k=1$ 时的估计也可以直接得到, 我们只需要引理 11.9 以及关于 d'_1 的估计.

对 $k\in\{2,\cdots,m\}$, 我们假设

$$
\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k'(T)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[l-1-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.89}
$$

对 $k'\leqslant k-1$ 成立.

为了得到 $k'=k$ 时的估计, 我们再次运用引理 11.9, 然后用归纳假设估计 d'_k, 则引理得证. □

为了得到 ${}^{(T)}\not{\pi}_1$ 的 L^2 估计, 我们需要如下引理:

引理 11.12 设正整数 k,l 满足 $k\leqslant l$ 并且设

$$
\begin{aligned}
\|\lambda'\|_{\infty,[k-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) \\
\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[k-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned}
$$

则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 对任意 $S_{t,u}$ 上的张量场 ξ, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\xi\cdot\not{g}\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(\|\xi\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \|\xi\|_{\infty,[k-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \mathcal{T}_{[k-2,l-2]}))
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{T}_{[k,l]}$ 由引理 11.8 定义 (其中 $\mathcal{T}_{[k-2,l-2]}$ 只出现在 $k \geqslant 2$ 的情形).

证明 在当前引理的假设下, 引理 11.7 对 $(m = k-1, l = l_* - 1)$ 成立. 则将下述量的估计代入

$$\|^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[k-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\|^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
\|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi} - 2(1-u+t)^{-2}\not{g}\|_{\infty,[l_*-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad (11.90)\\
\max_{2\leqslant i\leqslant k-1}\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{i(T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l_*-1-i],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned}$$

我们将估计

$$\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{j-1}(\xi\cdot\not{g})\|_{2,[l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \quad 对于 \quad j = 1,\cdots,k \tag{11.91}$$

$j = 1$ 的情形是简单的:

$$\|\xi\cdot\not{g}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\|\xi\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \|\xi\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\max_i\|^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}}) \tag{11.92}$$

对 $j \geqslant 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
&(\not{\mathcal{L}}_T)^{j-1}(\xi\cdot\not{g}) \\
&= \xi_{j-1}\cdot\not{g} + (j-1)((\not{\mathcal{L}}_T)^{j-2}\xi)\cdot(^{(T)}\not{\pi} + 2(1-u+t)^{-1}\not{g}) \\
&\quad + \frac{(j-1)(j-2)}{2}((\not{\mathcal{L}}_T)^{j-3}\xi)\cdot(\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi} - 2(1-u+t)^{-2}\not{g}) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{j-2}\frac{(j-1)!}{(i+1)!(j-2-i)!}((\not{\mathcal{L}}_T)^{j-2-i}\xi)\cdot((\not{\mathcal{L}}_T)^{i(T)}\not{\pi})
\end{aligned} \tag{11.93}$$

这里,

$$\begin{aligned}
\xi_{j-1} = &(\not{\mathcal{L}}_T)^{j-1}\xi - 2(j-1)(1-u+t)^{-1}(\not{\mathcal{L}}_T)^{j-2}\xi \\
&+(j-1)(j-2)(1-u+t)^{-2}(\not{\mathcal{L}}_T)^{j-3}\xi
\end{aligned} \tag{11.94}$$

只有 (11.93) 和 (11.94) 的前两项会出现在 $j = 2$ 的情形. 同样 (11.93) 的求和项只会出现在 $j \geqslant 4$ 的情形. 接下来需要做的只是直接计算. 对 $\|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 的估计可以用相同的方法得到. □

接下来我们将处理 ${}^{(T)}\not\pi_1$ 的 L^2 估计.

引理 11.13 设 l 是正整数, m 是非负整数满足 $m \leqslant l-1$. 同样设 **H2′** 成立. 假设

$$\|\lambda'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$
$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not\pi\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$
$$\|{}^{(T)}\not\pi'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

和 (当 $l_* \geqslant 2$ 时)

$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not\pi_1\|_{\infty,[l_*-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(T)}\not\pi_1\|_{2,[m,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{T}_{[m,l]} + \delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\ &\cdot(\max_i \|{}^{(R_i)}\not\pi\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + (1+t)\max_i \|{}^{(R_i)}\not\pi_1\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}}))\end{aligned}$$

证明 证明与引理 11.11 非常相似. 唯一的区别在于这里我们必须用引理 11.12 将 ${}^{(T)}\not\pi_1$ 和 ${}^{(T)}(\not\pi_1)_b$ 的 L^2 估计联系起来. □

现在我们用引理 11.11 和引理 11.13 推出交换子 ${}^{(i_1\cdots i_n)}c_{m,n}[\xi]$ 的估计, 其定义见 (11.83).

引理 11.14 设 k,l 是非负整数满足 $k \leqslant l$. 同样设 **H2′** 成立. 假设

$$\|\lambda'\|_{\infty,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$
$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not\pi\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$
$$\|{}^{(T)}\not\pi'\|_{\infty,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

和

$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not\pi_1\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

成立. 则对任意 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 我们有

$$\max_{m\leqslant k, n\leqslant l-m}\ \max_{i_1\cdots i_n} \|{}^{(i_1\cdots i_n)}c_{m,n}[\xi]\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\xi\|_{\infty,[k,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$

前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l).

证明 当前引理的假设包含了引理 11.11 的假设 (用 $k-1$ 代替 m). 所以引理 11.11 的结论对 $m=k-1$ 成立, 即我们有

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.95}$$

然后再用引理 11.9 给出的表达式, 直接计算之后引理得证. □

引理 11.15 设 k,l 是正整数满足 $k\leqslant l$. 同样设 $\mathbf{H2}'$ 成立. 假设

$$\|\lambda'\|_{\infty,[k-1,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$
$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$
$$\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[k-1,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

和

$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

成立. 则对任意 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{m\leqslant k,n\leqslant l-m}\max_{i_1\cdots i_n}\|{}^{(i_1\cdots i_n)}c_{m,n}[\xi]\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\|\xi\|_{2,[k,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+C_l(1+t)^{-1}\|\xi\|_{\infty,[k,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mathcal{T}_{[k-1,l]}+(1+t)\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}_1\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}})
\end{aligned}$$

前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l).

证明 当前引理的假设包含引理 11.11 的假设 (用 $(k-1,l_*)$ 替代 (m,l)). 从而我们有

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[k-1,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.96}$$

同样当前引理的假设包含引理 11.13 的假设 (用 $k-1$ 替代 m). 所以我们有

$$\begin{aligned}
&\|{}^{(T)}\not{\pi}_1\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{T}_{[k-1,l]}+\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\
&\cdot(\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+(1+t)\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}_1\|_{2,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}}))
\end{aligned} \tag{11.97}$$

像我们证明引理 11.14 那样, 我们只需要用引理 11.9 的表达式, 再由直接计算便可证明引理. □

11.1.2 $T\hat{T}^i$ 的 L^∞ 估计

给定非负整数 m,n, 记 $\mathbf{E}^Q_{m,n}$ 为如下连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的常数 C 使得对 $t\in[0,s]$, 我们有

$$\mathbf{E}^Q_{m,n}: \max_{\alpha;i_1\cdots i_n}\|R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m Q\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

记 $\mathbf{E}^Q_{\{l\}}$ 为满足 (11.8) 的 $\mathbf{E}^Q_{m,n}$ 的组合. 常数 C 只依赖于 l, 我们将其记为 C_l. 注意到 $\mathbf{E}^Q_{0,n}$ 与 $\mathbf{E}^Q_n$ 相同, 以及 $\mathbf{E}^Q_{\{l\}}$ 包含 $\mathbf{E}^Q_{[l]}$.

给定非负整数 m,l 满足 $m\leqslant l$, 记 $\mathbf{M}_{[m,l]}$ 为连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的常数 C_l 使得对 $t\in[0,s]$ 有

$$\mathbf{M}_{[m,l]}: \|\mu-1\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$

模去 $\mathbf{E}_{\{l\}}$, 这个与如下假设等价: 存在一个不依赖于 s 的常数 C_l 使得对 $t\in[0,s]$ 有

$$\|\kappa-1\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{11.98}$$

命题 11.1 设 **H0**, **H1**, **H2**$'$ 以及估计 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l+1\}}$, $\mathbf{E}^Q_{\{l\}}$ 和 $\mathbf{X}_{[l]}$ 对某个正整数 l 成立. 进一步, 设连续性假设 $\mathbf{M}_{[m,l+1]}$ 对某个非负整数 $m\leqslant l$ 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\max_i\|(T)^{k+1}\hat{T}^i\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k=0,\cdots,m$ 成立.

证明 当前命题的假设包含命题 10.1 的假设 (用 $l+1$ 替代 l). 所以由命题 10.1 的推论 (将 $l+1$ 换成 l), 我们有

$$\|\psi_L\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.99}$$

$$\|\psi_{\hat{T}}\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.100}$$

$$\|\not\psi\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.101}$$

和

$$\|\omega_{L\hat{T}}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.102}$$

$$\|\not{\psi}_L\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.103}$$

$$\|\not{\psi}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.104}$$

进一步, 由定义

$$\not{\psi}_{\hat{T}} = \hat{T}^i \not{d}\psi_i$$

我们得到

$$\|\not{\psi}_{\hat{T}}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.105}$$

$$\|\omega_{T\hat{T}}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.106}$$

由 $\mathbf{M}_{[0,l+1]}$, 我们有

$$\|(q_T)_b\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.107}$$

(前提是依赖于 l 的 δ_0 足够小). 这个与推论 10.1.d 共同意味着

$$\|q_T\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.108}$$

由 (11.12), 命题在 $k=0$ 成立.

对固定的 l 和 m , 我们对 k 用数学归纳法. 设 $k \in \{1,\cdots,m\}$ 以及

$$\max_i \|(T)^{k'+1}\hat{T}^i\|_{\infty,[l-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.109}$$

对 $k'=0,\cdots,k-1$ 成立.

由这个归纳假设以及 $\mathbf{E}_{\{l+1\}}$ 容易得到

$$\|(T)^{k'}\not{\psi}_{\hat{T}}\|_{\infty,[l+1-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.110}$$

对 $k' \in \{1,\cdots,k\}$ 成立.

这个与 (11.100) 意味着

$$\|\not{\psi}_{\hat{T}}\|_{\infty,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.111}$$

由于

$$\omega_{T\hat{T}} = \hat{T}^i(T\psi_i), \quad \omega_{L\hat{T}} = \hat{T}^i(L\psi_i), \quad \not{\psi}_{\hat{T}} = \hat{T}^i(\not{d}\psi_i)$$

这个与 $\psi_{\hat{T}}$ 相似, 只是用 $T\psi_i$, $L\psi_i$, $\not{d}\psi_i$ 分别代替 ψ_i. 从而我们得到

$$\|\omega_{T\hat{T}}\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.112}$$

$$\|\omega_{L\hat{T}}\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.113}$$

$$\|\not{\psi}_{\hat{T}}\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.114}$$

类似地, 由

$$L^i = -\alpha\hat{T}^i - \psi_i \tag{11.115}$$

和 $\mathbf{E}_{\{l+1\}}$, 我们有

$$\max_i \|(T)^{k'+1}L^i\|_{\infty,[l-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.116}$$

对 $k'=0,\cdots,k-1$ 成立.

所以有

$$\|(T)^{k'}\psi_L\|_{\infty,[l+1-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.117}$$

对 $k'=0,\cdots,k$ 成立. 这个与 (11.99) 共同意味着

$$\|\psi_L\|_{\infty,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.118}$$

以及

$$\|\not{\psi}_L\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.119}$$

同样地, 我们有

$$\|\not{\psi}\|_{\infty,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.120}$$

$$\|\not{\psi}\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.121}$$

从而

$$\|\not{k}\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.122}$$

$$\|\kappa^{-1}\zeta\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{11.123}$$

所以

$$\|\kappa\not{k}\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.124}$$

$$\|\zeta\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.125}$$

由 $\mathbf{E}_{\{l+1\}}$ 和 $\mathbf{M}_{[k,l+1]}$, 我们有

$$\|(q_T)_b\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.126}$$

为了完成归纳证明, 我们需要关于 q_T 的估计. 这可以由引理 11.7 得到, 前提是我们可以证明

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.127}$$

这是因为由推论 10.1.d 和 $\mathbf{M}_{[k,l+1]}$, 引理 11.7 的假设, 即引理 11.5 的假设成立. 由定义 (11.51) 和估计 (11.124), 我们可以得到 (11.127), 前提是我们能证明

$$\|\chi'\|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.128}$$

实际上由如下引理我们可以得到一个更强的估计.

引理 11.16 设命题 11.1 的假设成立. 同样设归纳假设 (11.109) 对 $k \in \{1,\cdots,m\}$ 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 如下估计成立:

$$\|\chi'\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

证明 由上所述, 在当前假设下, 命题 10.1 及其推论成立 ($l+1$ 替代 l). 由定义 (11.50) 和推论 10.1.d, 我们得到

$$\|\chi'\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.129}$$

对 k' 作归纳, 我们可以证明

$$\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k'}\chi'\|_{\infty,[l-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.130}$$

对 $k' \in \{1,\cdots,k\}$ 成立, 这个与 (11.129) 共同得出了引理的结论. 事实上我们将会看到 (11.109) 与估计

$$\|\chi'\|_{\infty,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.131}$$

共同意味着

$$\|(\not{\mathcal{L}}_T)^k\chi'\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{11.132}$$

由定义 (11.50), 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_T\chi' = \not{\mathcal{L}}_T\chi - \frac{{}^{(T)}\not{\pi}}{1-u+t} - \frac{\not{g}}{(1-u+t)^2} \tag{11.133}$$

现在 $\not{\mathcal{L}}_T\chi$ 由公式 (3.124)—(3.125) 给出. 将这个公式代入 (11.133), 同样代入 (11.51)—(11.52) 以便用 χ' 表示 ${}^{(T)}\not{\pi}$, 我们得到一个关于 $\not{\mathcal{L}}_T\chi'$ 的公式. 将 $(\not{\mathcal{L}}_T)^{k-1}$ 运用到这个公式, 然后取 $\|\ \ \|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数. 右端各项的贡献将被 $\|\ \ \|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数界定. 现在由 (11.51), (11.131) 以及 (11.124) 和 $\mathbf{M}_{[k,l+1]}$, 我们有

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{11.134}$$

由引理 11.7 (用 $k-1$ 替代 m), 我们得到

$$\begin{aligned} \|{}^{(T)}\not{\pi}+2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\ \|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi}-2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\ \max_{2\leqslant k'\leqslant k-1}\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k'}{}^{(T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \end{aligned} \tag{11.135}$$

由这些估计以及推论 10.1.d, 对 $S_{t,u}$ 上任意张量场 ξ, 我们有

$$\|\xi\cdot\not{g}\|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\|\xi\|_{\infty,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.136}$$

前提是 δ_0 足够小 (依赖于 l). 这个与由 (11.99)—(11.125) 得出的估计以及引理 11.14 共同意味着 (11.132). 从而引理得证. □

我们继续命题 11.1 的证明. 由引理 11.16, 我们有如下估计:

$$\|q_T\|_{\infty,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.137}$$

由这个和 $\mathbf{M}_{[k,l+1]}$, 我们由引理 11.4 的第一个结论推出

$$\|p_{T,j}\|_{\infty,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{11.138}$$

对 $j\in\{0,\cdots,k\}$ 成立, 以及

$$\|q_{T,j}\|_{\infty,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.139}$$

对 $j \in \{0, \cdots, k\}$ 成立.

我们将引理 11.4 的第二个结论写成

$$r^n_{T,k} = \sum_{i=0}^{k-1-n} N_i(n) \sum_{j'=0}^{k-1-n-i} (\not{\mathcal{L}}_T)^{k-1-n-j'}(\kappa q_{T,j'}) \tag{11.140}$$

这里 $n \in \{0, \cdots, k-1\}$. 对该式取 $\| \quad \|_{\infty,[l-k+n],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数, 再由 (11.139) 和 $\mathbf{M}_{[k,l+1]}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|r^n_{T,k}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k-1-n} N_i(n) \sum_{j'=0}^{k-1-n-i} \|\kappa q_{T,j'}\|_{\infty,[k-1-n-j',l-1-j'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&\leqslant C_l \max_{j' \in \{0,\cdots,k-1-n\}} \|\kappa q_{T,j'}\|_{\infty,[k-1-n-j',l-1-j'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&\leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2
\end{aligned} \tag{11.141}$$

对 $n \in \{0, \cdots, k-1\}$ 成立.

现在由引理 11.3 有

$$(T)^{k+1}\hat{T}^i = p_{T,k}\hat{T}^i + q_{T,k} \cdot \not{d}x^i + \sum_{n=0}^{k-1} r^n_{T,k} \cdot \not{d}(T)^n \hat{T}^i \tag{11.142}$$

我们对这个取 $\| \quad \|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数. 由上述估计, 我们有

$$\max_i \|p_{T,k}\hat{T}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0^2 (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{11.143}$$

$$\max_i \|q_{T,k} \cdot \not{d}x^i\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.144}$$

$$\max_i \|\sum_{n=0}^{k-1} r^n_{T,k} \cdot \not{d}(T)^n \hat{T}^i\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^3 \tag{11.145}$$

这个意味着

$$\max_i \|(T)^{k+1}\hat{T}^i\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.146}$$

这就完成了命题 11.1 的证明. □

上述命题有一系列推论.

推论 11.1.a 在命题 11.1 的假设下, 引理 11.3 中 $(T)^{k+1}\hat{T}^i$, $k = 0, \cdots, m$ 表达式的系数满足

$$\|p_{T,k}\|_{\infty,[m-k,l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0^2 (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2$$

对 $k \in \{0, \cdots, m\}$ 成立,

$$\|q_{T,k}\|_{\infty,[m-k,l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k \in \{0, \cdots, m\}$ 成立, 以及

$$\|r_{T,k}^n\|_{\infty,[l-k+n],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2$$

对 $k \in \{0, \cdots, m\}$ 和 $n \in \{0, \cdots, k-1\}$ 成立.

同样,

$$\max_i \|(T)^{k+1}L^i\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

对 $k = 0, \cdots, m$ 成立.

推论 11.1.b 在命题 11.1 的假设下, 如下估计成立:

$$\|\psi_{\hat{T}}\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}$$
$$\|\psi_L\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}$$
$$\|\psi\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}$$

和

$$\|\omega_{T\hat{T}}\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}$$
$$\|\omega_{L\hat{T}}\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$
$$\|\not{\psi}_{\hat{T}}\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$
$$\|\not{\psi}_L\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$
$$\|\not{\psi}\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$

以及

$$\|\not{k}\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$
$$\|\kappa^{-1}\zeta\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}$$
$$\|\kappa\not{k}\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$
$$\|\zeta\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

用命题 11.1 取代归纳假设 (11.109), 然后将引理 11.7 和引理 11.11 的结果代入, 我们可以由引理 11.16 得到如下推论:

推论 11.1.c 在命题 11.1 的假设下有

$$\|\chi'\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

并且我们有

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}+2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$
$$\|\not{\mathcal{L}}_T{}^{(T)}\not{\pi}-2(1-u+t)^{-2}\not{g}\|_{\infty,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$
$$\max_{2\leqslant k\leqslant m}\|(\not{\mathcal{L}}_T)^{k(T)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

以及

$$\|\Lambda\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

和

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}_1\|_{\infty,[m,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

11.1.3 $T\hat{T}^i$ 的 L^2 估计

我们接下来转到 L^2 估计. 给定非负整数 m 和 n, 记 $\mathcal{W}_{m,n}^Q$ 为如下量:

$$\mathcal{W}_{m,n}^Q = \max_{\alpha;i_1\cdots i_n}\|R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m Q\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.147}$$

然后我们记 $\mathcal{W}_{\{l\}}^Q$ 为 $\mathcal{W}_{m,n}^Q$ 满足 (11.8) 的组合. 注意到 $\mathcal{W}_{0,n}^Q$ 与 $\mathcal{W}_n^Q$ 相同, 以及 $\mathcal{W}_{\{l\}}^Q$ 包含了 $\mathcal{W}_{[l]}^Q$. 进一步, 我们有

$$\max_\alpha\|L\psi_\alpha\|_{2,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant (1+t)^{-1}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q \tag{11.148}$$

给定非负整数 m, l, $m\leqslant l$, 记

$$\mathcal{B}_{[m,l]} = \|\mu-1\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.149}$$

注意到 $\mathcal{B}_{[0,l]}$ 与 $\mathcal{B}_{[l]}$ 相同. 由于 $\mu=\alpha\kappa$, 由引理 11.1, 在连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*\}}$ 和 $\mathbf{M}_{[m,l_*]}$ 下, 我们有

$$\|\kappa-1\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{B}_{[m,l]}+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l\}}) \tag{11.150}$$

命题 11.2　设 **H0**, **H1**, **H2$'$** 以及估计 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*+1\}}$, $\mathbf{E}^Q_{\{l_*\}}$ 以及 $\mathbf{X}_{[l_*]}$ 对非负整数 l 成立. 进一步, 设 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 对非负整数 $m \leqslant l$ 成立 (其中对 $m \geqslant l_*+1$ 假设 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 与 $\mathbf{M}_{\{l_*+1\}} = \mathbf{M}_{[l_*+1,l_*+1]}$ 相同). 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m} \max_i \|(T)^{k+1}\hat{T}^i\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]} + \delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\ &\quad +(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))\end{aligned}$$

证明　当前命题的假设与命题 11.1 相同 ((m, l_*) 替代 (m, l)). 所以在当前命题的假设下, 命题 11.1 及其推论对 (m, l_*) 成立. 进一步, 当前命题的假设包含了命题 10.1 的假设 (l_*+1 替代 l), 以及命题 10.2 的假设 ($l+1$ 代替 l). 从而在当前命题的假设下, 命题 10.1 及其推论对 l_*+1 成立, 命题 10.2 及其推论对 $l+1$ 成立. 特别地, 我们有 (推论 10.2.b 和 10.2.g 对 $l+1$ 成立)

$$\|\psi_L\|_{2,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \tag{11.151}$$

$$\|\psi_{\hat{T}}\|_{2,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \tag{11.152}$$

$$\|\psi\|_{2,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \tag{11.153}$$

和

$$\|\omega_{L\hat{T}}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]})) \tag{11.154}$$

$$\|\psi_L\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.155}$$

$$\|\psi\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.156}$$

进一步, 我们得到

$$\|\psi_{\hat{T}}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.157}$$

$$\|\omega_{T\hat{T}}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.158}$$

定义

$$\mathcal{U}_{k,l} = \sum_{k'=0}^{k} \max_i \|(T)^{k'+1}\hat{T}^i\|_{2,[l-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.159}$$

由定义 (11.14) 有

$$\|(q_T)_b\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C(1+t)^{-1}\|\kappa - 1\|_{2,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.160}$$

这个与 (10.145) 以及 (11.126) 的 L^∞ 估计和推论 10.1.d 共同意味着

$$\begin{aligned}\|q_T\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\|\kappa - 1\|_{2,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]}))\end{aligned} \tag{11.161}$$

由这个和推论 10.2.a 有

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{0,l} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\|\kappa - 1\|_{2,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]}))\end{aligned} \tag{11.162}$$

对固定的 l, 我们将导出一个关于 k 的 $\mathcal{U}_{k,l}$ 的递推不等式来证明引理. 我们首先用 $\mathcal{U}_{k-1,l}$ 来估计 ψ 和 ω 的 k 阶 T- 方向导数的 L^2 范数. 像我们证明命题 11.1 那样, 我们有如下表达式:

$$(T)^{k'}\psi_{\hat{T}} = \hat{T}^i(T)^{k'}\psi_i + \sum_{j=0}^{k'-1}\frac{k'!}{(j+1)!(k'-1-j)!}((T)^{j+1}\hat{T}^i)((T)^{k'-1-j}\psi_i) \tag{11.163}$$

$$(T)^{k'}\psi_L = (T)^{k'}\psi_0 + L^i(T)^{k'}\psi_i + \sum_{j=0}^{k'-1}\frac{k'!}{(j+1)!(k'-1-j)!}((T)^{j+1}L^i)((T)^{k'-1-j}\psi_i) \tag{11.164}$$

$$(\not{\mathcal{L}}_T)^{k'}\not{\psi} = (\not{d}x^i)(T)^{k'}\psi_i + \sum_{j=0}^{k'-1}\frac{k'!}{(j+1)!(k'-1-j)!}(\not{d}(T)^{j+1}x^i)(T)^{k'-1-j}\psi_i \tag{11.165}$$

对上式取 $\|\quad\|_{2,[l+1-k'],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数. 这个与 (11.151)—(11.158), 命题 10.2 及其推论和命题 11.1 共同意味着

$$\|\psi_{\hat{T}}\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{U}_{k-1,l} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \tag{11.166}$$

和

$$\|\omega_{T\hat{T}}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{U}_{k-1,l-1} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.167}$$
$$\|\omega_{L\hat{T}}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{\{l\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{U}_{[k-1,l-1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) + \mathcal{W}_{\{l\}}) \tag{11.168}$$
$$\|\not{\psi}_{\hat{T}}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{U}_{[k-1,l-1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.169}$$

以及

$$\|\psi_L\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{U}_{k-1,l} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \tag{11.170}$$
$$\|\not{\psi}_L\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{U}_{k-1,l-1} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \tag{11.171}$$

和

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(&\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-2}\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ &+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{k-2,l}\\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]}))\end{aligned} \tag{11.172}$$

和

$$\begin{aligned}\|\not{\psi}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-2}\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ &+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{k-2,l-1}\\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))\end{aligned} \tag{11.173}$$

(11.173) 与引理 11.2.a 共同意味着

$$\begin{aligned}\|\not{k}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-2}\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ &+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{k-2,l-1}\\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))\end{aligned} \tag{11.174}$$

类似地, (11.169) 意味着

$$\|\kappa^{-1}\zeta\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{k-1,l-1} \\ +\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})+\mathcal{W}_{\{l+1\}}) \quad (11.175)$$

所以我们有

$$\|\kappa\not{k}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{U}_{[k-2,l-1]} \\ +\delta_0(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ +\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\ +(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}) \quad (11.176)$$

$$\|\zeta\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{k-1,l-1} \\ +\delta_0(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ +\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\ +(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}) \quad (11.177)$$

由定义, 我们有

$$\|(q_T)_b\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \quad (11.178)$$

为了导出一个关于 $\mathcal{U}_{[k,l]}$ 的递推不等式, 我们需要用 $\mathcal{U}_{[k-1,l-1]}$ 来估计 q_T. 这要求我们对 $\mathcal{T}_{[k-1,l-1]}$ (其定义见引理 11.8) 有一个合适的估计. 由当前命题的假设, 推论 10.1.d (l_* 替代 l), 连续性假设 $\mathbf{M}_{[m,l_*]}$ 以及推论 11.1.c (l_* 替代 l) 可以推出引理 11.8 的假设 (也是引理 11.6 的假设), 引理 11.8 给出一个 $\mathcal{T}_{[k,l]}$ 用 $\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$, $\|\lambda'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 和 $\max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 界定的界. 由 (11.51), (11.176) 和推论 11.1.c (l_* 替代 l), 我们有

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C(1+\log(1+t))\|\chi'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ +C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{k-2,l-1} \\ +\delta_0(1+t)^{-1}(\|\kappa-1\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})+\mathcal{W}_{\{l+1\}}) \quad (11.179)$$

同样由引理 11.1 和引理 11.2.a 有

$$\|\lambda'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\|\kappa-1\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l\}}) \quad (11.180)$$

同样由 (10.145), 我们有

$$\max_i \|^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]}) \tag{11.181}$$

将估计 (11.179)—(11.181) 代入引理 11.8 的估计, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{[k,l]} \leqslant C_l(&(1+\log(1+t))\|\chi'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\&+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\mathcal{U}_{k-2,l-1}\\&+(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\&+\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\\&+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}})\end{aligned} \tag{11.182}$$

所以我们需要一个关于 $\|\chi'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 的估计, 其证明类似于引理 11.16:

引理 11.17 设命题 11.2 的假设成立. 则当 δ_0 足够小时 (依赖于 l), 如下估计对 $k \in \{0, \cdots, m\}$ 成立:

$$\begin{aligned}\|\chi'\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{[k-2,l-1]}\\&+(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})\\&+\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}})\end{aligned} \tag{11.183}$$

继续命题 11.2 的证明, 将引理 11.17 的结果代入, 我们有如下关于 $\mathcal{T}_{[k,l]}$ 的估计:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{[k,l]} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{U}_{k-2,l-1}\\&+\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})\\&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}}))\end{aligned} \tag{11.184}$$

现在考虑引理 11.12 ($(k+1,l+1)$ 替代 (k,l)). 由于 $(l+1)_* \leqslant l_*+1$, 其假设在如下前提下成立:

$$\begin{aligned}\|\lambda'\|_{\infty,[k,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))\\ \max_i \|^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\ \|^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[k,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\end{aligned} \tag{11.185}$$

这个可以从命题 11.2 的假设得来. 所以我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\xi\cdot\not{g}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}},\|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&\leqslant C_l(\|\xi\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\|\xi\|_{\infty,[k,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\max_i\|^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\mathcal{T}_{[k-1,l-1]})) \quad (11.186)
\end{aligned}
$$

把 (10.145) 和 (11.184) 代入, 这个变为

$$
\begin{aligned}
&\|\xi\cdot\not{g}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}},\|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant{}& C_l\|\xi\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+C_l\|\xi\|_{\infty,[k,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&\cdot(\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\mathcal{U}_{k-3,l-2}\\
&+(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\\
&+\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}) \quad (11.187)
\end{aligned}
$$

将这个运用到 $\xi=(q_T)_b$, 我们由 (11.178) 和 (11.107) 得到

$$
\begin{aligned}
&\|q_T\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant{}& C_l(1+t)^{-1}(\delta_0^2(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{k-1,l-1}+\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})) \quad (11.188)
\end{aligned}
$$

现在考虑引理 11.3 中的前两个递推关系式 (将 m 替换为 $j\in\{0,\cdots,k\}$). 取 $\|\quad\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数, 我们得到

$$
\begin{aligned}
\|p_{T,j}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant{}&\|p_{T,j-1}\|_{2,[k+1-j,l+1-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+C_l(\|\not{d}\kappa\|_{\infty,[k-j,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\|q_{T,j-1}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\|\not{d}\kappa\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\|q_{T,j-1}\|_{\infty,[k-j,l_*-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}) \quad (11.189)\\
\|q_{T,j}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant{}&\|q_{T,j-1}\|_{2,[k+1-j,l+1-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+C_l(\|q_T\|_{\infty,[k-j,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\|p_{T,j-1}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\|q_T\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\|p_{T,j-1}\|_{\infty,[k-j,l_*-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}) \quad (11.190)
\end{aligned}
$$

对固定的 (k,l) 以及 $j\in\{0,\cdots,k\}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
x_j&=\|p_{T,j}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \quad (11.191)\\
y_j&=\|q_{T,j}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
a &= x_0 = 0 \\
b &= \|q_T\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} = y_0 \\
c &= \|\not{d}\kappa\|_{2,[k,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}
\end{aligned}
\tag{11.192}
$$

由 $\mathbf{M}_{[k,l_*+1]}$ 和 $\mathbf{E}_{\{l_*+1\}}$ 以及推论 11.1.a (l_* 替代 l), (11.189)—(11.190) 意味着

$$
\begin{aligned}
x_j &\leqslant x_{j-1} + \epsilon(y_{j-1} + c) \\
y_j &\leqslant y_{j-1} + \epsilon(x_{j-1} + \epsilon b)
\end{aligned}
\tag{11.193}
$$

其中

$$
\epsilon = C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1 + \log(1+t))
\tag{11.194}
$$

不等式 (11.193) 可以被写为如下形式:

$$
\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} \leqslant (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \begin{bmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \end{bmatrix} + \mathbf{a}
\tag{11.195}
$$

其中

$$
\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \epsilon c \\ \epsilon^2 b \end{bmatrix}
\tag{11.196}
$$

从而

$$
\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} \leqslant (\mathbf{I} + \mathbf{E})^j \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + (\sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{I} + \mathbf{E})^i)\mathbf{a}
\tag{11.197}
$$

在矩阵范数下, 我们有

$$
|\mathbf{E}| \leqslant \epsilon
$$

对 $\epsilon \leqslant 1$, (11.197) 意味着

$$
\begin{aligned}
x_j &\leqslant x_0 + C_j \epsilon (x_0 + y_0) + C_j(\epsilon c + \epsilon^2 b) \\
y_j &\leqslant y_0 + C_j \epsilon (x_0 + y_0) + C_j(\epsilon c + \epsilon^2 b)
\end{aligned}
\tag{11.198}
$$

由 (11.191) 和 (11.192), 将 (11.188) 代入 b 中, 并且注意到

$$c \leqslant C(1+t)^{-1}\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\|p_{T,j}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{[k-1,l-1]} \\
&+\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})) \quad (11.199)
\end{aligned}$$

对 $j \in \{0,\cdots,k\}$ 成立.

$$\begin{aligned}
&\|q_{T,j}\|_{2,[k-j,l-j],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{[k-1,l-1]} \\
&+\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})) \quad (11.200)
\end{aligned}$$

对 $j \in \{0,\cdots,k\}$ 成立.

接下来我们考虑 (11.140). 取 $\|\ \ \|_{2,[l-k+n],\Sigma_t}$ 范数, 我们由 (11.200) 得到

$$\begin{aligned}
&\|r^n_{T,k}\|_{2,[l-k+n],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & \sum_{i=0}^{k-1-n} N_i(n)\sum_{j'=0}^{k-n-1-i}\|\kappa q_{T,j'}\|_{2,[k-1-n-j',l-1-n],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l \max_{j'\in\{0,\cdots,k-1-n\}}\|\kappa q_{T,j'}\|_{2,[k-1-j',l-1-j'],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{[k-2,l-2]} \\
&+\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l-1\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-2\}})) \quad (11.201)
\end{aligned}$$

对 $n \in \{0,\cdots,k-1\}$ 成立.

最后我们对 (11.142) 取 $\|\ \ \|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数. 所以左边变为

$$\|(T)^{k+1}\hat{T}^i\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} = \mathcal{U}_{k,l} - \mathcal{U}_{k-1,l}$$

由 (11.199) 和 (11.200) ($j=k$) 以及命题 10.2, 命题 10.1 和推论 11.1.a (l_* 代替 l), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\max_i \|p_{T,k}\hat{T}^i\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{[k-1,l-1]} \\
&+\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned} \tag{11.202}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max_i \|q_{T,k}\cdot \not{d}x^i\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{[k-1,l-1]} \\
&+\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned} \tag{11.203}
$$

由 (11.201) ($n=0$) 和命题 10.2 ($k\geqslant 1$) 以及命题 10.1 (l_*+1 代替 l) 和推论 11.1.a (l_* 代替 l), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|r^0_{T,k}\cdot \not{d}\hat{T}^i\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^2(1+\log(1+t))\cdot(\delta_0^2(1+t)^{-1}\mathcal{U}_{k-2,l-2}+\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned} \tag{11.204}
$$

同样由 (11.201) 与命题 11.1 以及推论 11.1.a (l_* 代替 l), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\max_i \Big\|\sum_{n=1}^{k-1} r^n_{T,k}\cdot \not{d}(T)^n\hat{T}^i\Big\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}\Big(\max_{n\in\{1,\cdots,k-1\}}\max_i \|r^n_{T,k}\|_{\infty,[l_*-k+n],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\mathcal{U}_{k-2,l-1} \\
&+\Big(\sum_{n=1}^{k-1}\|r^n_{T,k}\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\Big)\max_{n\in\{1,\cdots,k-1\}}\|(T)^n\hat{T}^i\|_{\infty,[l_*+1-n],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\Big) \\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{U}_{k-2,l-1} \\
&+C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2(\|\kappa-1\|_{2,[k-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l-1\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-2\}}))
\end{aligned} \tag{11.205}
$$

将 (11.204) 与 (11.205) 组合起来, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\max_i \| \sum_{n=0}^{k-1} r_{T,k}^n \cdot \not{d}(T)^n \hat{T}^i \|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant & C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \\
&\cdot(\delta_0(1+\log(1+t))\mathcal{U}_{k-2,l-1} + \|\kappa-1\|_{2,[k-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}_{\{l-1\}}^Q)) \quad (11.206)
\end{aligned}$$

由 (11.202), (11.203) 和 (11.206), 我们得到了如下递推不等式:

$$\mathcal{U}_{k,l} - \mathcal{U}_{k-1,l} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{U}_{k-1,l-1} + b_{k,l} \quad (11.207)$$

其中

$$\begin{aligned}
b_{k,l} = & C_l(1+t)^{-1}(\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} \\
&+\mathcal{W}_{\{l\}} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}_{\{l-1\}}^Q)) \quad (11.208)
\end{aligned}$$

(11.207) 意味着

$$\mathcal{U}_{k,l} \leqslant (1 + C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2)\mathcal{U}_{k-1,l} + b_{k,l} \quad (11.209)$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{k,l} \leqslant & (1 + C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2)^k\mathcal{U}_{0,l} \\
&+ \sum_{j=1}^{k}(1 + C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2)^{k-j} b_{j,l} \quad (11.210)
\end{aligned}$$

由于 $b_{k,l}$ 关于 k 非减, 这个意味着

$$\mathcal{U}_{k,l} \leqslant C_l(\mathcal{U}_{0,l} + b_{k,l}) \quad (11.211)$$

最终将 (11.162) 和 (11.208) 代入 (11.211), 我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{k,l} \leqslant & C_l(1+t)^{-1}(\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} \\
&+\mathcal{W}_{\{l\}} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}_{\{l-1\}}^Q)) \quad (11.212)
\end{aligned}$$

由于我们有

$$\|\kappa-1\|_{2,[k,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l(\mathcal{B}_{[k,l+1]}+(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}) \tag{11.213}$$

则命题得证. □

我们同样有一系列推论:

推论 11.2.a 在命题 11.2 的假设下, 引理 11.3 中 $(T)^{k+1}\hat{T}^i$, $k=0,\cdots,m$ 表达式的系数满足

$$\begin{aligned}
&\|p_{T,k}\|_{2,[m-k,l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\\
&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned}$$

对 $k\in\{0,\cdots,m\}$ 成立,

$$\begin{aligned}
&\|q_{T,k}\|_{2,[m-k,l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\
&+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\\
&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned}$$

对 $k\in\{0,\cdots,m\}$ 成立, 以及

$$\begin{aligned}
&\|r^n_{T,k}\|_{2,[l-k+n],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\
&\cdot(\mathcal{B}_{[m,l]}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]})\\
&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-2\}}))
\end{aligned}$$

对 $k\in\{0,\cdots,m\}$, $n\in\{0,\cdots,k-1\}$ 成立.

同样有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\max_i\|(T)^{k+1}L^i\|_{2,[l-k],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\\
&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned}$$

推论 11.2.b 在命题 11.2 的假设下有如下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|\psi_{\hat{T}}\|_{2,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l\}})) \\
&\|\psi_L\|_{2,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l\}})) \\
&\|\not\psi\|_{2,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l\}}))
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\|\omega_{T\hat{T}}\|_{2,[m,l],\Sigma_T^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})) \\
&\|\omega_{L\hat{T}}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{\{l\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{\{l\}})) \\
&\|\phi_{\hat{T}}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})) \\
&\|\phi_L\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})) \\
&\|\not\phi\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 \\
&+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}))
\end{aligned}
$$

同样我们有

$$\|\not{k}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q$$
$$+\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))$$
$$\|\kappa^{-1}\zeta\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q$$
$$+\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))$$
$$\|\kappa\not{k}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q)$$
$$+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))$$
$$\|\zeta\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q)$$
$$+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))$$

将命题 11.2 代入, 再由引理 11.17, 我们可以得到如下引理:

推论 11.2.c 在命题 11.2 的假设下, 我们有

$$\|\chi'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}$$
$$+\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l\}}^Q)$$

进一步由 (11.184), 我们有

$$\mathcal{T}_{[m,l]} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}$$
$$+\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l\}}^Q))$$

并且显然

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}+2(1-u+t)^{-1}\not{g}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\mathcal{T}_{[m,l]}$$

同样由关于 ζ 的估计以及 (11.187), 我们有

$$\|\Lambda\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})$$
$$+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l\}}^Q))$$

再由引理 11.13 和引理 10.11, 我们有

$$\|{}^{(T)}\not{\pi}_1\|_{2,[m,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-2}(\mathcal{B}_{[m,l+1]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}$$
$$+\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l\}}^Q))$$

我们现在回到引理 11.12. 在命题 11.2 的假设下, 我们有

$$\begin{aligned} \|\lambda'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) \\ \max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\ \|{}^{(T)}\not{\pi}'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \end{aligned} \tag{11.214}$$

这些估计将能推出引理 11.12 的假设 (用 (m,l) 代替 $(k-1,l-1)$). 则我们得到

$$\begin{aligned} &\|\xi\cdot\not{g}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\leqslant C_l(\|\xi\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \|\xi\|_{\infty,[m,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \mathcal{T}_{[m-1,l-1]})) \end{aligned} \tag{11.215}$$

所以由推论 10.1.d 和推论 11.2.c, 我们得到

推论 11.2.d 在命题 11.2 的假设下, 我们有

$$\begin{aligned} &\|\xi\cdot\not{g}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &\leqslant C_l(\|\xi\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \|\xi\|_{\infty,[m,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mathcal{W}_{\{l\}} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}} \\ &\quad +(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \end{aligned}$$

11.2 $Q'_{m,l}$ 和 $P'_{m,l}$ 的界

这一节的主要目的是为了得到 ${}^{(i_1\cdots i_l)}Q'_{m,l}$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P'_{m,l}$ 的估计, 这些估计将通过 ${}^{(i_1\cdots i_l)}B'_{m,l}$ 出现在函数 ${}^{(i_1\cdots i_l)}x'_{m,l}$ 的估计中.

11.2.1 $Q'_{m,l}$ 的界

${}^{(i_1\cdots i_l)}Q'_{m,l}(t)$ 由 (9.256) 定义. 我们首先估计最后一项:

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{11.216}$$

${}^{(i_1\cdots i_l)}\dot{g}'_{m,l}$ 用 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 由 (9.242) 和 (9.243) 定义. 而 ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 由命题 9.1 和命题 9.2 定义. ${}^{(i_1\cdots i_l)}g'_{m,l}$ 表达式中第一项为

$$R_{i_l}\cdots R_{i_1}(T)^m\breve{g}'$$

其中 $\breve{g}'$ 由 (9.44) 式定义. 注意到对 $m=l=0$, 我们有

$$g'_{0,0} = \breve{g}' \tag{11.217}$$

而由 (9.242) 有

$$\dot{g}'_{0,0} = g'_{0,0} - \xi \cdot x_0 \tag{11.218}$$

其中 ξ 由 (9.59) 给出. 定义

$$\check{g}' := \dot{g}'_{0,0} \tag{11.219}$$

接下来的主要目的就是估计

$$\|\check{g}'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$

回忆第八章,

$$x_0 = \mu \not{d}\mathrm{tr}\chi + \not{d}\check{f}$$

我们有

$$\check{g}' = \breve{g}' - \xi \cdot (\mu \not{d}\mathrm{tr}\chi + \not{d}\check{f}) \tag{11.220}$$

将 $\breve{g}'$ 的表达式 (9.44) 代入 (11.220):

$$\begin{aligned}\check{g}' = & -\xi \cdot \not{d}\check{f} - 2\mu(\not{d}\mu) \cdot (i - \not{d}e) \\ & + \frac{1}{2}\frac{d\log\Omega}{dh}(Lh)f'_0 - \frac{1}{2}(\mu\mathrm{tr}\chi + 2m + 2\mu e)\mu f'_1 \\ & + \dot{n}''_0 + \mu(\dot{n}'_1 + \dot{n}'_2)\end{aligned} \tag{11.221}$$

其中

$$\dot{n}''_0 = -\frac{1}{2}L(\frac{dH}{dh})(\underline{L}Th) + \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\ddot{\tau} + \underline{\nu}(LTh) + 2\zeta \cdot \not{d}Th) \tag{11.222}$$

$\ddot{\tau}$ 由

$$\dot{v}' = v' + \Omega\kappa^2(\not{d}h) \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi \tag{11.223}$$

定义, 即

$$\ddot{\tau} = \Omega^{-1}(\dot{v}' + T\tilde{\tau} + {}^{(T)}\delta\tilde{\tau}) \tag{11.224}$$

我们将在后面定义 v'. 由 v' 的定义 (将在后面引入), 我们知道 $\dot{n}''_0$ 中没有声学主部. 同样, $\dot{n}'_1$ 正是 n'_1, 它的定义如下:

$$n'_1 = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}n_1 + \not{d}(\frac{dH}{dh}) \cdot \not{d}T(h) + \frac{1}{2}T(h)\not{\Delta}(\frac{dH}{dh})$$

而 $\dot{n}'_2$ 的定义如下:

$$\dot{n}'_2 = \mu\dot{n}_2 - L(\frac{\mu}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})')\not{\Delta}h - L(\mu\eta^{-1}\hat{T}^i)\not{\Delta}\psi_i \tag{11.225}$$

其中 $\dot{n}_2$ 定义如下:

$$\dot{n}_2 = n_2 - (\frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'\not{d}h + \eta^{-1}\not{d}\psi_{\hat{T}} - \eta^{-2}(L\psi_i)\not{d}x^i) \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi \tag{11.226}$$

和

$$\begin{aligned} n_2 = & -\frac{1}{2\alpha^2}(\frac{\rho}{\rho'})'[L, \not{\Delta}]h - \alpha^{-1}\hat{T}^i[L, \not{\Delta}]\psi_i \\ & + \not{d}(\frac{1}{\alpha^2}(\frac{\rho}{\rho'})') \cdot \not{d}Lh + 2\not{d}(\alpha^{-1}\hat{T}^i) \cdot \not{d}(L\psi_i) \\ & + \not{\Delta}(\frac{1}{2\alpha^2}(\frac{\rho}{\rho'})')Lh + \not{\Delta}(\alpha^{-1}\hat{T}^i)(L\psi_i) \end{aligned}$$

$\dot{n}_2$ 不包含声学主部.

现在 v' 由

$$v' = v - \Omega(Th)\not{\Delta}\mu \tag{11.227}$$

定义, 所以我们有

$$\dot{v}' = v - \Omega(Th)\not{\Delta}\mu + \Omega\kappa^2(\not{d}h) \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi \tag{11.228}$$

v 由

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \tag{11.229}$$

其中

$$
\begin{aligned}
v_1 = & (1/2)\mathrm{tr}^{(T)}\tilde{\not\pi}(L\underline{L}h + \nu\underline{L}h) \\
& +(1/4)(\mu^{-1(T)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})L^2h \\
& -^{(T)}\tilde{Z}\cdot\not{d}\underline{L}h - ^{(T)}\tilde{\underline{Z}}\cdot\not{d}Lh \\
& +(1/2)^{(T)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}\not\Delta h + \mu^{(T)}\hat{\tilde{\not\pi}}\cdot\not{D}^2h \\
v_2 = & (1/4)L(\mathrm{tr}^{(T)}\tilde{\not\pi})\underline{L}h + (1/4)\underline{L}(\mathrm{tr}^{(T)}\tilde{\not\pi})Lh \\
& +(1/4)L(\mu^{-1(T)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}})Lh \\
& -(1/2)\not{\mathcal{L}}_L{}^{(T)}\tilde{\underline{Z}}\cdot\not{d}h - (1/2)\not{\mathcal{L}}_{\underline{L}}{}^{(T)}\tilde{Z}\cdot\not{d}h \\
& -(1/2)\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(T)}\tilde{Z}(\underline{L}h) - (1/2)\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^{(T)}\tilde{\underline{Z}}(Lh) \\
& +(1/2)\not{d}^{(T)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}\cdot\not{d}h + \mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}(\mu^{(T)}\hat{\tilde{\not\pi}})\cdot\not{d}h
\end{aligned}
$$

和

$$
v_3 = v_3^L Lh + v_3^{\underline{L}}\underline{L}h + \not{v}_3\cdot\not{d}h
$$

其中

$$
\begin{aligned}
v_3^L &= (1/4)\mathrm{tr}\underline{\chi}\mathrm{tr}^{(T)}\tilde{\not\pi} + (1/4)\mathrm{tr}\chi(\mu^{-1(T)}\tilde{\pi}_{\underline{L}\underline{L}}) + (1/2)^{(T)}\tilde{Z}\cdot\not{d}(\alpha^{-1}\kappa) \\
v_3^{\underline{L}} &= -(1/4)(L\log\Omega)\mathrm{tr}^{(T)}\tilde{\not\pi} \\
\not{v}_3 &= -(1/2)(\mathrm{tr}^{(T)}\tilde{\not\pi})\Lambda - (1/2)(\mathrm{tr}\underline{\chi} + L(\alpha^{-1}\kappa))^{(T)}\tilde{Z} - (1/2)\mathrm{tr}\chi^{(T)}\tilde{\underline{Z}}
\end{aligned}
$$

给出. 定义

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= \Omega^{-1}v_1 \\
\dot{v}_2 &= \Omega^{-1}v_2 - (Th)\not\Delta\mu + \kappa^2(\not{d}h)\cdot\not{d}\mathrm{tr}\chi \\
\dot{v}_3 &= \Omega^{-1}v_3
\end{aligned}
\tag{11.230}
$$

和

$$
\dot{v} = \dot{v}_1 + \dot{v}_2 + \dot{v}_3 \tag{11.231}
$$

$\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$ 和 $\dot{v}_3$ 不包含声学主部, 并且我们有

$$
\dot{v}' = \Omega\dot{v} \tag{11.232}
$$

我们的第一个目标是估计

$$\|\dot{v}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{11.233}$$

这里我们只陈述结论:

引理 11.18 由命题 11.2 的假设以及连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*+2\}}$, $\mathbf{E}^{Q}_{\{l_*+1\}}$, $\mathbf{E}^{QQ}_{\{l_*\}}$ 和 $\mathbf{M}_{[m+1,l_*+1]}$, 我们有如下 L^2 估计:

$$\begin{aligned}&\|\dot{v}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ &C_l(1+t)^{-2}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^{Q}_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}})\\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m+1,l+1]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})))\end{aligned}$$

以及 L^∞ 估计:

$$\|\dot{v}\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))$$

这里我们记 $\mathbf{E}^{QQ}_{m,n}$ 为如下连续性假设: 存在一个不依赖于 s 的常数 C 使得对 $t\in[0,s]$ 有

$$\mathbf{E}^{QQ}_{m,n}:\max_{\alpha;i_1\cdots i_n}\|R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m(Q)^2\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}$$

然后记 $\mathbf{E}^{QQ}_{\{l\}}$ 为 $\mathbf{E}^{QQ}_{m,n}$ 满足 (11.8) 的组合. 常数 C 只依赖于 l. 这里我们同样引入了如下量 $\mathcal{W}^{QQ}_{m,n}$:

$$\mathcal{W}^{QQ}_{m,n}=\max_{\alpha;i_1\cdots i_n}\|R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m(Q)^2\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.234}$$

我们记 $\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}}$ 为 $\mathcal{W}^{QQ}_{m,n}$ 满足 (11.8) 的组合. 进一步, 我们有

$$\max_{\alpha}\|(L)^2\psi_\alpha\|_{2,\{l\},\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant(1+t)^{-2}(\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}}+\mathcal{W}^{Q}_{\{l\}}) \tag{11.235}$$

考虑 $\ddot{\tau}$, 其定义见 (11.224). 设

$$\dot{\tau}=\Omega^{-1}\ddot{\tau} \tag{11.236}$$

由 (11.232), (11.224) 变为

$$\ddot{\tau}=\dot{v}+T\dot{\tau}+(T\log\Omega+{}^{(T)}\delta)\dot{\tau} \tag{11.237}$$

由 (9.37), 我们有

$$\dot{\tau} = -\sum_i (-(L\psi_i)(\underline{L}\psi_i) + \mu \not{d}\psi_i \cdot \not{d}\psi_i) \tag{11.238}$$

这里我们对 $(k = m+2, l = l+2)$ 将引理 11.12 运用到 (11.237) 右端第二项的估计中:

$$\begin{aligned} &\|\dot{\tau}\|_{2,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ \leqslant{}& C_l\delta_0(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{\{l+2\}} + \mathcal{W}^Q_{\{l+1\}} \\ &+\delta_0(1+t)^{-2}(\mathcal{B}_{[m+1,l+1]} + (1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]}))) \end{aligned} \tag{11.239}$$

同样我们有

$$\|\dot{\tau}\|_{\infty,[m+1,l_*+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-3} \tag{11.240}$$

将这个与引理 11.18 结合起来, 我们得到

$$\begin{aligned} &\|\ddot{\tau}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ \leqslant{}& C_l(1+t)^{-2}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}} + \mathcal{W}^Q_{\{l+1\}} + \mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}}) \\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m+1,l+1]} + (1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]}))) \end{aligned} \tag{11.241}$$

以及

$$\|\ddot{\tau}\|_{2,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{11.242}$$

由上述结果和直接计算, 我们得到

$$\begin{aligned} &\|\dot{n}_0''\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ \leqslant{}& C_l(1+t)^{-2}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}} + \mathcal{W}^Q_{\{l+1\}} + \mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}}) \\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m+1,l+1]} + (1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]}))) \end{aligned} \tag{11.243}$$

我们接下来估计 $\dot{n}_1'$ 和 $\dot{n}_2'$, 它们分别由 (9.52) 和 (11.225) 给出. 关于 $\dot{n}_1'$ 的估计可以直接给出. 我们由引理 11.12 得到

$$\begin{aligned} &\|\dot{n}_1'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ \leqslant{}& C_l\delta_0(1+t)^{-3}(\mathcal{W}_{\{l+2\}} + \delta_0(1+t)^{-1} \\ &\cdot((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}})) \end{aligned} \tag{11.244}$$

同样, 显然地, 我们有

$$\|\dot{n}'_1\|_{2,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4} \tag{11.245}$$

对 $\dot{n}'_2$ 的估计要稍微复杂一些, 因为我们在关于 n_2 的表达式中有 $\not{\Delta}\hat{T}^i$. 我们必须先估计这一项. 我们考虑

$$U^i = \not{\Delta}\hat{T}^i + \alpha^{-1}\not{d}\mathrm{tr}\chi \cdot \not{d}x^i + (1-u+t)^{-1}\alpha^{-1}\not{\Delta}x^i \tag{11.246}$$

上式最后一项从 $\not{g} \cdot \not{D}^2 x^i$ 来. 我们有

$$U^i = b_1 \cdot \not{d}x^i + b_2 \cdot \not{D}^2 x^i \tag{11.247}$$

其中

$$b_1 = \mathrm{d\not{i}v}\not{k} - \alpha^{-1}i + \alpha^{-2}\chi \cdot (\not{d}\alpha) \tag{11.248}$$

和

$$b_2 = \not{k} - \alpha^{-1}\chi' \tag{11.249}$$

为了估计

$$\|U^i\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$

我们需要如下两个引理:

引理 11.19 在命题 11.2 的假设下, 对任意 $S_{t,u}$ 上的张量场 ξ, 我们有

$$\begin{aligned}\|\xi \cdot \not{d}x^i\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(&\|\xi\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} + \|\xi\|_{\infty,[m,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + \mathcal{Y}_0 \\ &+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{\{l\}}))\end{aligned}$$

引理 11.20 在命题 11.2 的假设下, 对任意 $S_{t,u}$ 上的张量场 ξ, 我们有

$$\begin{aligned}\|\xi \cdot \not{D}^2 x^i\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(&\|\xi\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ &+\|\xi\|_{\infty,[k,l_*-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} \\ &+\mathcal{W}_{\{l+1\}} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}}))\end{aligned}$$

由命题 10.1/11.1, 10.2/11.2 以及它们的推论, 这两个引理的证明几乎就是直接计算.

由这两个引理和 (11.247)—(11.249), 我们得到

引理 11.21 在命题 11.2 的假设以及连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*+2\}}$, $\mathbf{E}^Q_{\{l_*+1\}}$ 下, 我们有

$$\begin{aligned}\|U^i\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant & C_l(1+t)^{-2}\\ & \cdot(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}\\ & +(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})\end{aligned}$$

和

$$\|U^i\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))$$

接下来我们考虑由 (11.226) 给出的函数 n_2'. 在这个方程中函数 n_2 在前面已经给出. 将这个代入 (11.226) 中, 我们得到如下关于 $\dot{n}_2$ 的表达式:

$$\begin{aligned}\dot{n}_2 = & \frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'(\mathrm{tr}\chi\not{\Delta}h+2\hat{\chi}\cdot\hat{\not{D}}^2h+2i\cdot\not{d}h)\\ & +\eta^{-1}(\mathrm{tr}\chi\hat{T}^i\not{\Delta}\psi_i+2\hat{\chi}\cdot\hat{T}^i\hat{\not{D}}^2\psi_i+2i\cdot\hat{T}^i\not{d}\psi_i)\\ & +\not{d}(\frac{1}{\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})')\cdot\not{d}Lh+2\not{d}(\eta^{-1}\hat{T}^i)\cdot\not{d}(L\psi_i)\\ & +\not{\Delta}(\frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})')Lh+\not{\Delta}(\eta^{-1}\hat{T}^i)(L\psi_i)\\ & +\eta^{-2}(L\psi_i)\not{d}x^i\cdot\not{d}\mathrm{tr}\chi\end{aligned}\tag{11.250}$$

由引理 11.21 和 (11.250), 我们得到了如下关于 $\dot{n}_2$ 的表达式:

$$\begin{aligned}\|\dot{n}_2\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant & C_l(1+t)^{-3}(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}\\ & +\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}))\end{aligned}\tag{11.251}$$

和

$$\|\dot{n}_2\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-4}\tag{11.252}$$

我们转到由 $\dot{n}_2$ 表达的函数 $\dot{n}_2'$ (见 (11.225)). 我们用推论 11.1.b 和推论 11.2.b 以及直接计算得到

$$\begin{aligned}\|\dot{n}_2'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant & C_l(1+t)^{-3}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}})\\ & +\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})))\end{aligned}\tag{11.253}$$

和

$$\|\dot{n}_2'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-4}(1+\log(1+t)) \tag{11.254}$$

现在转到 $\check{g}'$ 的表达式 (11.221) 中的余项. 首先考虑函数 f_0' 和 f_1', 它们分别由 (9.26) 和 (9.36) 给出:

$$f_0' = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\underline{L}Th) \tag{11.255}$$

$$f_1' = \frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'(\not{\Delta}h) + \eta^{-1}\hat{T}^i(\not{\Delta}\psi_i) \tag{11.256}$$

显然由表达式

$$\underline{L}Th = 2(T)^2h + \eta^{-1}\kappa TLh + \eta^{-1}\kappa\Lambda\cdot\not{d}h$$

我们有

$$\|f_0'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{11.257}$$

和

$$\begin{aligned}\|f_0'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant\ & C_l(\mathcal{W}_{\{l+2\}} + (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}} \\ & +\delta_0(1+t)^{-2}(\mathcal{B}_{[m,l+1]} + \delta_0(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))\end{aligned} \tag{11.258}$$

由命题 11.2, 我们得到

$$\begin{aligned}&\|f_1'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{\{l+2\}} + \delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}} \\ & +\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]}))\end{aligned} \tag{11.259}$$

以及

$$\|f_1'\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3} \tag{11.260}$$

由 (11.257)—(11.260), 我们可以直接估计 (11.221) 右端第三项和第四项的 $\|\ \|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数. 对于第二项, 我们只需要运用 e 和 i 的估计, 它可以由命题

11.1 和命题 11.2 得到:

$$\begin{aligned}
&\|e\|_{2,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}\\
&\quad+\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{\{l+1\}})) \qquad (11.261)
\end{aligned}$$

$$\|e\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \qquad (11.262)$$

和

$$\begin{aligned}
&\|i\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&\leqslant C_l(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}\\
&\quad+\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \qquad (11.263)
\end{aligned}$$

$$\|i\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4} \qquad (11.264)$$

最终我们需要估计

$$-\xi\cdot \not{d}\check{f}$$

(11.221) 右端的第一项. 这里 ξ 由 (9.59) 给出:

$$\xi=-\not{d}\mu+(\frac{\mu}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\eta^{-1}\kappa)\not{d}h+T^i\not{d}\psi_i-\eta^{-1}\kappa(L\psi_i)\not{d}x^i \qquad (11.265)$$

而函数 $\check{f}$ 由 (8.27) 给出:

$$\check{f}=-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\tau_{\underline{L}} \qquad (11.266)$$

所以我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\not{d}\check{f}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[m,l+1]})
\end{aligned}$$

(11.267)

以及

$$\|\not{d}\check{f}\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \qquad (11.268)$$

接下来由推论 11.1.b (l_* 代替 l) 和推论 11.2.b, 我们得到

$$\|\xi\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.269}$$

和

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0^2(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l\}})\\ +\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))\end{aligned} \tag{11.270}$$

为了得到最终的估计, 我们要用推论 11.2.d 看出

$$\begin{aligned}&\|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-1}\\ &\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}})\\ &+\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}))\end{aligned} \tag{11.271}$$

以及

$$\|\xi\cdot\not{g}^{-1}\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{11.272}$$

则 (11.221) 右端第一项可以用 (11.267), (11.268), (11.271) 和 (11.272) 估计.

最后我们将上述结果与先前的结果 (11.243), (11.244), (11.245), (11.251), (11.252) 以及 (11.257)—(11.260) 结合起来, 再由 (11.221), 我们得到了下述命题:

命题 11.3 设 **H0**, **H1**, **H2**$'$ 和 (6.177) 成立. 同样设连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*+2\}}$, $\mathbf{E}^Q_{\{l_*+1\}}$, $\mathbf{E}^{QQ}_{\{l_*\}}$ 和 $\mathbf{X}_{[l_*]}$ 对某个非负整数 l 成立. 并且连续性假设 $\mathbf{M}_{[m+1,l_*+1]}$ 对某个非负整数 $m \leqslant l$ 成立. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 l), 我们有

$$\begin{aligned}&\|\check{g}'\|_{2,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-2}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}})\\ &+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m+1,l+1]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})))\end{aligned} \tag{11.273}$$

我们接下来估计函数 ${}^{(i_1\cdots i_n)}\dot{g}'_{m,n}$ (见 (9.242)—(9.243)) 的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数, 其中 $n=l-m$. 注意到这里和第九章的 l 有着不同的意义. 我们将用 $\check{g}'$ 表示函数

${}^{(i_1\cdots i_n)}\dot{g}'_{m,n}$, 而我们已经在命题 11.3 估计过前者. 定义函数

$$
{}^{(i_1\cdots i_n)}w'_{m,n} = \sum_{k=0}^{m-1} R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^k \Lambda x'_{m-k-1,0} - m\Lambda^{(i_1\cdots i_n)}x'_{m-1,n} \quad (11.274)
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_n)}w''_{m,n} = &\sum_{k=0}^{n-1} R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(R_{i_{n-k}})}Z^{(i_1\cdots i_{n-k-1})}x'_{m,n-k-1}\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}{}^{(R_{i_{n-k}})}Z^{(i_1\overset{>i_{n-k}<}{\cdots} i_n)}x'_{m,n-1}
\end{aligned} \quad (11.275)
$$

由 (9.123), (9.131) 和 (9.134), (9.137), 函数 ${}^{(i_1\cdots i_n)}w'_{m,n}$, ${}^{(i_1\cdots i_n)}w''_{m,n}$ 不包含 $l+2$ 阶的主部. 由命题 9.1 和 9.2, 我们有

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_n)}g'_{m,n} - m\Lambda^{(i_1\cdots i_n)}x'_{m-1,n} - \sum_{k=0}^{n-1}{}^{(R_{i_{n-k}})}Z^{(i_1\overset{>i_{n-k}<}{\cdots} i_n)}x'_{m,n-1}\\
= &R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\breve{g}' + {}^{(i_1\cdots i_n)}w'_{m,n} + {}^{(i_1\cdots i_n)}w''_{m,n}\\
&+\sum_{k=0}^{m-1} R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^k y'_{m-k,0} + \sum_{k=0}^{n-1} R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{n-k})}y'_{m,n-k}
\end{aligned} \quad (11.276)
$$

代入 (11.220) 用 $\check{\breve{g}}'$ 表示 $\breve{g}'$, 首先考虑 $m=0$ 的情形. 我们有

$$
R_{i_n}\cdots R_{i_1}\breve{g}' = R_{i_n}\cdots R_{i_1}\check{\breve{g}}' + \xi\cdot{}^{(i_1\cdots i_n)}x_n + {}^{(i_1\cdots i_n)}u_n \quad (11.277)
$$

其中

$$
{}^{(i_1\cdots i_n)}u_n = \xi\cdot\sum_{s_1\neq\emptyset}((R)^{s_1}\mu)\not{d}(R)^{s_2}\mathrm{tr}\chi + \sum_{s_1\neq\emptyset}(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}\xi\cdot(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_2}x_0 \quad (11.278)
$$

与 (9.242) 比较, 我们得到

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_n)}\dot{g}'_{0,n} = &R_{i_n}\cdots R_{i_1}\check{\breve{g}}' + {}^{(i_1\cdots i_n)}u_n + {}^{(i_1\cdots i_n)}w''_{0,n}\\
&+\sum_{k=0}^{n-1} R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{n-k})}y'_{0,n-k}
\end{aligned} \quad (11.279)
$$

一个类似地计算意味着

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_n)}\dot{g}'_{m,n} = &R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\check{\breve{g}}'\\
&+{}^{(i_1\cdots i_n)}u'_{m-1,n} + {}^{(i_1\cdots i_n)}w'_{m,n} + {}^{(i_1\cdots i_n)}w''_{m,n}\\
&+\sum_{k=0}^{m-1} R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^k y'_{m-k,0} + \sum_{k=0}^{n-1} R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(i_1\cdots i_{n-k})}y'_{m,n-k}
\end{aligned}
$$

(11.280)

其中

$$
{}^{(i_1\cdots i_n)}u'_{m-1,n}=R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m-1}u'_{0,0}+{}^{(i_1\cdots i_n)}u''_{m-1,n} \tag{11.281}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_n)}u''_{m-1,n}=&R_{i_n}\cdots R_{i_1}u''_{m-1,0}\\
&+\xi\cdot\sum_{s_1\neq\emptyset}\not{d}(((R)^{s_1}\mu)(R)^{s_2}(T)^{m-1}\not{\Delta}\mu)\\
&+\sum_{s_1\neq\emptyset}(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}\xi\cdot\not{d}(R)^{s_2}x'_{m-1,0}
\end{aligned} \tag{11.282}
$$

$$
\begin{aligned}
u''_{m-1,0}=&\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!}(\xi\cdot\not{d}((T)^k\mu)(T)^{m-1-k}\not{\Delta}\mu\\
&+((\not{\mathcal{L}}_T)^k\xi)\cdot\not{d}(T)^{m-1-k}x'_{0,0})
\end{aligned} \tag{11.283}
$$

$$
u'_{0,0}=\xi\cdot\dot{x}_0+(\not{\mathcal{L}}_T\xi)\cdot x_0 \tag{11.284}
$$

其中

$$
\dot{x}_0=\mu\not{d}(T\mathrm{tr}\chi'-\not{\Delta}\mu)+(T\mu)\not{d}\mathrm{tr}\chi'-(\not{d}\mu)\not{\Delta}\mu+\not{d}(T\check{f}+\check{f}') \tag{11.285}
$$

则由这一章先前的结果, 我们最终得到了如下命题:

命题 11.4 设命题 11.3 的假设以及连续性假设 $\not{X}_{[(l+1)_*]}$ 和 $\mathbf{M}_{[m,(l+1)_*+1]}$ 成立, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_{l-m}}\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\dot{g}'_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ &C_l(1+t)^{-2}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}})\\
&+\delta_0((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m+1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}))
\end{aligned} \tag{11.286}
$$

当我们导出这个命题时, 我们需要用到如下引理:

引理 11.22 设 $A_1,\cdots,A_n$ 和 B 是作用在空间 X 上的线性算子. 则我们有

$$
[A_n\cdots A_1,B]=\sum_{m=0}^{n-1}A_n\cdots A_{n-m+1}[A_{n-m},B]A_{n-m-1}\cdots A_1
$$

证明 我们对 m 用归纳法, 再用命题 8.2 即可. □

现在我们可以给出 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Q'_{m,l-m}$ (见 (9.256)) 的估计. 这里我们只需估计 (9.256) 的第三项和第四项. 而这个估计可以直接得到. 所以我们得到

命题 11.5 在命题 11.3 的假设和连续性假设 $\mathcal{X}_{[(l+1)_*]}$ 以及 $\mathbf{M}_{[m,(l+1)_*+1]}$ 下, 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{(i_1\cdots i_{l-m})} Q'_{m,l-m}(t)\\&\leqslant C_l(1+t)^{-3}((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}})\\&\quad+\delta_0((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m+1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}))\end{aligned}$$

11.2.2 $P'_{m,l}$ 的估计

我们现在考虑关于 ${}^{(i_1\cdots i_n)}B'_{m,n}$ 的表达式 (9.259) 中的主部, 即

$$C(1+t)^{-1}({}^{(i_1\cdots i_n)}\bar{P}'^{(0)}_{m,n,a}(t)+(1+t)^{-1/2}\,{}^{(i_1\cdots i_n)}\bar{P}'^{(1)}_{m,n,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)$$

这里, ${}^{(i_1\cdots i_n)}\bar{P}'^{(0)}_{m,n,a}$, ${}^{(i_1\cdots i_n)}\bar{P}'^{(1)}_{m,n,a}$ 由 (9.215) 和 (9.216), 用 ${}^{(i_1\cdots i_n)}P'^{(0)}_{m,n}$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_n)}P'^{(1)}_{m,n}$ 定义, 这两项可以界定 ${}^{(i_1\cdots i_n)}P'_{m,n}$, 其定义见 (9.213):

$${}^{(i_1\cdots i_n)}P'_{m,n}(t)=(1+t)\|{}^{(i_1\cdots i_n)}\check{f}'_{m,n}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \tag{11.287}$$

我们将导出一个关于 ${}^{(i_1\cdots i_n)}P'_{m,n}(t)$ 的估计, 其中 $n=l-m$. 由于

$${}^{(i_1\cdots i_n)}\check{f}'_{m,n}=R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\check{f}'$$

所以由 (8.333), 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'_{m,l-m}\leqslant C\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\check{f}'_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}=C\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\check{f}'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{11.288}$$

回忆 (9.40):

$$\check{f}'=f'_0+\mu^2f'_1$$

其中

$$\begin{aligned}f'_0&=\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\underline{L}Th)\\f'_1&=\frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'(\not{\Delta}h)+\eta^{-1}\hat{T}^i(\not{\Delta}\psi_i)\end{aligned}$$

首先我们考虑来自 f'_0 的贡献. 由于

$$Th = T\psi_0 - \sum_i \psi_i T\psi_i$$
$$\underline{L}Th = \underline{L}T\psi_0 - \sum_i \underline{L}\psi_i T\psi_i - \sum_i \psi_i \underline{L}T\psi_i$$

所以如果像第十章那样定义:

$$m_T^0 = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}, \quad m_T^i = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\psi_i \tag{11.289}$$

则我们有

$$m = m_T^\alpha (T\psi_\alpha) \tag{11.290}$$

分解

$$f'_0 = f'_{0,P} + f'_{0,N} \tag{11.291}$$

其中 $f'_{0,P}$ 是 f'_0 的主部:

$$f'_{0,P} = m_T^\alpha (\eta^{-1}\kappa LT\psi_\alpha + 2T^2\psi_\alpha) \tag{11.292}$$

还有低阶项

$$f'_{0,N} = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\sum_i \underline{L}\psi_i T\psi_i \tag{11.293}$$

从而我们得到

$$\begin{aligned} R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^m f'_0 = {} & 2m_T^\alpha R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+2}\psi_\alpha \\ & + \eta^{-1}\kappa m_T^\alpha R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^m LT\psi_\alpha + {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n'_{m,l-m} \end{aligned} \tag{11.294}$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n'_{m,l-m}$ 在 $l+1$ 阶的情形由下式给出:

$$\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n'_{m,l-m}\\
&=2R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(\sum_{k=1}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}((T)^k m_T^\alpha)((T)^{m-k+2}\psi_\alpha))\\
&\quad+2\sum_{s_1\neq\emptyset}((R)^{s_1}m_T^\alpha)((R)^{s_2}(T)^{m+2}\psi_\alpha)\\
&\quad+R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(\sum_{k=1}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}((T)^k(\alpha^{-1}\kappa m_T^\alpha))((T)^{m-k}LT\psi_\alpha))\\
&\quad+\sum_{s_1\neq\emptyset}((R)^{s_1}(\alpha^{-1}\kappa m_T^\alpha))((R)^{s_2}(T)^m LT\psi_\alpha)\\
&\quad+R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m f'_{0,N}
\end{aligned}\tag{11.295}$$

由 (11.294), 考虑到 (10.184), 我们有

$$\begin{aligned}
&\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m f'_0\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant(|\ell|+C\delta_0(1+t)^{-1})\sum_\alpha\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+2}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\quad+C\sum_\alpha\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m LT\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}+\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n'_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}
\end{aligned}\tag{11.296}$$

这里常数 C 不依赖于 ℓ. 并且用推论 11.2.c 中关于 Λ 的估计, 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{i_1\cdots i_{l-m}}\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n'_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q\\
&\quad+(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l]}+\delta_0(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))
\end{aligned}\tag{11.297}$$

接下来考虑 $\check{f}'$ 中 $\mu^2 f'_1$ 对 $R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\check{f}'$ 的贡献. 同样, 在这里我们只考虑主部. 由于

$$\not{d}h=\not{d}\psi_0-\sum_i\psi_i\not{d}\psi_i$$

$$\not{\Delta}h=\not{\Delta}\psi_0-\sum_i\psi_i\not{\Delta}\psi_i-\sum_i\not{d}\psi_i\cdot\not{d}\psi_i$$

我们有

$$\mu^2 f'_1=\frac{\mu^2}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'(\not{\Delta}\psi_0-\sum_i\psi_i\not{\Delta}\psi_i-\sum_i\not{d}\psi_i\cdot\not{d}\psi_i)+\eta^{-1}\mu^2\hat{T}^i(\not{\Delta}\psi_i)\tag{11.298}$$

这里我们定义

$$\tilde{m}^0 = \frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})', \quad \tilde{m}^i = -\frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'\psi_i + \eta^{-1}\hat{T}^i \tag{11.299}$$

我们有如下分解:

$$f_1' = f_{1,P}' + f_{1,N}' \tag{11.300}$$

f_1' 的主部如下:

$$f_{1,P}' = \tilde{m}^\alpha \not{\Delta}\psi_\alpha \tag{11.301}$$

而 $f_{1,N}'$ 是低阶项

$$f_{1,N}' = -\frac{1}{2\eta^2}(\frac{\rho}{\rho'})'\sum_i \not{d}\psi_i \cdot \not{d}\psi_i \tag{11.302}$$

然后我们得到

$$R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m(\mu^2 f_1') = \mu^2\tilde{m}^\alpha R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\psi_\alpha + {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n''_{m,l-m} \tag{11.303}$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n''_{m,l-m}$ 是 $l+1$ 阶的:

$$\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n''_{m,l-m} = & R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(\sum_{k=1}^m \frac{m!}{k!(m-k)!}((T)^k(\mu^2\tilde{m}^\alpha))((T)^{m-k}\not{\Delta}\psi_\alpha)) \\
& + \sum_{s_1\neq\emptyset}((R)^{s_1}(\mu^2\tilde{m}^\alpha))((R)^{s_2}(T)^m\not{\Delta}\psi_\alpha) \\
& + R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m(\mu^2 f_{1,N}')
\end{aligned} \tag{11.304}$$

由 (11.303), 我们有

$$\begin{aligned}
& \|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m(\mu^2 f_1')\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant & C(1+\log(1+t))\sum_\alpha \|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} + \|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n''_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}
\end{aligned} \tag{11.305}$$

其中 C 不依赖于 ℓ.

低阶项 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n''_{m,l-m}$ 可以由命题 11.1 和命题 11.2 及其推论直接估计:

$$\begin{aligned}
& \max_{i_1\cdots i_{l-m}} \|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}n''_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant & C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \\
& \cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}) \\
& + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l]} + (1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))
\end{aligned} \tag{11.306}$$

回到 (11.296). 我们的目标是将

$$R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+2}\psi_\alpha \quad 和 \quad R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m}LT\psi_\alpha$$

分别表示为

$$TR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha \quad 和 \quad LR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha$$

加上低阶项. 然后由 (10.217), 我们可以用

$$\begin{aligned}
&(|\ell|+C\delta_0(1+t)^{-1})\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]}\\
&+C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]}\\
&+C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}} \qquad (11.307)
\end{aligned}$$

估计 (11.296) 右端的前两项, 再加上类似于 (11.297) 的低阶项.

由 (10.205) 和 (10.207),

$$\begin{aligned}
&TR_{i_n}\cdots R_{i_1}-R_{i_n}\cdots R_{i_1}T\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(R_{i_{n-k}})}\Theta R_{i_{n-k-1}}\cdots R_{i_1} \qquad (11.308)
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+2}\psi_\alpha\\
&=TR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\\
&-\sum_{k=0}^{l-m-1}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_{l-m-k+1}}{}^{(R_{i_{l-m-k}})}\Theta R_{i_{l-m-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha \qquad (11.309)
\end{aligned}$$

为了估计右端求和式的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数, 我们注意到它由

$$\sum_{k=0}^{l-m-1}\sum_{|s_1|+|s_2|=k}(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}{}^{(R_{i_{l-m-k}})}\Theta\cdot\not{d}(R)^{s_2'}(T)^{m+1}\psi_\alpha \qquad (11.310)$$

给出. 这里在里面的求和式中, 我们考虑集合 $\{l-m-k+1,\cdots,l-m\}$ 的所有有序分解: $\{s_1,s_2\}$. 同样,

$$s_2'=s_2\bigcup\{1,\cdots,l-m-k-1\}$$

为了估计 (11.310) 内部求和式中通项的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 的范数, 我们将运用引理 10.20. 所以我们得出 (11.310) 有如下估计:

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0(1+t)^{-2}((1+\log(1+t))^2\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\max_i\|^{(R_i)}\Theta\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}})\\ \leqslant\ &C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\ &\cdot((1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[0,l]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\end{aligned}\tag{11.311}$$

然后由 (11.309) 有

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+2}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant&\sum_\alpha\|TR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ &+C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\ &\cdot((1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[0,l]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\end{aligned}\tag{11.312}$$

类似地, 我们有

$$LR_{i_n}\cdots R_{i_1}-R_{i_n}\cdots R_{i_1}L=\sum_{k=0}^{n-1}R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(R_{i_{n-k}})}ZR_{i_{n-k-1}}\cdots R_{i_1}\tag{11.313}$$

从而取 $n=l-m$ 有

$$\begin{aligned}&R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}L(T)^{m+1}\psi_\alpha\\ =\ &LR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\\ &-\sum_{k=0}^{l-m-1}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_{l-m-k+1}}{}^{(R_{i_{l-m-k}})}ZR_{i_{l-m-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\end{aligned}\tag{11.314}$$

由引理 11.22, 我们有

$$[(T)^m,L]=-\sum_{k=0}^{m-1}(T)^k\Lambda(T)^{m-k-1}\tag{11.315}$$

所以

$$\begin{aligned}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^mLT\psi_\alpha=\ &R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}L(T)^{m+1}\psi_\alpha\\ &-\sum_{k=0}^{m-1}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^k\Lambda(T)^{m-k}\psi_\alpha\end{aligned}\tag{11.316}$$

现在, μ 与 (11.314) 右端求和式的乘积的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$C(1+\log(1+t))\sum_{k=0}^{l-m-1}\|^{(R_{i_{l-m-k}})}Z\cdot\not{d}R_{i_{l-m-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{2,[k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \quad (11.317)$$

界定. 而由推论 10.1.i 和推论 10.2.i, 我们知道这一项被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))((1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}\\&+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\end{aligned} \quad (11.318)$$

界定. 同样, μ 与 (11.316) 右端求和式的乘积的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$C(1+\log(1+t))\sum_{k=0}^{m-1}\|\Lambda\cdot\not{d}(T)^{m-k}\psi_\alpha\|_{2,[k,l-m+k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \quad (11.319)$$

界定. 再由推论 11.1.c 和推论 11.2.c, 我们知道这一项被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\&\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}})\\&+(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m-1,l]}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-2]})))\end{aligned} \quad (11.320)$$

界定. 由 (11.318) 和 (11.320), 通过 (11.314), (11.319), 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m LT\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\\leqslant&\sum_\alpha\|\mu LR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&+C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\&\cdot((1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}\\&+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})\end{aligned} \quad (11.321)$$

由 (11.307), 不等式 (11.312), (11.321) 以及 (11.297), 我们通过 (11.296) 得到

$$\begin{aligned}&\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m f_0'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\\leqslant&(|\ell|+\delta_0(1+t)^{-1})\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]}\\&+C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]}\\&+C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}+C_l\delta_0(1+t)^{-1}((1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}}\\&+(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))\end{aligned} \quad (11.322)$$

最后我们转向 (11.305). 这里我们的目的是将 $R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\psi_\alpha$ 表示为 $\not\Delta(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha)$ 加上低阶项. 由于

$$\not\Delta\psi_\alpha = \mathrm{tr}(\not g^{-1})\cdot \not D^2\psi_\alpha$$

我们有

$$\begin{aligned}
&R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not\Delta\psi_\alpha\\
&= R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m(\not g^{-1})^{AB}(\not D^2\psi_\alpha)_{AB}\\
&= (\not g^{-1})^{AB}(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-m}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(\not{\mathcal{L}}_T)^m(\not D^2\psi_\alpha)_{AB})\\
&\quad+\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-m}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\sum_{k=1}^m\frac{m!}{k!(m-k)!}(((\not{\mathcal{L}}_T)^k(\not g^{-1}))^{AB}(\not{\mathcal{L}}_T)^{m-k}(\not D^2\psi_\alpha)_{AB})\\
&\quad\sum_{|s_1|+|s_2|=l-m,s_1\neq\emptyset}(((\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}(\not g^{-1}))^{AB}(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_2}(\not{\mathcal{L}}_T)^m(\not D^2\psi_\alpha)_{AB})
\end{aligned}\tag{11.323}$$

将 (11.83) 运用到 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\not d\psi_\alpha$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-m}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(\not{\mathcal{L}}_T)^m\not D^2\psi_\alpha\\
&=\not D^2(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha)+{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}c_{m,l-m}[\not d\psi_\alpha]
\end{aligned}\tag{11.324}$$

所以 (11.323) 右端第一项由

$$\begin{aligned}
&(\not g^{-1})^{AB}(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-m}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}(\not{\mathcal{L}}_T)^m(\not D^2\psi_\alpha)_{AB})\\
&=\not\Delta(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha)+(\not g^{-1})^{AB}({}^{(i_1\cdots i_{l-m})}c_{m,l-m}[\not d\psi_\alpha])_{AB}
\end{aligned}\tag{11.325}$$

给出. 考虑到如下事实:

$$\not{\mathcal{L}}_T(\not g^{-1}) = -\not g^{-1}\cdot{}^{(T)}\not\pi\cdot\not g^{-1}$$

再由推论 10.2.d, 推论 11.1.c, 推论 11.2.c 和推论 11.2.d, 我们推出 μ 与 (11.323) 右端第一项的乘积的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$\begin{aligned}
&C_l(1+\log(1+t))((1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|\not D^2\psi_\alpha\|_{2,[m-1,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\delta_0(1+t)^{-3}(\mathcal{T}_{[m,l]}+(1+t)^{-2}\|{}^{(R_j)}\not\pi\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}))\\
&\leqslant C_l(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))\\
&\cdot((1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}\\
&+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m-1,l]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})))
\end{aligned}\tag{11.326}$$

界定. 类似地, 考虑到如下事实:

$$\not{\mathcal{L}}_{R_i}(\not{g}^{-1}) = -\not{g}^{-1} \cdot {}^{(R_i)}\not{\pi} \cdot \not{g}^{-1}$$

再由推论 10.1.d, 推论 10.2.d 和推论 11.2.d, 我们推出 μ 与 (11.323) 右端第二项的乘积的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$\begin{aligned}
&C_l(1+\log(1+t))(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|\not{D}^2\psi_\alpha\|_{2,[m,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\delta_0(1+t)^{-3}\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}})\\
\leqslant\ &C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))((1+\log(1+t))\mathcal{W}_{\{l+1\}}\\
&+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l-1\}}\\
&+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{B}_{[m-1,l]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})
\end{aligned} \tag{11.327}$$

界定. 最后为了估计 μ 与 (11.325) 右端第二项的乘积的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数, 我们需要用引理 11.9 中的表达式以及引理 10.10, 引理 10.11, 推论 11.1.c 和推论 11.2.c. 我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{k\leqslant m,n\leqslant l-k}\max_{i_1\cdots i_n}\|{}^{(i_1\cdots i_n)}c_{k,n}[\not{d}\psi_\alpha]\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ &C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|\not{d}\psi_\alpha\|_{2,[m,l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
&+\|\not{d}\psi_\alpha\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}}\\
&+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}))
\end{aligned}$$

所以我们得到了如下界:

$$\begin{aligned}
&C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))\\
&\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}})\\
&+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})
\end{aligned} \tag{11.328}$$

由 (11.326)—(11.328), 以及 (11.323), (11.325), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ &\sum_\alpha\|\mu\not{\Delta}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha)\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&+C_l(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))
\end{aligned}$$

$$\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}})$$
$$+\delta_0((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]})) \tag{11.329}$$

进一步, 由 **H1**, (11.329) 右端的第一项被

$$\sum_\alpha \|\mu \not\Delta(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha)\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C(1+t)^{-1}\sum_{\alpha,j}\|\mu \not d(R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha)\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_{\alpha,j}\mathcal{E}'_1[R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha]} \tag{11.330}$$

界定. (11.329)—(11.330) 以及 (11.306) 通过 (11.303) 意味着

$$\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m(\mu^2 f'_1)\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{3/2}\sqrt{\sum_{\alpha,j}\mathcal{E}'_1[R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha]}$$
$$+C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$
$$\cdot((1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}})$$
$$+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]}+(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}))) \tag{11.331}$$

(11.322) 和 (11.331) 推出最终的命题:

命题 11.6 在命题 11.5 的假设下, 我们有

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'_{m,l-m}\leqslant {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(0)}_{m,l-m}+{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(1)}_{m,l-m}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(0)}_{m,l-m}=|\ell|\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]}$$

以及

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(1)}_{m,l-m} \\
&= C\delta_0(1+t)^{-1}\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]} \\
&\quad + C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]} \\
&\quad + C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{3/2}\sqrt{\sum_{\alpha,j} \mathcal{E}_1'[R_j R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m}\psi_\alpha]} \\
&\quad + (C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) + C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2)\mathcal{W}_{\{l+1\}} \\
&\quad + C_l\delta_0(1+t)^{-1}((1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}} + (1+t)^{-1}(\mathcal{B}_{[m,l+1]} \\
&\quad + (1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]})))
\end{aligned}
$$

第十二章　声学假设的证明．仅次于最高阶的 χ 的球面导数和 μ 的空间导数的估计

在这一章的第一部分我们将看到在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中由假设 $\mathbf{E}_{\{1\}}$ 和 $\mathbf{E}^Q_{\{0\}}$ 以及一些在 $\Sigma^{\epsilon_0}_0$ 上的关于初值的假设可以得出 $\kappa, \lambda_i, y'_i, y_i$ 的估计, 以及 r 的上界和下界. 进一步, 我们可以看到由同样的假设可以推出 $W^s_{\epsilon_0}$ 中的 $\mathbf{H0}$.

在这一章的第二部分我们可以看到在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中, 由 $\mathbf{E}_{\{l+2\}}, \mathbf{E}^Q_{\{l+1\}}$ 和 $\mathbf{E}^{QQ}_{\{l\}}$, 以及 $\Sigma^{\epsilon_0}_0$ 上的关于初值的假设可以推出 $\mathbf{X}_{[l]}$ 以及 $\mathbf{H1}, \mathbf{H2}$ 和 $\mathbf{H2}'$. 进一步, 我们可以看到对初值加上合适的假设同样可以证明 $\mathbf{M}_{[m,l+1]}$ 对 $m = 0, \cdots, l+1$ 成立.

最后在这一章的第三部分我们将导出 $\mathcal{A}_{[l]}$ 和 $\mathcal{B}_{[m+1,l+1]}$ 对 $m = 0, \cdots, l$ 的估计. 同样我们将用到 $W^s_{\epsilon_0}$ 中的假设 $\mathbf{E}_{\{l_*+2\}}, \mathbf{E}^Q_{\{l_*+1\}}, \mathbf{E}^{QQ}_{\{l_*\}}$ 以及 $\Sigma^{\epsilon_0}_0$ 关于初值的假设.

12.1　λ_i, y'_i, y_i 和 r 的估计. 假设 H0 的建立

命题 12.1　设 $\mathbf{E}_{\{1\}}$ 和 $\mathbf{E}^Q_{\{0\}}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 则如果 δ_0 足够小, 对 $t \in [0, s]$ 我们有

$$\|\kappa - 1\|_{L^\infty(\Sigma^{\epsilon_0}_t)} \leqslant C\delta_0(1 + \log(1+t))$$

其中常数 C 不依赖于 s.

证明 回忆第三章, 我们有

$$L\kappa = \eta^{-1}m + \kappa e' \tag{12.1}$$

其中

$$m = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}T(h) \tag{12.2}$$

且

$$e' = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dh}Lh - \alpha^{-1}\hat{T}^i(L\psi_i) - \alpha^{-1}L\alpha \tag{12.3}$$

连续性假设 $\mathbf{E}_{\{0\}}$ 意味着

$$\|h\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.4}$$

和

$$\|\eta^{-1} - 1\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.5}$$

由第六章, 我们有

$$|\hat{T}^i| \leqslant 1, \quad |L^i| \leqslant C \tag{12.6}$$

所以 $\mathbf{E}_{\{0\}}^Q$ 意味着

$$\|\hat{T}^i(L\psi_i)\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{12.7}$$

同样由 $\mathbf{E}_{\{1\}}$ 和 $\mathbf{E}_{\{0\}}^Q$, 我们有

$$\|Th\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad \|Lh\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{12.8}$$

从而

$$\alpha^{-1}|m| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}, \quad |e'| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{12.9}$$

在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立.

由

$$L(\kappa - 1) = e'(\kappa - 1) + \alpha^{-1}m + e' \tag{12.10}$$

以及注意到对任意函数 f 有

$$L|f| \leqslant |Lf|$$

我们由 (12.9) 得到

$$L|\kappa-1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}|\kappa-1| + C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.11}$$

把这个不等式沿着 L 的积分曲线积分以及注意到在 Σ_0 上有

$$\kappa = 1$$

则命题得证. □

回忆第六章:

$$\lambda_i = \bar{g}(\mathring{R}_i, \hat{T}) \tag{12.12}$$

引理 12.1 设 $\mathbf{E}_{\{1\}}, \mathbf{E}_{\{0\}}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 并且设 **H0** 在 $W_{\epsilon_0}^{s_0}$ 中成立, 其中 $s_0 \in (0, s]$. 则如果 δ_0 足够小, 对 $t \in [0, s_0]$ 我们有

$$\max_i \|\lambda_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))$$

证明 可以用我们导出 (6.143) 的方法证明引理. 注意到当我们导出 $\kappa^{-1}\zeta$ 的估计时, 我们要用 **H0**. □

注意到命题 12.1 的结论与 (6.97) 相同, 所以在命题 12.1 的假设下, 下界 (6.128) 和 (6.129) 成立:

$$r \geqslant 1 - u + t - C\delta_0 u(1+\log(1+t)) \tag{12.13}$$

和

$$r \geqslant C^{-1}(1+t) \tag{12.14}$$

前提是 δ_0 足够小.

回忆第六章中的投影算子 Σ:

$$\Sigma_j^i = \delta_j^i - r^{-2}x^i x^j \tag{12.15}$$

以及

$$|\Sigma\hat{T}|^2 = r^{-2}\sum_i(\lambda_i)^2 \tag{12.16}$$

则引理 12.1 与 (12.14) 共同意味着

$$|\Sigma\hat{T}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.17}$$

在 $W_{\epsilon_0}^{s_0}$ 中成立.

回忆第六章:

$$N = \frac{x^i}{r}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{12.18}$$

以及

$$0 \leqslant 1+\bar{g}(N,\hat{T}) \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{12.19}$$

并且在第六章中有

$$y' = \Sigma\hat{T} + (1+\bar{g}(N,\hat{T}))N$$

运用与第六章中相同的方法 ((6.169)—(6.177)), 我们推出

$$|r-1-t+u| \leqslant C\delta_0 u(1+\log(1+t)) \tag{12.20}$$

$$|\frac{1}{r} - \frac{1}{1-u+t}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{12.21}$$

和

$$|y'| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.22}$$

$$\max_i \|y^i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.23}$$

注意我们只用了命题 12.1 和引理 12.1 (对 $t \in [0, s_0]$ 成立) 的假设来得到这些结论.

我们现在着手建立 **H0**.

命题 12.2 考虑曲面 $S_{t,u}$ 使得

$$\inf_{S_{t,u}} r > 0, \quad \sup_{S_{t,u}} |y'| < 1$$

则对每个 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 我们有

$$|\xi|^2 \leqslant (1-\sup_{S_{t,u}}|y'|^2)^{-1}(\inf_{S_{t,u}} r)^{-2}\sum_{i=1}^{3}(\xi(R_i))^2$$

证明 由于 $R_i = \Pi \mathring{R}_i$, 我们有

$$(R_i)^a = \Pi_b^a (\mathring{R}_i)^b = \Pi_b^a \epsilon_{ikb} x^k \tag{12.24}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} (R_i)^a (R_i)^c &= \sum_{i=1}^{3} \Pi_b^a \epsilon_{ikb} x^k \Pi_d^c \epsilon_{ild} x^l \\ &= (\delta_{kl}\delta_{bd} - \delta_{kd}\delta_{bl}) x^k x^l \Pi_b^a \Pi_d^c \\ &= (r^2 \delta_{bd} - x^b x^d) \Pi_b^a \Pi_d^c \end{aligned} \tag{12.25}$$

其中我们用到了如下事实:

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ikb} \epsilon_{ild} = \delta_{kl}\delta_{bd} - \delta_{kd}\delta_{bl} \tag{12.26}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3} (\xi(R_i))^2 = (\sum_{i=1}^{3} (R_i)^a (R_i)^c) \xi_a \xi_c = (r^2 \delta_{bd} - x^b x^d)(\Pi_b^a \xi_a)(\Pi_d^c \xi_c) \tag{12.27}$$

由于 ξ 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式, 我们有

$$\Pi_b^a \xi_a = \xi_b$$

所以我们得到

$$\sum_{i=1}^{3} (\xi(R_i))^2 = (r^2 \delta_{bd} - x^b x^d) \xi_b \xi_d = r^2 (|\xi|^2 - (\xi(N))^2) \tag{12.28}$$

回忆 (6.174),

$$y' = \hat{T} + N \tag{12.29}$$

由这个和 $\xi(\hat{T}) = 0$, 我们有

$$\xi(N) = \xi(y') = y'^a \xi_a \tag{12.30}$$

所以有

$$|\xi(N)| = |\xi(y')| \leqslant |y'||\xi| \tag{12.31}$$

和

$$|\xi|^2 - (\xi(N))^2 \geqslant (1 - \sup_{S_{t,u}} |y'|^2)|\xi|^2 \tag{12.32}$$

代入 (12.28) 中有

$$\sum_{i=1}^{3} (\xi(R_i))^2 \geqslant (\inf_{S_{t,u}} r)^2 (1 - \sup_{S_{t,u}} |y'|^2)|\xi|^2 \tag{12.33}$$

命题得证. □

推论 12.2.a 设存在正常数 ϵ_1 和 $\epsilon_2 < 1$ 使得

$$\inf_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} r \geqslant \epsilon_1(1+t), \quad \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |y'|^2 \leqslant 1 - \epsilon_2$$

则 **H0** 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上成立. 事实上对任意 $S_{t,u}$ 上的可微函数 f, 我们在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上有

$$|\not{d} f|^2 \leqslant C(1+t)^{-2} \sum_i (R_i f)^2$$

其中

$$C = \frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_1^2}$$

证明 将命题 12.2 运用到 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 $\xi = \not{d} f$ 即可. □

由于

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} u = \epsilon_0 \leqslant \frac{1}{2}$$

固定任意的

$$\epsilon_1 < \frac{1}{2}$$

则 (12.13) 意味着

$$\inf_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} r > \epsilon_1(1+t) \tag{12.34}$$

对 $t \in [0, s_0]$ 成立, 前提是 δ_0 足够小. 同样固定任意的 $\epsilon_2 < 1$, (12.22) 意味着

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |y'|^2 < 1 - \epsilon_2 \tag{12.35}$$

对 $t \in [0, s_0]$ 成立, 前提是 δ_0 足够小.

这里我们用了建立在 **H0** 上的引理 12.1 来导出 (12.34)—(12.35). 我们将看到 **H0** 实际上在 $[0,s]$ 中成立. 设 $\bar{s}_0$ 是 $s_0 \in [0,s]$ 使得 **H0** 在 $W_{\epsilon_0}^{s_0}$ 中成立的最大值. 我们将看到, 事实上 $\bar{s}_0 = s$. 为此, 我们首先设 $\bar{s}_0 < s$. 由于 (12.17), (12.19) 和 (12.22) 在 $W_{\epsilon_0}^{\bar{s}_0}$ 中成立, 所以 (12.34) 和 (12.35) 同样对 $t \in [0, \bar{s}_0]$ 成立, 特别地, 在 $t = \bar{s}_0$ 也成立. 然而, (12.34) 和 (12.35) 是严格的不等式, 由连续性, 它们将在某个小区间 $[\bar{s}_0, s_*) \subset [\bar{s}_0, s]$ 上成立. 这就与 $\bar{s}_0$ 的最大性矛盾了. 所以 **H0** 在 $W_{\epsilon_0}^{s}$ 中成立. 在引理 12.1 中取 $s_0 = s$, 我们得到了如下命题:

命题 12.3 设 $\mathbf{E}_{\{1\}}, \mathbf{E}_{\{0\}}^{Q}$ 在 $W_{\epsilon_0}^{s}$ 中成立. 则如果 δ_0 足够小, **H0** 在 $W_{\epsilon_0}^{s}$ 中成立. 并且在 $W_{\epsilon_0}^{s}$ 中我们有

$$1 + t - u - C\delta_0 u(1 + \log(1+t)) \leqslant r \leqslant 1 + t + \min\{0, -u + C\delta_0 u(1 + \log(1+t))\}$$
$$|y'| \leqslant C\delta_0 (1+t)^{-1}(1 + \log(1+t))$$

以及对 $t \in [0,s]$ 有

$$\|\kappa - 1\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1 + \log(1+t))$$
$$\max_i \|\lambda_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1 + \log(1+t))$$
$$\max_i \|y^i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1 + \log(1+t))$$

12.2 正定性假设 H1, H2 和 H2′. χ' 的估计

我们首先导出一个与命题 12.2 相类似的命题.

命题 12.4 考虑一个曲面 $S_{t,u}$ 使得在其上面有

$$\inf_{S_{t,u}} r > 0, \quad \sup_{S_{t,u}} |y'| < 1$$

则对每个 $S_{t,u}$ 上的二阶对称协变张量场 ϑ, 我们有

$$|\vartheta|^2 \leqslant (1 - \sup_{S_{t,u}} |y'|^2)^{-2} (\inf_{S_{t,u}} r)^{-4} \sum_{i,j=1}^{3} (\vartheta(R_i, R_j))^2$$

在 $S_{t,u}$ 上成立.

证明　我们有

$$\sum_{i,j}(\vartheta(R_i,R_j))^2=(\sum_{i=1}^{3}(R_i)^a(R_i)^c)(\sum_{j=1}^{3}(R_j)^b(R_j)^d)\vartheta_{ab}\vartheta_{cd} \tag{12.36}$$

将 (12.25) 代入右端的前两个因子中. 由于 $x^b=rN^b=r(y'^b-\hat{T}^b)$ 以及 $\hat{T}^b\Pi_b^a=0$, 我们有

$$x^b\Pi_b^a=ry'^b\Pi_b^a \tag{12.37}$$

(12.25) 变为

$$\sum_{i=1}^{3}(R_i)^a(R_i)^c=r^2(\delta_{bd}-y'^by'^d)\Pi_b^a\Pi_d^c \tag{12.38}$$

将 (12.38) 代入 (12.36), 我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{3}(\vartheta(R_i,R_j))^2&=r^4(\delta_{ac}-y'^ay'^c)(\delta_{bd}-y'^by'^d)\vartheta_{ab}\vartheta_{cd}\\&=r^4(|\vartheta|^2-2|i_{y'}\vartheta|^2+(\vartheta(y',y'))^2)\end{aligned} \tag{12.39}$$

其中

$$(i_{y'}\vartheta)_b=y'^a\vartheta_{ab} \tag{12.40}$$

考虑表达式

$$|\vartheta|^2-2|i_{y'}\vartheta|^2+(\vartheta(y',y'))^2$$

在给定的一个点, 由直角坐标的一个旋转, 我们可以取 $y'^2=y'^3=0$. 从而这个表达式变为

$$\begin{aligned}&(1-(y'^1)^2)^2(\vartheta_{11})^2+(\vartheta_{22})^2+(\vartheta_{33})^2+2(1-(y'^1)^2)((\vartheta_{12})^2+(\vartheta_{13})^2)+2(\vartheta_{23})^2\\&\geqslant(1-(y'^1)^2)^2((\vartheta_{11})^2+(\vartheta_{22})^2+(\vartheta_{33})^2+2(\vartheta_{12})^2+2(\vartheta_{13})^2+2(\vartheta_{23})^2)\\&=(1-|y'|^2)^2|\vartheta|^2\end{aligned}$$

我们得到

$$|\vartheta|^2-2|i_{y'}\vartheta|^2+(\vartheta(y',y'))^2\geqslant(1-|y'|^2)^2|\vartheta|^2 \tag{12.41}$$

所以 (12.39) 意味着

$$\sum_{i,j=1}^{3}(\vartheta(R_i,R_j))^2 \geqslant r^4(1-|y'|^2)^2|\vartheta|^2 \tag{12.42}$$

从而命题得证. □

现在回到第三章中关于 χ 的传输方程:

$$L\chi_{AB} = e\chi_{AB} + \chi_A^C\chi_{BC} - \alpha'_{AB} \tag{12.43}$$

由直接计算有 (见第四章)

$$\alpha'_{AB} = {\alpha'}_{AB}^{[P]} + \alpha_{AB}^{[N]} \tag{12.44}$$

其中

$${\alpha'}_{AB}^{[P]} = -\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\not{D}^2 h(X_A, X_B) \tag{12.45}$$

以及 $\alpha_{AB}^{[N]}$ 由 (4.25) 和 (4.26) 给出.

考虑到

$$\begin{aligned}\not{\mathcal{L}}_L\not{g} &= 2\chi \\ \chi' &= \chi - \frac{\not{g}}{1-u+t}\end{aligned} \tag{12.46}$$

我们得到了如下关于 χ' 的传输方程:

$$L\chi'_{AB} = e\chi'_{AB} + (\not{g}^{-1})^{CD}\chi'_{AD}\chi'_{BC} + \frac{e\not{g}_{AB}}{1-u+t} - \alpha'_{AB} \tag{12.47}$$

引理 12.2 设 $\mathbf{E}_{\{2\}}, \mathbf{E}_{\{1\}}^{Q}, \mathbf{E}_{\{0\}}^{QQ}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立, 并且初值满足

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0$$

进一步, 设 **H1** 在 $W_{\epsilon_0}^{s_0}$ 中对某个 $s_0 \in (0,s]$ 成立. 则假设 δ_0 足够小, 对 $t\in[0,s_0]$ 我们有

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

证明 由假设和 e 的表达式, 我们推出

$$\|e\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{12.48}$$

再由 **H0** 和 **H1** 以及 α'_{AB} 的表达式, 我们有

$$\|\alpha'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3} \tag{12.49}$$

这里我们用到了 $S_{t,u}$ 上的对称二阶协变张量场 $\psi\!\!\!/$ 的模长被 $C\delta_0(1+t)^{-2}$ 界定. 事实上, 由于

$$\psi\!\!\!/_{AB} = X_A^i(X_B\psi_i)$$

我们有

$$\begin{aligned}
|\psi\!\!\!/|^2 &= (g\!\!\!/^{-1})^{AC}(g\!\!\!/^{-1})^{BD}X_A^i(X_B\psi_i)X_C^i(X_D\psi_i)\\
&= (g^{-1})^{ij}(X_B\psi_i)(X_D\psi_j)(g\!\!\!/^{-1})^{BD} - \hat{T}^i\hat{T}^j(X_B\psi_i)(X_D\psi_j)(g\!\!\!/^{-1})^{BD}\\
&= \sum_i |d\!\!\!/\psi_i|^2 - |\psi\!\!\!/_{\hat{T}}|^2 \leqslant \sum_i |d\!\!\!/\psi_i|^2 \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-4}
\end{aligned}$$

同样, 我们用到了如下事实: 由 **H1** 有

$$|D\!\!\!/^2 h| \leqslant C(1+t)^{-1}\max_i |\mathcal{L}\!\!\!/_{R_i} d\!\!\!/ h| \quad 在 \quad W_{\epsilon_0}^{s_0} \text{ 上}$$

所以由 $\mathcal{L}\!\!\!/_{R_i} d\!\!\!/ h = d\!\!\!/ R_i h$, 再由 **H0**, 我们有

$$|\mathcal{L}\!\!\!/_{R_i} d\!\!\!/ h| \leqslant C(1+t)^{-1}\max_j |R_j R_i h| \quad 在 \quad W_{\epsilon_0}^{s} \text{ 上}$$

所以

$$|D\!\!\!/^2 h| \leqslant C(1+t)^{-2}\max_{i,j} |R_i R_j h| \quad 在 \quad W_{\epsilon_0}^{s_0} \text{ 上}$$

从而由 $\mathbf{E}_{\{2\}}$ 有

$$\|D\!\!\!/^2 h\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3} \quad 对于 \quad t \in [0, s_0]$$

我们可以将方程 (12.47) 写成如下形式:

$$\mathcal{L}\!\!\!/_L \chi' = \chi' \cdot \chi' + e\chi' + \frac{g\!\!\!/ e}{1-u+t} - \alpha' \tag{12.50}$$

其中

$$(\chi' \cdot \chi')_{AB} = \chi'_{AC}\chi'_{BD}(g\!\!\!/^{-1})^{CD}$$

现在设 ϑ, ϑ' 是 $S_{t,u}$ 上一对二阶对称协变张量场. 它们关于声学度量 $\not g$ 的内积为

$$(\vartheta, \vartheta') = (\not g^{-1})^{AC}(\not g^{-1})^{BD}\vartheta_{AB}\vartheta'_{CD} \tag{12.51}$$

由

$$\not{\mathcal{L}}_L(\not g^{-1})^{AB} = -2\chi^{AB}$$

我们有

$$L(\vartheta, \vartheta') = (\not{\mathcal{L}}_L\vartheta, \vartheta') + (\vartheta, \not{\mathcal{L}}_L\vartheta') - 4\mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi \cdot \vartheta') \tag{12.52}$$

特别地, 取 $\vartheta' = \vartheta$, 我们得到

$$|\vartheta|L|\vartheta| = \frac{1}{2}L(\vartheta, \vartheta) = (\vartheta, \not{\mathcal{L}}_L\vartheta) - 2\mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi \cdot \vartheta) \tag{12.53}$$

由

$$\chi = \frac{\not g}{1-u+t} + \chi'$$

我们有

$$\mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi \cdot \vartheta) = \frac{|\vartheta|^2}{1-u+t} + \mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi' \cdot \vartheta)$$

并且 (12.53) 可以写成

$$|\vartheta|L|\vartheta| = (\vartheta, \not{\mathcal{L}}_L\vartheta) - \frac{2|\vartheta|^2}{1-u+t} - 2\mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi' \cdot \vartheta) \tag{12.54}$$

现在有如下不等式:

$$|\mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi' \cdot \vartheta)| \leqslant |\chi'||\vartheta|^2 \tag{12.55}$$

为了证明这个不等式, 我们运用 $S_{t,u}$ 相对于度量 $\not g$ 的一组幺正标架, 它们是 χ' 的特征向量. 设 λ_1, λ_2 是 χ' 的特征值, 则在任意给定的一点有

$$\mathrm{tr}(\vartheta \cdot \chi' \cdot \vartheta) = \lambda_1(\vartheta_{11})^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\vartheta_{12})^2 + \lambda_2(\vartheta_{22})^2$$

由于

$$|\vartheta|^2 = (\vartheta_{11})^2 + 2(\vartheta_{12})^2 + (\vartheta_{22})^2$$

所以

$$|\mathrm{tr}(\vartheta\cdot\chi'\cdot\vartheta)|\leqslant\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}|\vartheta|^2$$

由如下事实:

$$\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}\leqslant\sqrt{(\lambda_1)^2+(\lambda_2)^2}=|\chi'|$$

(12.55) 成立.

考虑 (12.55) 以及如下事实:

$$|(\vartheta,\not{\mathcal{L}}_L\vartheta)|\leqslant|\vartheta||\not{\mathcal{L}}_L\vartheta|$$

我们从 (12.54) 可以导出如下不等式:

$$L((1-u+t)^2|\vartheta|)\leqslant(1-u+t)^2(2|\chi'||\vartheta|+|\not{\mathcal{L}}_L\vartheta|)\tag{12.56}$$

我们将这个运用到 $\vartheta=\chi'$ 的情形. 由如下事实:

$$|\chi'\cdot\chi'|=\sqrt{(\lambda_1)^4+(\lambda_2)^4}\leqslant(\lambda_1)^2+(\lambda_2)^2=|\chi'|^2$$

再用 (12.50) 表示 $\not{\mathcal{L}}_L\chi'$,

$$L((1-u+t)^2|\chi'|)\leqslant(1-u+t)^2((3|\chi'|+|e|)|\chi'|+|b|)\tag{12.57}$$

其中

$$b=\frac{\not{d}e}{1-u+t}-\alpha'$$

设 $\mathcal{P}(t)$ 为

$$\mathcal{P}(t):\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_0\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))$$

对 $t'\in[0,t]$ 成立.

取 C_0 足够大, 由关于初值的假设, 我们有

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})}<C_0\delta_0\tag{12.58}$$

再由连续性, 我们知道 $\mathcal{P}(t)$ 对足够小的 t 成立. 设 t_0 是 $t\in[0,s_0]$ 中使得 $\mathcal{P}(t)$ 成立的上确界. 再由连续性知道 $\mathcal{P}(t_0)$ 成立. 所以在 $W_{\epsilon_0}^{t_0}$ 中, 由 (12.48), 我们有

$$3|\chi'|+|e|\leqslant(3C_0+C)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\tag{12.59}$$

在 $W_{\epsilon_0}^{t_0}$ 中成立.

代入 (12.57) 再考虑 (12.48) 和 (12.49), 我们得到

$$L((1-u+t)^2|\chi'|) \leqslant (3C_0+C)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))((1-u+t)^2|\chi'|)+C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.60}$$

沿着 L 的积分曲线设

$$x(t) = (1-u+t)^2|\chi'| \tag{12.61}$$

则 (12.60) 有如下形式:

$$\frac{dx}{dt} \leqslant fx + g \tag{12.62}$$

其中

$$f(t) = (3C_0+C)\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)), \quad g(t) = C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.63}$$

从 $t=0$ 开始积分有

$$x(t) \leqslant e^{\int_0^t f(t')dt'}\left(x(0) + \int_0^t e^{-\int_0^{t'} f(t'')dt''} g(t')dt'\right) \tag{12.64}$$

由于

$$x(0) \leqslant \|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \tag{12.65}$$

而

$$x(t) \geqslant \frac{1}{4}(1+t)^2|\chi'| \tag{12.66}$$

考虑到如下事实:

$$\int_0^t f(t')dt' \leqslant \int_0^\infty f(t')dt' \leqslant 2(3C_0+C)\delta_0, \quad \int_0^t g(t')dt' = C\delta_0\log(1+t) \tag{12.67}$$

由 (12.64) 可以推出

$$\frac{1}{4}(1+t)^2|\chi'| \leqslant e^{2(3C_0+C)\delta_0}(\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} + C\delta_0\log(1+t)) \tag{12.68}$$

所以在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上有

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant 4e^{2(3C_0+C)\delta_0}(\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} + C\delta_0\log(1+t))(1+t)^{-2} \tag{12.69}$$

这个对 $t\in[0,t_0]$ 成立. 现在固定 C_0 足够大使得

$$C_0\delta_0 \geqslant 8\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})}, \quad C_0 > 8C \tag{12.70}$$

则如果 δ_0 满足

$$\delta_0 \leqslant \frac{\log 2}{2(3C_0+C)} \tag{12.71}$$

由 (12.69) 有

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} < C_0\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{12.72}$$

对 $t \in [0, t_0]$ 成立.

由连续性可知 $\mathcal{P}(t)$ 对某个 $t > t_0$ 成立. 所以我们有 $t_0 = s_0$, 从而引理得证.□

接下来我们研究 **H1**. 对任意 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 考虑 $\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi$. 在直角坐标下, 我们有

$$(\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi)_a = (\not{D}_{R_i}\xi)_a + \xi_m(\not{D}R_i)_a^m, \quad (\not{D}_{R_i}\xi)_a = (R_i)^m(\not{D}\xi)_{ma} \tag{12.73}$$

其中我们用到了如下事实: 对 $S_{t,u}$ 上的任意一个向量场 X 有

$$(\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi)(X) = (\not{D}_{R_i}\xi)(X) + \xi(\not{D}_X R_i)$$

所以我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi|^2 \\
&= \sum_i |\not{D}_{R_i}\xi|^2 + 2\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}(\not{D}_{R_i}\xi)_a\xi_n(\not{D}R_i)_b^n \\
&\quad + \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}\xi_m\xi_n(\not{D}R_i)_a^m(\not{D}R_i)_b^n
\end{aligned} \tag{12.74}$$

考虑 (12.74) 右端的第一项, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_i |\not{D}_{R_i}\xi|^2 &= \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}(\not{D}_{R_i}\xi)_a(\not{D}_{R_i}\xi)_b \\
&= (\bar{g}^{-1})^{ab}(\sum_i (R_i)^m(R_i)^n)(\not{D}\xi)_{ma}(\not{D}\xi)_{nb}
\end{aligned} \tag{12.75}$$

将 (12.38) 代入并且注意到

$$\Pi_c^m\Pi_d^n(\not{D}\xi)_{ma}(\not{D}\xi)_{nb} = (\not{D}\xi)_{ca}(\not{D}\xi)_{db}$$

我们得到

$$\sum_i |\not{D}_{R_i}\xi|^2 = r^2(\bar{g}^{-1})^{ab}(\delta_{cd} - y'^c y'^d)(\not{D}\xi)_{ca}(\not{D}\xi)_{db} \tag{12.76}$$

考虑 $S_{t,u}$ 上的二阶对称协变张量场 ϑ:

$$\vartheta_{cd} = (\bar{g}^{-1})^{ab}(\not{D}\xi)_{ca}(\not{D}\xi)_{db} \tag{12.77}$$

设 μ_1, μ_2, μ_3 是 ϑ 相对于 $\bar{g}$ 的特征值. 由于 ϑ 是半正定的, 我们有

$$\mu_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{12.78}$$

从而

$$\max_i \mu_i \leqslant \sum_i \mu_i = \mathrm{tr}\vartheta \tag{12.79}$$

其中

$$\mathrm{tr}\vartheta = (\bar{g}^{-1})^{cd}\vartheta_{cd} = \delta_{cd}\vartheta_{cd} \tag{12.80}$$

则 (12.79) 意味着

$$y'^c y'^d \vartheta_{cd} \leqslant |y'|^2 \mathrm{tr}\vartheta \tag{12.81}$$

然后我们有

$$(\bar{g}^{-1})^{ab}(\delta_{cd} - y'^c y'^d)(\not{D}\xi)_{ca}(\not{D}\xi)_{db} = (\delta_{cd} - y'^c y'^d)\vartheta_{cd} \geqslant (1 - |y'|^2)\mathrm{tr}\vartheta \tag{12.82}$$

从而由

$$\mathrm{tr}\vartheta = (\bar{g}^{-1})^{cd}(\bar{g}^{-1})^{ab}(\not{D}\xi)_{ca}(\not{D}\xi)_{db} = |\not{D}\xi|^2 \tag{12.83}$$

(12.76) 意味着

$$\sum_i |\not{D}_{R_i}\xi|^2 \geqslant r^2(1 - |y'|^2)|\not{D}\xi|^2 \tag{12.84}$$

接下来考虑 (12.74) 右端的第三项. 我们首先应该得到一个关于 $\not{D}R_i$ 的表达式. 回忆 (6.45) 和 (6.56), 我们有

$$g(\not{D}_{X_A}R_i, X_B) = X_A^l \epsilon_{ilm} X_B^m + \lambda_i(\eta^{-1}\chi_{AB} - \not{k}_{AB}) \tag{12.85}$$

记

$$(\nu_i)_{AB} = X_A^l \epsilon_{ilm} X_B^m \tag{12.86}$$

ν_i 的直角坐标分量为

$$(\nu_i)_{lm} = \Pi_l^{l'}\Pi_m^{m'}\epsilon_{il'm'} \tag{12.87}$$

同样记

$$\tau_i = \lambda_i(\eta^{-1}\chi - \not{k}) \tag{12.88}$$

则由 (12.85), $\not{D}R_i$ 的直角坐标分量为

$$(\not{D}R_i)_l^k = \Pi_m^k \Pi_l^{l'} \epsilon_{il'm} + (\tau_i)_l^k \tag{12.89}$$

注意到 (12.26), 由 (12.89) 我们可以得到

$$\begin{aligned}\sum_i (\not{D}R_i)_a^m (\not{D}R_i)_b^n = & \Pi_{m'}^m \Pi_{n'}^n \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} (\delta_{a'b'}\delta_{m'n'} - \delta_{a'n'}\delta_{b'm'}) \\ & + \sum_i (\tau_i)_a^m \Pi_{n'}^n \Pi_b^{b'} \epsilon_{ib'n'} + \sum_i (\tau_i)_b^n \Pi_{m'}^m \Pi_a^{a'} \epsilon_{ia'm'} \\ & + \sum_i (\tau_i)_a^m (\tau_i)_b^n \end{aligned} \tag{12.90}$$

将这个代入 (12.74) 右端的第三项得

$$\begin{aligned} & \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab} \xi_m \xi_n (\not{D}R_i)_a^m (\not{D}R_i)_b^n \\ = & \delta_{a'b'} (\bar{g}^{-1})^{ab} \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} |\xi|^2 - |\xi|^2 \\ & + 2\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab} (\tau_i \cdot \xi)_a (v_i)_b + \sum_i |\tau_i \cdot \xi|^2 \end{aligned} \tag{12.91}$$

其中 v_i 是 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式:

$$(v_i)_b = \Pi_b^{b'} \epsilon_{ib'n'} \xi_{n'} \tag{12.92}$$

由 (12.26) 和 (12.92), 我们得到

$$\begin{aligned}\sum_i |v_i|^2 = & \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab} \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} \epsilon_{ia'm'} \epsilon_{ib'n'} \xi_{m'} \xi_{n'} \\ = & (\bar{g}^{-1})^{ab} \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} (\delta_{a'b'}\delta_{m'n'} - \delta_{a'n'}\delta_{b'm'}) \xi_{m'} \xi_{n'} \\ = & \delta_{a'b'} (\bar{g}^{-1})^{ab} \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} |\xi|^2 - |\xi|^2 \end{aligned} \tag{12.93}$$

由于

$$(\bar{g}^{-1})^{ab} \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} = (\bar{g}^{-1})^{a'b'} - \hat{T}^{a'} \hat{T}^{b'} \tag{12.94}$$

我们有

$$\delta_{a'b'} (\bar{g}^{-1})^{ab} \Pi_a^{a'} \Pi_b^{b'} = 2 \tag{12.95}$$

所以 (12.93) 化为

$$\sum_i |v_i|^2 = |\xi|^2$$

而

$$2\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}(\tau_i \cdot \xi)_a (v_i)_b \geqslant -2\sum_i |\tau_i \cdot \xi||v_i| \geqslant -2|\xi|\sqrt{\sum_i |\tau_i|^2}\sqrt{\sum_i |v_i|^2}$$

所以由 (12.91), 我们有

$$\begin{aligned}\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}\xi_m\xi_n(\not{D}R_i)^m_a(\not{D}R_i)^n_b &= \sum_i |v_i|^2 + 2\sum_i (\tau_i\cdot\xi)\cdot v_i + \sum_i |\tau_i\cdot\xi|^2 \\ &\geqslant \sum_i |v_i|^2 - 2\sum_i |\tau_i\cdot\xi||v_i| \\ &\geqslant \sum_i |v_i|^2 - 2\sqrt{\sum_i |\tau_i\cdot\xi|^2}\sqrt{\sum_i |v_i|^2} \qquad (12.96)\end{aligned}$$

即

$$\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}\xi_m\xi_n(\not{D}R_i)^m_a(\not{D}R_i)^n_b \geqslant |\xi|^2(1-2\sqrt{\sum_i (\tau_i)^2}) \qquad (12.97)$$

最后我们考虑 (12.74) 右端的第二项:

$$2\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}(\not{D}_{R_i}\xi)_a\xi_n(\not{D}R_i)^n_b = 2\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ab}(R_i)^m(\not{D}\xi)_{ma}\xi_n(\not{D}R_i)^n_b \qquad (12.98)$$

由 (12.24), (12.26) 和 (12.89), 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_i (R_i)^m(\not{D}R_i)^n_b \\ &= \sum_i \Pi^m_{m'}\epsilon_{ikm'}x^k(\Pi^n_{n'}\Pi^{b'}_b\epsilon_{ib'n'} + (\tau_i)^n_b) \\ &= (\delta_{kb'}\delta_{m'n'} - \delta_{kn'}\delta_{m'b'})\Pi^m_{m'}\Pi^n_{n'}\Pi^{b'}_b x^k + \Pi^m_{m'}x^k\sum_i \epsilon_{ikm'}(\tau_i)^n_b \\ &= \Pi^m_{n'}\Pi^n_{n'}(\Pi^{b'}_b x^{b'}) - \Pi^m_b(\Pi^n_{n'}x^{n'}) + \Pi^m_{m'}x^k\sum_i \epsilon_{ikm'}(\tau_i)^n_b \qquad (12.99)\end{aligned}$$

首先考虑 (12.99) 右端的第一项, 我们有

$$\Pi^{b'}_b x^{b'} = r\Pi^{b'}_b N^{b'} = r\bar{g}_{b'c}\Pi^{b'}_b N^c$$

由 (12.29) 以及 $\bar{g}_{b'c}\Pi_b^{b'}\hat{T}^c=0$, 我们有

$$\bar{g}_{b'c}\Pi_b^{b'}N^c=\bar{g}_{b'c}\Pi_b^{b'}y'^c$$

所以我们得到

$$\Pi_b^{b'}x^{b'}=r\Pi_b^{b'}(\bar{g}_{b'c}y'^c) \tag{12.100}$$

引入 $S_{t,u}$ 上的切向量场

$$\not{y}'=\Pi\cdot y' \tag{12.101}$$

则 (12.100) 有如下形式:

$$\Pi_b^{b'}x^{b'}=r\not{y}'^b \tag{12.102}$$

类似地, 我们有

$$\Pi_{n'}^{n}x^{n'}=r\not{y}'^n \tag{12.103}$$

在上述推导中我们用了 $\bar{g}_{ab}=\delta_{ab}$.

由 (12.102), (12.103) 可知: (12.99) 化为

$$\sum_i(R_i)^m(\not{D}R_i)_b^n=r(\Pi_{n'}^m\Pi_{n'}^n\not{y}'^b-\Pi_b^m\not{y}'^n+\Pi_{m'}^mN^k\sum_i\epsilon_{ikm'}(\tau_i)_b^n) \tag{12.104}$$

所以由 (12.98), (12.74) 右端第二项为

$$2r(\zeta_{n'}\xi_{n'}-\mathrm{tr}(\not{D}\xi)(\xi\cdot\not{y}')+\sum_i\eta_i\cdot(\tau_i\cdot\xi)) \tag{12.105}$$

其中

$$\zeta_{n'}=(\not{D}\xi)_{n'a}\not{y}'^a \tag{12.106}$$

以及

$$(\eta_i)_a=N^k\epsilon_{ikm'}(\not{D}\xi)_{m'a} \tag{12.107}$$

现在我们有

$$|\zeta_{n'}\xi_{n'}|\leqslant|\zeta||\xi|\leqslant|\not{D}\xi||\xi||\not{y}'| \tag{12.108}$$

由于对 $S_{t,u}$ 上的任意二阶张量 M, 我们有

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}M)^2\leqslant|M|^2$$

所以

$$|\mathrm{tr}(\not{D}\xi)(\xi\cdot\not{y}')| \leqslant \sqrt{2}|\not{D}\xi||\xi||\not{y}'| \tag{12.109}$$

最后,

$$|\sum_i \eta_i\cdot(\tau_i\cdot\xi)| \leqslant \sum_i|\eta_i||\tau_i||\xi| \leqslant |\xi|\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2}\sqrt{\sum_i|\eta_i|^2} \tag{12.110}$$

由 (12.26), 我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_i|\eta_i|^2 &= \sum_i(\bar{g}^{-1})^{ab}N^kN^l\epsilon_{ikm'}\epsilon_{iln'}(\not{D}\xi)_{m'a}(\not{D}\xi)_{n'b} \\
&= (\bar{g}^{-1})^{ab}N^kN^l(\delta_{kl}\delta_{m'n'}-\delta_{kn'}\delta_{lm'})(\not{D}\xi)_{m'a}(\not{D}\xi)_{n'b} \\
&= (\bar{g}^{-1})^{ab}((\not{D}\xi)_{n'a}(\not{D}\xi)_{n'b}-N^{m'}N^{n'}(\not{D}\xi)_{m'a}(\not{D}\xi)_{n'b}) \\
&\leqslant (\bar{g}^{-1})^{ab}(\not{D}\xi)_{n'a}(\not{D}\xi)_{n'b} = |\not{D}\xi|^2
\end{aligned} \tag{12.111}$$

将 (12.108), (12.109) 和 (12.111) 结合起来, 我们得出 (12.74) 右端第二项被

$$2r((1+\sqrt{2})|\not{y}'|+\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2})|\xi||\not{D}\xi| \tag{12.112}$$

界定. 将 (12.84), (12.97) 和 (12.112) 结合起来, 我们得到了如下命题:

命题 12.5 考虑曲面 $S_{t,u}$ 使得在其上面有

$$\sup_{S_{t,u}}|y'| \leqslant 1$$

则对 $S_{t,u}$ 上的 1- 形式 ξ, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_i|\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi|^2 \geqslant\ & r^2(1-|y'|^2)|\not{D}\xi|^2+(1-2\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2})|\xi|^2 \\
& -2r((1+\sqrt{2})|\not{y}'|+\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2})|\xi||\not{D}\xi|
\end{aligned} \tag{12.113}$$

在 $S_{t,u}$ 上成立.

推论 12.5.a 设

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|y'| \leqslant C\delta_0, \quad \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2} \leqslant C\delta_0$$

对某个固定的 C 成立. 则如果 δ_0 足够小, 对 $S_{t,u}$ 上任意一个 1- 形式 ξ, 我们在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上有

$$\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi|^2 \geqslant \frac{1}{2}(r^2|\not{D}\xi|^2 + |\xi|^2)$$

同样如果

$$\inf_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} r \geqslant \epsilon_1(1+t)$$

则 **H1** 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上成立. 事实上, 我们有

$$(1+t)^{-2}|\xi|^2 + |\not{D}\xi|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi|^2$$

其中

$$C = \frac{2}{\epsilon_1^2}$$

证明 由假设我们可以取 δ_0 足够小使得

$$(1+\sqrt{2})|\not{y}'| + \sqrt{\sum_i |\tau_i|^2} \leqslant \frac{1}{4}$$

以及

$$1 - |y'|^2 \geqslant \frac{3}{4}, \quad (1 - 2\sqrt{\sum_i |\tau_i|})^2 \geqslant \frac{3}{4}$$

则推论得证. □

回到引理 12.2, 设 $\bar{s}_0$ 是 $s_0 \in [0,s]$ 中使得 **H1** 在 $W_{\epsilon_0}^{s_0}$ 成立的最大值. 我们将看到事实上 $\bar{s}_0 = s$. 假设 $\bar{s}_0 < s$. 由命题 12.3, 推论 12.5.a 除了关于 τ_i 的所有假设都在 $W_{\epsilon_0}^s$ 上成立. 所以如果我们可以证明关于 τ_i 的假设在 $W_{\epsilon_0}^s$ 上成立, 则 **H1** 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 上成立. 我们将运用连续性方法. 由 (12.88), **H0**, $\mathbf{E}_{\{1\}}$ 和命题 12.3, 我们有

$$\max_i \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |\tau_i - \lambda_i \eta^{-1}\chi| \leqslant C\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{12.114}$$

对 $t \in [0,s]$ 成立.

所以如果对某个 $t \in [0,s]$, χ' 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上满足

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_0(1+t)^{-1} \tag{12.115}$$

对某个固定的 C_0 成立, 则我们有

$$\max_i \|\tau_i\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.116}$$

所以关于 τ_i 的假设同样成立. 另一方面, 在引理 12.2 中取 $s_0 = \bar{s}_0$, 我们有

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{12.117}$$

对 $t \in [0, \bar{s}_0]$ 成立. 如果 δ_0 足够小, 则这个意味着

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant \frac{1}{2}C_0(1+t)^{-1}$$

在 $t = \bar{s}_0$ 成立.

所以由连续性, (12.115) 在一个足够小的区间 $[\bar{s}_0, s_*] \subset [\bar{s}_0, s]$ 成立. 因此推论 12.5.a 的假设在 $t \in [0, s_*]$ 成立, 所以 **H1** 在 $W_{\epsilon_0}^{s_*}$ 中成立, 这与 $\bar{s}_0$ 的最大性矛盾. 所以 **H1** 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 那么引理 12.2 对 $s_0 = s$ 成立, 我们有

命题 12.6 设 $\mathbf{E}_{\{2\}}, \mathbf{E}_{\{1\}}^Q, \mathbf{E}_{\{0\}}^{QQ}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立, 并且初值满足

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0$$

则如果 δ_0 足够小, **H1** 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 并且对 $t \in [0, s]$ 有

$$\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

接下来我们研究 **H2** 和 **H2′**. 对 $S_{t,u}$ 上任意二阶对称协变张量场 ϑ, 我们考虑 $\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta$:

$$\begin{aligned} (\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta)_{ab} &= (\not{D}_{R_i}\vartheta)_{ab} + \vartheta_{mb}(\not{D}R_i)_a^m + \vartheta_{am}(\not{D}R_i)_b^m \\ (\not{D}_{R_i}\vartheta)_{ab} &= (R_i)^m(\not{D}\vartheta)_{mab} \end{aligned} \tag{12.118}$$

所以我们有

$$\begin{aligned} &\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta|^2 \\ &= \sum_i |\not{D}_{R_i}\vartheta|^2 + 2\sum_i (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\vartheta_{mb}(\not{D}R_i)_a^m + \vartheta_{am}(\not{D}R_i)_b^m)(\not{D}_{R_i}\vartheta)_{cd} \\ &\quad + \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\vartheta_{mb}(\not{D}R_i)_a^m + \vartheta_{am}(\not{D}R_i)_b^m)(\vartheta_{nd}(\not{D}R_i)_c^n + \vartheta_{cn}(\not{D}R_i)_d^n) \end{aligned} \tag{12.119}$$

首先考虑 (12.119) 右端的第一项, 我们有

$$\sum_i |\not{D}_{R_i}\vartheta|^2 = \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\not{D}_{R_i}\vartheta)_{ab}(\not{D}_{R_i}\vartheta)_{cd}$$
$$= (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\sum_i (R_i)^m(R_i)^n)(\not{D}\vartheta)_{mab}(\not{D}\vartheta)_{ncd} \quad (12.120)$$

将 (12.38) 代入并注意到

$$\Pi_k^m\Pi_l^n(\not{D}\vartheta)_{mab}(\not{D}\vartheta)_{ncd} = (\not{D}\vartheta)_{kab}(\not{D}\vartheta)_{lcd}$$

我们得到

$$\sum_i |\not{D}_{R_i}\vartheta|^2 = r^2(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\delta_{kl} - y'^k y'^l)(\not{D}\vartheta)_{kab}(\not{D}\vartheta)_{lcd} \quad (12.121)$$

考虑 $S_{t,u}$ 上的对称二阶协变张量场 φ:

$$\varphi_{kl} = (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\not{D}\vartheta)_{kab}(\not{D}\vartheta)_{lcd} \quad (12.122)$$

由于 φ 是半正定的, 像 (12.81) 中那样我们有

$$y'^k y'^l \varphi_{kl} \leqslant |y'|^2 \mathrm{tr}\varphi \quad (12.123)$$

假设 $|y'| \leqslant 1$ 并注意到

$$\mathrm{tr}\varphi = (\bar{g}^{-1})^{kl}(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\not{D}\vartheta)_{kab}(\not{D}\vartheta)_{lcd} = |\not{D}\vartheta|^2 \quad (12.124)$$

(12.121) 意味着

$$\sum_i |\not{D}_{R_i}\vartheta|^2 \geqslant r^2(1 - |y'|^2)|\not{D}\vartheta|^2 \quad (12.125)$$

接下来考虑 (12.119) 右端的第三项, 它可以写为

$$2A_1 + 2A_2$$

其中

$$A_1 = (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{mb}\vartheta_{nd}(\sum_i (\not{D}R_i)_a^m(\not{D}R_i)_c^n) \quad (12.126)$$

$$A_2 = (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{am}\vartheta_{nd}(\sum_i (\not{D}R_i)_b^m(\not{D}R_i)_c^n) \quad (12.127)$$

将 (12.90) 代入 (12.126), 我们有

$$
\begin{aligned}
A_1 = &(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{m'b}\vartheta_{n'd}(\delta_{a'c'}\Pi_a^{a'}\Pi_c^{c'}\delta_{m'n'} - \Pi_a^{n'}\Pi_c^{m'}) \\
&+2\sum_i(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(w_i)_{ab}(\tau_i\cdot\vartheta)_{cd} + \sum_i|\tau_i\cdot\vartheta|^2
\end{aligned}
\tag{12.128}
$$

其中 w_i 是 $S_{t,u}$ 上的二阶协变张量场:

$$
(w_i)_{ab} = \Pi_a^{a'}\epsilon_{ia'm'}\vartheta_{m'b} \tag{12.129}
$$

以及

$$
(\tau_i\cdot\vartheta)_{ab} = (\tau_i)_a^m\vartheta_{mb} \tag{12.130}
$$

将 (12.96) 代入 (12.128) 右端的第一项, 这一项变为

$$
2\delta_{m'n'}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{m'b}\vartheta_{n'd} - |\vartheta|^2 = 2|\vartheta|^2 - |\vartheta|^2 = |\vartheta|^2 \tag{12.131}
$$

(12.128) 右端第二项的绝对值被

$$
2\sum_i|w_i||\tau_i\cdot\vartheta| \leqslant 2|\vartheta|\sqrt{\sum_i|w_i|^2}\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2} \tag{12.132}
$$

界定. 由 (12.26), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\sum_i|w_i|^2 &= \sum_i(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\Pi_a^{a'}\Pi_c^{c'}\epsilon_{ia'm'}\epsilon_{ic'n'}\vartheta_{m'b}\vartheta_{n'd} \\
&= (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\Pi_a^{a'}\Pi_c^{c'}(\delta_{a'c'}\delta_{m'n'} - \delta_{a'n'}\delta_{c'm'})\vartheta_{m'b}\vartheta_{n'd} \\
&= (\bar{g}^{-1})^{bd}\delta_{a'c'}(\bar{g}^{-1})^{ac}\Pi_a^{a'}\Pi_c^{c'}\delta_{m'n'}\vartheta_{m'b}\vartheta_{n'd} - |\vartheta|^2
\end{aligned}
\tag{12.133}
$$

所以由 (12.96) 有

$$
\sum_i|w_i|^2 = 2\delta_{m'n'}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{m'b}\vartheta_{n'd} - |\vartheta|^2 = |\vartheta|^2 \tag{12.134}
$$

所以我们得出

$$
A_1 \geqslant (1 - 2\sqrt{\sum_i|\tau_i|^2})|\vartheta|^2 + \sum_i|\tau_i\cdot\vartheta|^2 \tag{12.135}
$$

将 (12.90) 代入 (12.127), 我们得到

$$
\begin{aligned}
A_2 = &(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{am'}\vartheta_{n'd}(\delta_{b'c'}\delta_{m'n'}\Pi_b^{b'}\Pi_c^{c'} - \Pi_b^{n'}\Pi_c^{m'}) \\
&+2\sum_i(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\tau_i\tilde{\cdot}\vartheta)_{ab}(w_i)_{cd} \\
&+\sum_i(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\tau_i\tilde{\cdot}\vartheta)_{ab}(\tau_i\cdot\vartheta)_{cd}
\end{aligned}
\tag{12.136}
$$

其中

$$(\tau_i \tilde{\cdot} \vartheta)_{ab} = (\tau_i \cdot \vartheta)_{ba}$$

(12.136) 右端第一项为

$$(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{am'}\vartheta_{n'd}(\Pi_c^b\delta_{m'n'} - \Pi_b^{n'}\Pi_c^{m'}) = |\vartheta|^2 - (\mathrm{tr}\vartheta)^2$$

这里我们用到了如下事实:

$$\delta_{b'c'}\Pi_b^{b'}\Pi_c^{c'} = \Pi_c^b$$

由于

$$|\tau_i \tilde{\cdot} \vartheta| = |\tau_i \cdot \vartheta|$$

(12.136) 可以用与 (12.132) 相同的方法估计. 第三项的绝对值可以被

$$\sum_i |\tau_i \cdot \vartheta|^2 \tag{12.137}$$

界定. 所以

$$A_2 \geqslant (1 - 2\sqrt{\sum_i |\tau_i|^2})|\vartheta|^2 - (\mathrm{tr}\vartheta)^2 - \sum_i |\tau_i \cdot \vartheta|^2 \tag{12.138}$$

将 (12.135) 和 (12.138) 结合起来, 我们得到

$$A_1 + A_2 \geqslant 2(1 - 2\sqrt{\sum_i |\tau_i|^2})|\vartheta|^2 - (\mathrm{tr}\vartheta)^2 \tag{12.139}$$

最后考虑 (12.119) 右端第二项, 即

$$4B$$

其中

$$B = (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{mb}(\sum_i (\not{D} R_i)_a^m (R_i)^k)(\not{D}\vartheta)_{kcd} \tag{12.140}$$

将 (12.104) 代入, 由直接计算我们得到

$$\begin{aligned} B = r((\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{m'b}\iota_{m'd} - (\bar{g}^{-1})^{bd}(\vartheta \cdot \not{y}')_b(\mathrm{tr}\not{D}\vartheta)_d \\ + \sum(\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\tau_i \cdot \vartheta)_{ab}(\varpi_i)_{cd}) \end{aligned} \tag{12.141}$$

其中

$$\iota_{m'd} = (\not{D}\vartheta)_{m'cd}\not{y}'^{c} \tag{12.142}$$

$$(\varpi_i)_{cd} = N^l \epsilon_{ilk'}(\not{D}\vartheta)_{k'cd} \tag{12.143}$$

同样

$$(\mathrm{tr}\not{D}\vartheta)_d = (\bar{g}^{-1})^{ac}(\not{D}\vartheta)_{acd}, \quad (\vartheta \cdot \not{y}')_b = \vartheta_{bm}\not{y}'^{m}$$

由于

$$(\bar{g}^{-1})^{m'n'} = \delta_{m'n'}$$

我们有

$$|(\bar{g}^{-1})^{bd}\vartheta_{m'b}\iota_{m'd}| \leqslant |\vartheta||\iota| \tag{12.144}$$

由于

$$|\iota| \leqslant |\not{D}\vartheta||\not{y}'| \tag{12.145}$$

(12.141) 括号中的第一项的绝对值被

$$|\vartheta||\not{D}\vartheta||\not{y}'| \tag{12.146}$$

界定. 由于

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}\not{D}\vartheta|^2 \leqslant |\not{D}\vartheta|^2$$

(12.141) 括号中第二项的绝对值被

$$\sqrt{2}|\not{y}'||\vartheta||\not{D}\vartheta| \tag{12.147}$$

界定. 最后, (12.141) 括号中第三项的绝对值被

$$\sum_i |\vartheta||\tau_i||\varpi_i| \leqslant |\vartheta|\sqrt{\sum_i |\tau_i|^2}\sqrt{\sum_i |\varpi_i|^2} \tag{12.148}$$

界定. 进一步, 用 (12.26) 我们得出

$$\begin{aligned}
\sum_i |\varpi_i|^2 &= \sum_i (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}N^k N^l \epsilon_{ikm'}\epsilon_{iln'}(\not{D}\vartheta)_{m'ab}(\not{D}\vartheta)_{n'cd} \\
&= (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}N^k N^l(\delta_{kl}\delta_{m'n'} - \delta_{kn'}\delta_{lm'})(\not{D}\vartheta)_{m'ab}(\not{D}\vartheta)_{n'cd} \\
&= (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}((\not{D}\vartheta)_{m'ab}(\not{D}\vartheta)_{m'cd} - N^{m'}N^{n'}(\not{D}\vartheta)_{m'ab}(\not{D}\vartheta)_{n'cd}) \\
&\leqslant (\bar{g}^{-1})^{ac}(\bar{g}^{-1})^{bd}(\not{D}\vartheta)_{m'ab}(\not{D}\vartheta)_{m'cd} = |\not{D}\vartheta|^2
\end{aligned} \tag{12.149}$$

所以我们有

$$|B| \leqslant r((1+\sqrt{2})|\not{y}'| + \sqrt{\sum_i |\tau_i|^2})|\not{D}\vartheta||\vartheta| \tag{12.150}$$

将 (12.125), (12.139) 和 (12.150) 结合起来, 我们得到如下命题:

命题 12.7 考虑曲面 $S_{t,u}$ 使得下式成立:

$$\sup_{S_{t,u}} |y'| \leqslant 1$$

则对 $S_{t,u}$ 上任意二阶对称协变张量场 ϑ, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta|^2 \geqslant & r^2(1-|y'|^2)|\not{D}\vartheta|^2 \\ & +4(1-2\sqrt{\sum_i |\tau_i|^2})|\vartheta|^2 - 2(\mathrm{tr}\vartheta)^2 \\ & -4r((1+\sqrt{2})|\not{y}'| + \sqrt{\sum_i |\tau_i|^2})|\not{D}\vartheta||\vartheta|\end{aligned}$$

在 $S_{t,u}$ 上成立.

推论 12.7.a 设

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |y'| \leqslant C\delta_0 \quad 且 \quad \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} \sqrt{\sum_i |\tau_i|^2} \leqslant C\delta_0$$

对某个固定的常数 C 成立. 则如果 δ_0 足够小, 对任意 $S_{t,u}$ 上二阶对称协变张量场 ϑ, 我们有

$$\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta|^2 \geqslant \frac{1}{2}r^2|\not{D}\vartheta|^2 + 2|\vartheta|^2 - 2(\mathrm{tr}\vartheta)^2$$

同样如果

$$\inf_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} r \geqslant \epsilon_1(1+t)$$

则 **H2** 和 **H2**$'$ 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上成立. 事实上在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上我们有

$$|\not{D}\vartheta|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}(\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta|^2 + 2|\vartheta|^2)$$

其中

$$C = \frac{2}{\epsilon_1^2}$$

进一步, 如果 ϑ 是无迹的, 我们有

$$|\not{D}\vartheta|^2 \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta|^2$$

证明 取 δ_0 足够小, 则第二个结论可以直接得到. 对于第一个结论, 我们只需要用

$$(\mathrm{tr}\vartheta)^2 \leqslant 2|\vartheta|^2$$

□

这一节的最后我们给出 Lie 导数的正定性不等式.

命题 12.8 设命题 12.6 的假设成立, 并且设 X 是定义在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中与 $S_{t,u}$ 相切的任意一个向量场, 并且在 $S_{t,u}$ 上可微. 则对任意一个 1- 形式 ξ, 我们有

$$|\not{\mathcal{L}}_X\xi| \leqslant C(1+t)^{-1}(|X|(\max_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\xi| + |\xi|) + |\xi|\max_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}X|)$$

同样, 对 $S_{t,u}$ 上任意一个对称二阶协变张量场 ϑ, 我们有

$$|\not{\mathcal{L}}_X\vartheta| \leqslant C(1+t)^{-1}(|X|(\max_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}\vartheta| + |\vartheta|) + |\vartheta|\max_i |\not{\mathcal{L}}_{R_i}X|)$$

证明 首先考虑 ξ. 由命题 12.2, 我们有

$$|\not{\mathcal{L}}_X\xi| \leqslant C(1+t)^{-1}\sum_i |(\not{\mathcal{L}}_X\xi)(R_i)| \tag{12.151}$$

由于

$$(\not{\mathcal{L}}_X\xi)(R_i) = X(\xi(R_i)) - \xi([X,R_i]) = X\cdot \not{d}(\xi(R_i)) + \xi(\not{\mathcal{L}}_{R_i}X) \tag{12.152}$$

我们有

$$|(\not{\mathcal{L}}_X\xi)(R_i)| \leqslant |X||\not{d}(\xi(R_i))| + |\xi||\not{\mathcal{L}}_{R_i}X| \tag{12.153}$$

由 **H0** 有

$$|\not{d}(\xi(R_i))| \leqslant C(1+t)^{-1}\sum_j |R_j(\xi(R_i))| \tag{12.154}$$

以及

$$R_j(\xi(R_i)) = (\not{\mathcal{L}}_{R_j}\xi)(R_i) + \xi([R_i, R_j]) \tag{12.155}$$

所以

$$|R_j(\xi(R_i))| \leqslant |\not{\mathcal{L}}_{R_j}\xi||R_i| + |\xi||[R_i, R_j]| \tag{12.156}$$

由推论 10.1.e,

$$|R_i|, \quad |[R_i, R_j]| \leqslant C(1+t) \tag{12.157}$$

我们得到

$$|R_j(\xi(R_i))| \leqslant C(1+t)(|\not{\mathcal{L}}_{R_j}\xi| + |\xi|) \tag{12.158}$$

将这个代入 (12.154), 我们得到

$$|\not{d}(\xi(R_i))| \leqslant C(\max_j |\not{\mathcal{L}}_{R_j}\xi| + |\xi|) \tag{12.159}$$

将这个代入 (12.153), 关于 ξ 的结果可以由 (12.151) 得到.

接下来考虑 $S_{t,u}$ 上对称二阶协变张量场 ϑ. 由命题 12.4,

$$|\not{\mathcal{L}}_X\vartheta| \leqslant C(1+t)^{-2}\sum_{i,j}|(\not{\mathcal{L}}_X\vartheta)(R_i, R_j)| \tag{12.160}$$

我们有

$$\begin{aligned}(\not{\mathcal{L}}_X\vartheta)(R_i, R_j) &= X(\vartheta(R_i, R_j)) - \vartheta([X, R_i], R_j) - \vartheta(R_i, [X, R_j]) \\ &= X \cdot \not{d}(\vartheta(R_i, R_j)) + \vartheta(\not{\mathcal{L}}_{R_i}X, R_j) + \vartheta(R_i, \not{\mathcal{L}}_{R_j}X)\end{aligned} \tag{12.161}$$

所以

$$\begin{aligned}|(\not{\mathcal{L}}_X\vartheta)(R_i, R_j)| &\leqslant |X||\not{d}(\vartheta(R_i, R_j))| + |\vartheta|(|R_i||\not{\mathcal{L}}_{R_j}X| + |R_j||\not{\mathcal{L}}_{R_i}X|) \\ &\leqslant |X||\not{d}(\vartheta(R_i, R_j))| + C(1+t)|\vartheta|\max_k|\not{\mathcal{L}}_{R_k}X|\end{aligned} \tag{12.162}$$

(由 (12.157) 的第一式). 再由 **H0** 有

$$|\not{d}(\vartheta(R_i, R_j))| \leqslant C(1+t)^{-1}\sum_k|R_k(\vartheta(R_i, R_j))| \tag{12.163}$$

而由

$$R_k(\vartheta(R_i, R_j)) = (\not{\mathcal{L}}_{R_k}\vartheta)(R_i, R_j) + \vartheta([R_k, R_i], R_j) + \vartheta(R_i, [R_k, R_j]) \tag{12.164}$$

和 (12.157), 我们有

$$|R_k(\vartheta(R_i,R_j))| \leqslant C(1+t)^2(|\not{\mathcal{L}}_{R_k}\vartheta|+|\vartheta|) \tag{12.165}$$

将这个代入 (12.163), 我们有

$$|\not{d}(\vartheta(R_i,R_j))| \leqslant C(1+t)(\max_k|\not{\mathcal{L}}_{R_k}\vartheta|+|\vartheta|) \tag{12.166}$$

将这个代入 (12.162), 则由 (12.160) 关于 ϑ 的结论成立. □

12.3 χ' 和 μ 的高阶导数估计

引理 12.3 设 Y 是 $S_{t,u}$ 上的任意一个切向量场, ϑ 是定义在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中的 $S_{t,u}$ 上的任意一个二阶协变张量场. 则我们有

$$\not{\mathcal{L}}_L\not{\mathcal{L}}_Y\vartheta-\not{\mathcal{L}}_Y\not{\mathcal{L}}_L\vartheta=\not{\mathcal{L}}_{{}^{(Y)}Z}\vartheta$$

证明　我们可以将自己限制在 C_u 上. 我们将 ϑ 延拓到 TC_u 使得它满足

$$\vartheta(L,W)=\vartheta(W,L)=0$$

对 $W\in TC_u$ 成立. 所以对 $W\in TC_u$, 我们有

$$(\mathcal{L}_L\vartheta)(L,W)=L(\vartheta(L,W))-\vartheta([L,L],W)-\vartheta(L,[L,W])=0$$

(注意到 $[L,W]$ 与 C_u 相切). 类似地, $(\mathcal{L}_L\vartheta)(W,L)=0$. 从而

$$\not{\mathcal{L}}_L\vartheta=\mathcal{L}_L\vartheta \tag{12.167}$$

另一方面, 对任意 $S_{t,u}$ 上的切向量场 X, 由引理 8.2, 我们有

$$(\mathcal{L}_Y\vartheta)(L,X)=Y(\vartheta(L,X))-\vartheta([Y,L],X)-\vartheta(L,[Y,X])=\vartheta([L,Y],X)=\vartheta({}^{(Y)}Z,X)$$

类似地, $(\mathcal{L}_Y\vartheta)(X,L)=\vartheta(X,{}^{(Y)}Z)$. 同样,

$$(\mathcal{L}_Y\vartheta)(L,L)=Y(\vartheta(L,L))-\vartheta([Y,L],L)-\vartheta(L,[Y,L])=0$$

从而在 C_u 上有

$$\not{\mathcal{L}}_Y\vartheta=\mathcal{L}_Y\vartheta-(\vartheta\cdot{}^{(Y)}Z)\otimes dt-dt\otimes({}^{(Y)}Z\cdot\vartheta) \tag{12.168}$$

其中由定义

$$(\vartheta \cdot {}^{(Y)}Z)(X) = \vartheta(X, {}^{(Y)}Z),$$
$$({}^{(Y)}Z \cdot \vartheta)(X) = \vartheta({}^{(Y)}Z, X) \quad \text{对于} \quad X \in TS_{t,u} \tag{12.169}$$

考虑

$$\not{\mathcal{L}}_L \not{\mathcal{L}}_Y \vartheta - \not{\mathcal{L}}_Y \not{\mathcal{L}}_L \vartheta$$

在 $S_{t,u}$ 上标架 X_A 的取值. 其值为

$$(\mathcal{L}_L(\not{\mathcal{L}}_Y \vartheta) - \mathcal{L}_Y(\not{\mathcal{L}}_L \vartheta))(X_A, X_B) \tag{12.170}$$

代入 (12.167) 和 (12.168), 该式变为

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}_L\mathcal{L}_Y\vartheta - \mathcal{L}_L(\vartheta \cdot {}^{(Y)}Z) \otimes dt - dt \otimes \mathcal{L}_L({}^{(Y)}Z \cdot \vartheta) - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_L\vartheta)(X_A, X_B)\\ &= (\mathcal{L}_L\mathcal{L}_Y\vartheta - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_L\vartheta)(X_A, X_B)\end{aligned} \tag{12.171}$$

这里我们用到了事实: $\mathcal{L}_L dt = d(Lt) = 0$ 以及 $dt(X_A) = dt(X_B) = 0$. 所以 (12.170) 化为

$$(\mathcal{L}_L\mathcal{L}_Y\vartheta - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_L\vartheta)(X_A, X_B) = (\mathcal{L}_{[L,Y]}\vartheta)(X_A, X_B) = (\mathcal{L}_{{}^{(Y)}Z}\vartheta)(X_A, X_B) \tag{12.172}$$

从而引理得证. □

给定正整数 l 和多重指标 $(i_1 \cdots i_l)$, 我们定义 $S_{t,u}$ 上的对称二阶协变张量场:

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi' \tag{12.173}$$

我们将由 (12.47) 导出一个关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\chi'$ 的传输方程. 由引理 11.22, 我们得到

$$[\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}, \not{\mathcal{L}}_L]\chi' = \sum_{k=0}^{l-1} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} [\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k}}}, \not{\mathcal{L}}_L] \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi' \tag{12.174}$$

将引理 12.3 用到 $Y = R_{i_{l-k}}, \vartheta = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi'$, 我们得到

$$[\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k}}}, \not{\mathcal{L}}_L] \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi' = -\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi' \tag{12.175}$$

代入 (12.174), 我们得到

$$\begin{aligned}\not{\mathcal{L}}_L {}^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l = &\sum_{k=0}^{l-1} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}} \not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi'\\ &+ \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_L \chi')\end{aligned} \tag{12.176}$$

我们将用 (12.47) 表示最后一项. 首先我们有

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\chi' \cdot \chi') = {}^{(i_1 \cdots i_l)}\chi'_l \cdot \chi' + \chi' \cdot {}^{(i_1 \cdots i_l)}\chi'_l + {}^{(i_1 \cdots i_l)}r_l \tag{12.177}$$

其中

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}r_l = \sum_{|s_1|+|s_2|+|s_3|=l;|s_1|,|s_3|<l} (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}\chi' \cdot (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_2}\not{g}^{-1} \cdot (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_3}\chi' \tag{12.178}$$

接下来我们有

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (e\chi') = e^{(i_1 \cdots i_l)}\chi'_l + {}^{(i_1 \cdots i_l)}s_l \tag{12.179}$$

其中

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}s_l = \sum_{|s_1|+|s_2|=l,|s_2|<l} (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1} e (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_2}\chi' \tag{12.180}$$

再由 (12.47), 我们得到

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_L\chi') = e^{(i_1 \cdots i_l)}\chi'_l + {}^{(i_1 \cdots i_l)}\chi'_l \cdot \chi' + \chi' \cdot {}^{(i_1 \cdots i_l)}\chi'_l + {}^{(i_1 \cdots i_l)}b_l \tag{12.181}$$

其中

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}b_l = {}^{(i_1 \cdots i_l)}s_l + {}^{(i_1 \cdots i_l)}r_l + \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} b \tag{12.182}$$

并且

$$b = \frac{e\not{g}}{1-u+t} - \alpha' \tag{12.183}$$

给定正整数 l, 记 $\not{\mathbf{X}}'_l$ 为如下结论: 存在不依赖于 s 的常数 C 使得对 $t \in [0, s]$ 有

$$\not{\mathbf{X}}'_l: \quad \max_{i_1 \cdots i_l} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi'\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

记 $\not{\mathbf{X}}'_{[l]}$ 为

$$\not{\mathbf{X}}'_{[l]}: \quad \not{\mathbf{X}}'_0 \quad 且 \cdots\cdots 且 \quad \not{\mathbf{X}}'_l$$

引理 12.4 设 **H0** 和 (12.23) 成立. 同样设连续性假设 $\not{\mathbf{E}}_{[l]}, \not{\mathbf{E}}^Q_{[l-1]}$ 和 $\not{\mathbf{X}}'_{[l-1]}$ 对某个正整数 l 成立. 则 $\not{\mathbf{X}}_{[l-1]}$ (命题 10.1 的假设) 同样成立.

证明 $l = 1$ 时结论是平凡的. 设引理对 $l-1$ 成立, 其中 $l \geqslant 2$. 即, 设 $\not{\mathbf{X}}'_{[l-2]}$ 和 $\not{\mathbf{E}}_{[l-1]}, \not{\mathbf{E}}^Q_{[l-2]}$, **H0** 以及 (12.23) 共同推出 $\not{\mathbf{X}}_{[l-2]}$. 则由推论 10.1.d (l 被 $l-1$ 替代), 我们有

$$\max_i \|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l-2],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad t \in [0, s] \tag{12.184}$$

则对任意正整数 n, 我们有

$$\not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi = \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi' + \frac{1}{1-u+t} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_2}} {}^{(R_{i_1})}\not{\pi} \tag{12.185}$$

所以

$$\begin{aligned} & \max_{i_1 \cdots i_n} \| \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi \|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\ \leqslant & \| \not{\mathcal{L}}_{R_{i_n}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi' \|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} + C(1+t)^{-1} \max_j \| {}^{(R_j)}\not{\pi} \|_{\infty,[n-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \end{aligned} \tag{12.186}$$

取 $n = l-1$, 引理得证. □

命题 12.9 设命题 12.6 的假设成立. 同样设 $\mathbf{E}_{\{l+2\}}, \mathbf{E}_{\{l+1\}}^{Q}, \mathbf{E}_{\{l\}}^{QQ}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中对某个非负整数 l 成立, 同样设初值满足

$$\|\chi'\|_{\infty,[l],\Sigma_0^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0$$

则存在一个不依赖于 s 的常数 C_l 使得对 $t \in [0,s]$ 我们有

$$\|\chi'\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

即 $\mathbf{X}'_{[l]}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立.

证明 当 $l=0$ 时该命题就是命题 12.6. 然后我们运用归纳法. 设命题对 $l-1$ 成立, 其中 $l \geqslant 1$. 则 $\mathbf{X}'_{[l-1]}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立, 所以由引理 12.4, $\mathbf{X}_{[l-1]}$ 同样在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 从而命题 10.1 及其推论成立.

由命题 12.6 和 (12.48), 我们有

$$\|e + 2\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \quad \text{对于} \quad t \in [0,s] \tag{12.187}$$

我们将用命题 10.1 的推论来估计 ${}^{(i_1 \cdots i_l)}b_l$. 由 $e, \kappa^{-1}\zeta$ 的假设以及当前命题的假设, 我们有

$$\|e\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \|\kappa^{-1}\zeta\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}, \|\not{k}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-2} \quad \text{对于} \quad t \in [0,s] \tag{12.188}$$

这里我们用到了推论 10.1.a 和推论 10.1.b.

类似地, 由 α' 的表达式, 我们有

$$\|\alpha'\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \max_j |\not{\mathcal{L}}_{R_j} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_2}} \chi'| + C_l \delta_0 (1+t)^{-3} \tag{12.189}$$

对 $t \in [0, s]$ 成立.

为了看到如何估计 α' 中的主部, 即 $\not{D}^2 h$ 的 $\| \quad \|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$ 范数, 我们将运用引理 10.9, **H0**, **H1**, **H2** 以及如下事实:

$$^{(R_i)}\pi_{AB} = -2\lambda_i(-\eta^{-1}\chi_{AB} + \not{k}_{AB})$$

(见 (3.27) 和 (6.59)). 所以我们得到

$$|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} b| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \max_j |\not{\mathcal{L}}_{R_j} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_2}} \chi'| C_l\delta_0(1+t)^{-3} \quad \text{在} \quad W_{\epsilon_0}^s \quad \text{上} \tag{12.190}$$

由归纳假设和推论 10.1.d,

$$\max_{i;i_1\cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} {}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad \text{对于} \quad k = 0, 1, \cdots, l-1$$

我们要用这个来估计 $^{(i_1\cdots i_l)}r_l$ (见 (12.178)). 然后我们推出

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}s_l\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t)) \quad \text{对于} \quad t \in [0, s] \tag{12.191}$$

和

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}r_l\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2 \quad \text{对于} \quad t \in [0, s] \tag{12.192}$$

从而

$$\begin{aligned}&|^{(i_1\cdots i_l)}b_l| \\ \leqslant\ & C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \max_j |\not{\mathcal{L}}_{R_j} \not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_2}} \chi'| + C_l\delta_0(1+t)^{-3} \\ & \text{对于} \quad t \in [0, s]\end{aligned} \tag{12.193}$$

由 (12.181), (12.187) 和 (12.193), 我们得到

$$|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} (\not{\mathcal{L}}_L \chi')| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \max_{j_1\cdots j_l} |^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0(1+t)^{-3} \quad \text{在} \quad W_{\epsilon_0}^s \quad \text{上} \tag{12.194}$$

我们仍需估计 (12.176) 右端的和式. 考虑与 $k \in \{0, \cdots, l-1\}$ 对应的一项. 运用引理 8.5, 将 ξ 取成 $\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \chi'$, 将 $\{1, \cdots, l\}$ 取成 $\{l-k+1, \cdots, l\}$, 我们

可以将求和项表示成

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\!\!\!/_{R_{i_l}} \cdots \mathcal{L}\!\!\!/_{R_{i_{l-k+1}}} \mathcal{L}\!\!\!/_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z} \mathcal{L}\!\!\!/_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \mathcal{L}\!\!\!/_{R_{i_1}} \chi' \\
=& \mathcal{L}\!\!\!/_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z} {}^{(i_1 \overset{>i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1} \\
&+ \sum_{p=1}^{k} \sum_{m_1<\cdots<m_p=l-k+1}^{l} \mathcal{L}\!\!\!/_{{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z} {}^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1-p}
\end{aligned}
\tag{12.195}
$$

其中

$$
{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z = \mathcal{L}\!\!\!/_{R_{i_{m_p}}} \cdots \mathcal{L}\!\!\!/_{R_{i_{m_1}}} {}^{(R_{i_{l-k}})}Z \tag{12.196}
$$

(注意到引理 8.5 对任意 $S_{t,u}$ 上的张量场 ξ 都成立.)

为了估计 (12.195) 右端的项, 我们将运用命题 12.8 的第二个结论. 对第一项, 我们有

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{L}\!\!\!/_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z} {}^{(i_1 \overset{>i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1}| \\
\leqslant& C(1+t)^{-1}(|{}^{(R_{i_{l-k}})}Z|(\max_j |{}^{(i_1 \overset{>i_{l-k}<}{\cdots} i_l j)}\chi'_l| + |{}^{(i_1 \overset{>i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1}|) \\
&+|{}^{(i_1 \overset{>i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1}| \max_j |{}^{(j;i_{l-k})}Z|)
\end{aligned}
\tag{12.197}
$$

当 $l \geqslant 2$ 时, 推论 10.1.i 与归纳假设 $\mathbf{X}'_{[l-1]}$ 意味着 (12.197) 的右端被

$$
C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \max_{j_1\cdots j_l} |{}^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2 \tag{12.198}
$$

界定. 当 $l=1$ 时, 推论 10.1.i 只能给出 ${}^{(R_i)}Z$ 的估计, 所以 ${}^{(j;i_{l-k})}Z$ 不能用这种方式估计. 回忆 ${}^{(R_i)}Z = {}^{(R_i)}\not{\pi}_L \cdot \not{g}^{-1}$, 由 (6.57) 有

$$
{}^{(R_i)}\not{\pi}_L + \chi' \cdot R_i = \epsilon_{ijm} z^j \not{d}x^m + \lambda_i(\kappa^{-1}\zeta) \tag{12.199}
$$

由关于 $(R)^s x^j$ 和 λ_i 的推论 10.1.g, 推论 10.1.a, 我们有如下估计:

$$
\begin{aligned}
&\max_i \|\lambda_i\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)), \quad \max_i \|\not{d}x^i\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C, \\
&\max_j \|z^j\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad \text{对于} \quad t\in[0,s]
\end{aligned}
$$

再由 (12.188) 的第二式, 我们得到

$$
\|{}^{(R_i)}\not{\pi}_L + \chi' \cdot R_i\|_{\infty,[1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad \text{对于} \quad t\in[0,s] \tag{12.200}
$$

进一步, 在推论 10.1.e 中取 $l=1$ 以及 $\mathbf{X}_0'$ 有

$$|\not{\mathcal{L}}_{R_j}(\chi'\cdot R_i)|\leqslant|\not{\mathcal{L}}_{R_j}\chi'||R_i|+|\chi'||\not{\mathcal{L}}_{R_j}R_i|$$
$$\leqslant C(1+t)|\not{\mathcal{L}}_{R_j}\chi'|+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad (12.201)$$

所以

$$|\not{\mathcal{L}}_{R_j}{}^{(R_i)}\not{\pi}_L|\leqslant C(1+t)|\not{\mathcal{L}}_{R_j}\chi'|+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad (12.202)$$

从而由推论 10.1.d, 我们有

$$|\not{\mathcal{L}}_{R_j}{}^{(R_i)}Z|\leqslant C(1+t)|\not{\mathcal{L}}_{R_j}\chi'|+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad (12.203)$$

在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 用这个我们可以估计 (12.197) 右端的最后一项. 所以在 $l=1$ 的情形, 我们也有如 (12.198) 那样的估计.

考虑 (12.195) 中对应于 $\{m_1,\cdots,m_p\}\subset\{l-k+1,\cdots,l\}$, $p\in\{1,\cdots,k\}$ 的双重求和项. 这些只在 $l\geqslant 2$ 时出现. 运用命题 12.8 的第二个结论, 我们得到

$$\begin{aligned}&|\not{\mathcal{L}}_{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})Z}{}^{(i_1\ \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}\ i_l)}\chi'_{l-1-p}|\\ &\leqslant C(1+t)^{-1}\cdot(|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z|(\max_j|^{(i_1\ \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}\ i_lj)}\chi'_{l-p}|\\ &\quad+|^{(i_1\ \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}\ i_l)}\chi'_{l-1-p}|)+|^{(i_1\ \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}\ i_l)}\chi'_{l-1-p}|\max_j|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z|)\end{aligned} \quad (12.204)$$

由于 $p\geqslant 1$, 由归纳假设 $\mathbf{X}_{[l-1]}'$ 有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\ \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}\ i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\ &\max_j\|^{(i_1\ \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}\ i_lj)}\chi'_{l-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\\ &\qquad\text{对于}\quad t\in[0,s]\end{aligned} \quad (12.205)$$

同样, 由于 $p\leqslant k\leqslant l-1$, 再由推论 10.1.i, 我们有

$$\|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\quad\text{对于}\quad t\in[0,s] \quad (12.206)$$

但是当 $p=k=l-1$ 时, 我们不能用这种方法估计 ${}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z$, 理由同上. 然而用 (12.199) 和 (12.199) 下方的估计以及 (12.188) 的第二式和第十章中的结果, 我

们有

$$\|^{(R_i)}\not{\pi}_L + \chi' \cdot R_i\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad \text{对于} \quad t \in [0,s] \tag{12.207}$$

并且由推论 10.1.e 和 $\mathbf{X}'_{[l-1]}$, 我们有

$$\begin{aligned}|\not{\mathcal{L}}_{R_{j_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{j_1}}(\chi' \cdot R_i)| &\leqslant |\not{\mathcal{L}}_{R_{j_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{j_1}}\chi'||R_i| + \sum_{|s_1|+|s_2|=l, s_2 \geqslant 1} |(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}\chi'||(\not{\mathcal{L}}_R)^{s_2}R_i| \\ &\leqslant C(1+t)|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\end{aligned} \tag{12.208}$$

将 (12.207) 和 (12.208) 组合起来有

$$|\not{\mathcal{L}}_{R_{j_1}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{j_1}}{}^{(R_i)}\not{\pi}_L| \leqslant C(1+t)|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.209}$$

所以由推论 10.1.d, 同样有

$$|^{(j_1\cdots j_l;i)}Z| \leqslant C(1+t)|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.210}$$

将上述结果组合起来, 我们得到

当 $p=k=l-1$ 时,

$$\begin{aligned}&|\not{\mathcal{L}}_{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})_Z}{}^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1-p}| \\ \leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \max_{j_1\cdots j_l}|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2\end{aligned} \tag{12.211}$$

否则,

$$|\not{\mathcal{L}}_{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})_Z}{}^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-k-p}| \leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2 \tag{12.212}$$

将这些与关于 (12.195) 右端第一项的估计 (12.198) 结合起来, 我们得到

$$\begin{aligned}&|\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})_Z}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\chi'| \\ \leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \max_{j_1\cdots j_l}|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2\end{aligned} \tag{12.213}$$

这个与 (12.194) 共同意味着

$$|\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l| \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\max_{j_1\cdots j_l}|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l| + C_l\delta_0(1+t)^{-3} \tag{12.214}$$

然后运用 (12.56), 取 $\vartheta = {}^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l$, 再用 $\mathbf{X}'_0$, 我们推出

$$\begin{aligned} L((1-u+t)^2|^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l|) \leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))((1-u+t)^2\max_{j_1\cdots j_l}|^{(j_1\cdots j_l)}\chi'_l|) \\ & +C_l\delta_0(1+t)^{-1} \end{aligned} \tag{12.215}$$

沿着 L 的积分曲线设

$${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t) = (1-u+t)^2|^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l| \tag{12.216}$$

(12.215) 变为

$$\frac{d^{(i_1\cdots i_l)}x_l}{dt} \leqslant f_l\max_{j_1\cdots j_l}{}^{(j_1\cdots j_l)}x_l + g_l \tag{12.217}$$

其中

$$f_l(t) = C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)), \quad g_l(t) = C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.218}$$

从 $t=0$ 开始积分有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t) \leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0) + \int_0^t (f_l(t')\max_{j_1\cdots j_l}{}^{(j_1\cdots j_l)}x_l(t') + g_l(t'))dt' \tag{12.219}$$

关于 $i_1\cdots i_l$ 在两边取最大, 设

$$\bar{x}_l(t) = \max_{i_1\cdots i_l}{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t) \tag{12.220}$$

则我们得到

$$\bar{x}_l(t) \leqslant \bar{x}_l(0) + \int_0^t (f_l(t')\bar{x}_l(t') + g_l(t'))dt' \tag{12.221}$$

这意味着

$$\bar{x}_l(t) \leqslant e^{\int_0^t f_l(t')dt'}(\bar{x}_l(0) + \int_0^t g_l(t')dt') \tag{12.222}$$

由于

$$\bar{x}_l(0) \leqslant \max_{i_1\cdots i_l}\|^{(i_1\cdots i_l)}\chi'_l\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0 \tag{12.223}$$

而

$$\bar{x}_l(t) \geqslant \frac{1}{4}(1+t)^2 \max_{i_1\cdots i_l} |^{(i_1\cdots i_l)}\chi_l'| \quad (u \leqslant \epsilon_0 \leqslant \frac{1}{2}) \tag{12.224}$$

考虑到如下事实:

$$\int_0^t f_l(t')dt' \leqslant \int_0^\infty f_l(t')dt' = 2C_l, \qquad \int_0^t g_l(t')dt' = C_l\delta_0 \log(1+t)$$

然后在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上面取上确界, 我们得到

$$\max_{i_1\cdots i_l} \|^{(i_1\cdots i_l)}\chi_l'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.225}$$

这个与归纳假设 $\mathbf{X}'_{[l-1]}$ 共同意味着 $\mathbf{X}'_{[l]}$, 这就完成了命题的证明. □

由引理 12.4 (用 $l+1$ 代替 l), 在命题 12.9 的假设下我们有 $\mathbf{X}_{[l]}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 所以命题 10.1 及其推论对 $l+1$ 成立.

命题 12.10 设命题 12.9 的假设对 l 成立. 并且设初值满足

$$\|\mu - 1\|_{\infty,[m,l+1],\Sigma_0^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0$$

对某个 $m\in\{0,\cdots,l+1\}$ 成立. 则存在一个不依赖于 s 的常数 C_l 使得对 $t\in[0,s]$, 我们有

$$\|\mu - 1\|_{\infty,[m,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t))$$

即 $\mathbf{M}_{[m,l+1]}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立.

证明 我们首先考虑 $m=0$ 的情形. 由于 $M_{[0,0]}$ 可以直接由命题 12.1 得到, 所以我们对 l 用归纳法. 假设 $\mathbf{M}_{[0,l]}$, 我们将在 $m=0$ 时的命题假设下用它推出 $\mathbf{M}_{[0,l+1]}$.

考虑方程

$$L\mu = m + \mu e \tag{12.226}$$

将 $R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}$ 运用到该方程. 由引理 11.22, 我们得到

$$[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}, L] = -\sum_{k=0}^{l} R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_{l+2-k}}{}^{(R_{i_{l+1-k}})}Z R_{i_{l-k}}\cdots R_{i_1} \tag{12.227}$$

定义

$$^{(i_1\cdots i_{l+1})}\mu_{0,l+1} = R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mu \tag{12.228}$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
L^{(i_1\cdots i_{l+1})}\mu_{0,l+1} = &\sum_{k=0}^{l} R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_{i+2-k}}\left({}^{(R_{i_{l+1-k}})}Z\cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_{l-k})}\mu_{0,l-k}\right)\\
&+e^{(i_1\cdots i_{l+1})}\mu_{0,l+1}+R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}m+{}^{(i_1\cdots i_{l+1})}r'_{0,l+1}
\end{aligned}
\tag{12.229}
$$

其中

$$
{}^{(i_1\cdots i_{l+1})}r'_{0,l+1}=\sum_{|s_1|+|s_2|=l+1,s_1\geqslant 1}((R)^{s_1}e)((R)^{s_2}\mu) \tag{12.230}
$$

现在由 $\mathbf{E}_{\{l+2\}},\mathbf{E}^{Q}_{\{l+1\}}$ 和推论 10.1.a (现在命题 10.1 对 $l+1$ 成立),

$$
\begin{aligned}
\|Th\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}\\
\|Lh\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}\\
\|\omega_{L\hat{T}}\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}\quad 对于\quad t\in[0,s]
\end{aligned}
\tag{12.231}
$$

所以由 e 的表达式, 我们得到

$$
\|e\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}\quad 对于\quad t\in[0,s] \tag{12.232}
$$

再由 (12.231) 的第一式, 我们得到

$$
\|m\|_{\infty,[l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}\quad 对于\quad t\in[0,s] \tag{12.233}
$$

(12.232) 与归纳假设 $\mathbf{M}_{[0,l]}$ 意味着

$$
\|{}^{(i_1\cdots i_{l+1})}r'_{0,l+1}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\quad 对于\quad t\in[0,s] \tag{12.234}
$$

最后考虑 (12.229) 中对应于 $k\in\{0,\cdots,l\}$ 的求和项. 我们将其表示为

$$
\begin{aligned}
&R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_{l+2-k}}\left({}^{(R_{i_{l+1-k}})}Z\cdot \not{d}^{(i_1\cdots i_{l-k})}\mu_{0,l-k}\right)\\
={}&{}^{(R_{i_{l+1-k}})}Z\cdot \not{d}^{(i_1\overset{>i_{l+1-k}<}{\cdots} i_{l+1})}\mu_{0,l}\\
&+\sum_{|s_1|+|s_2|=k,|s_1|\geqslant 1}((\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}{}^{(R_{i_{l+1-k}})}Z)\cdot \not{d}(R)^{s_2}{}^{(i_1\cdots i_{l-k})}\mu_{0,l-k}
\end{aligned}
\tag{12.235}
$$

首先考虑 (12.235) 右端的求和项. 由推论 10.1.i (用 $l+1$ 代替 l),

$$
\max_i\|{}^{(R_i)}Z\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\quad 对于\quad t\in[0,s] \tag{12.236}
$$

由于 $|s_1| \leqslant k \leqslant l$, 这使得我们可以界定求和式中的第一个因子. 并且由 **H0** 和归纳假设 $\mathbf{M}_{[0,l]}$, 求和式中第二个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数可以被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$$

界定, 我们用到了 $1+|s_2|+l-k \leqslant l$. 所以 (12.235) 中的和式的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{12.237}$$

界定. 另一方面, 由 **H0** 和 (12.236), (12.235) 右端第一项被

$$C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\max_j |{}^{(i_1 \overset{>i_{l+1-k}<}{\cdots} i_{l+1}j)}\mu_{0,l+1}| \tag{12.238}$$

界定. 将 (12.237) 和 (12.238) 组合起来, (12.229) 右端的和式被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\max_{j_1\cdots j_l}|{}^{(j_1\cdots j_{l+1})}\mu_{0,l+1}| + C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{12.239}$$

界定.

(12.232), (12.233), (12.234) 和 (12.239) 通过 (12.229) 意味着

$$\begin{aligned}&L(|{}^{(i_1\cdots i_{l+1})}\mu_{0,l+1}|)\\ &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\max_{j_1\cdots j_{l+1}}|{}^{(j_1\cdots j_{l+1})}\mu_{0,l+1}| + C_l\delta_0(1+t)^{-1}\end{aligned} \tag{12.240}$$

沿着 L 的积分曲线定义

$${}^{(i_1\cdots i_{l+1})}x'_{0,l+1}(t) = |{}^{(i_1\cdots i_{l+1})}\mu_{0,l+1}| \tag{12.241}$$

(12.240) 有如下形式:

$$\frac{d^{(i_1\cdots i_{l+1})}x'_{0,l+1}}{dt} \leqslant f_l \max_{j_1\cdots j_{l+1}} {}^{(j_1\cdots j_{l+1})}x'_{0,l+1} + g_l \tag{12.242}$$

其中

$$f_l(t) = C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)), \quad g_l(t) = C_l\delta_0(1+t)^{-1} \tag{12.243}$$

这与 (12.217)—(12.218) 类似. 再设

$$\bar{x}'_{0,l+1}(t) = \max_{i_1\cdots i_{l+1}} {}^{(i_1\cdots i_{l+1})}x'_{0,l+1}(t) \tag{12.244}$$

并且由初值条件

$$\bar{x}'_{0,l+1}(0) \leqslant C_l\delta_0$$

我们推出

$$\max_{i_1\cdots i_{l+1}} \|^{(i_1\cdots i_{l+1})}\mu_{0,l+1}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.245}$$

这就证明了 $m=0$ 的情形.

为了证明 $m\in\{1,\cdots,l+1\}$ 的情形, 我们对 m 用归纳法. 假设 $\mathbf{M}_{[m,l+1]}$ 对某个 $m\in\{0,\cdots,l\}$ 成立, 我们将要建立 $\mathbf{M}_{[m+1,l+1]}$, 前提是初值满足

$$\|\mu-1\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_0^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0 \tag{12.246}$$

首先将 T^{m+1} 作用到 $L\mu$, 再由引理 11.22, 我们得到

$$L(T)^{m+1}\mu = T^{m+1}L\mu + \sum_{k=0}^{m}(T)^k\Lambda(T)^{m-k}\mu \tag{12.247}$$

然后再将 $R_{i_n}\cdots R_{i_1}$ 用到这个方程, 同样由引理 11.22 得

$$\begin{aligned}LR_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\mu =& R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}L\mu + \sum_{k=0}^{m}R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^k\Lambda(T)^{m-k}\mu\\ &+\sum_{k=0}^{n-1}R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(R_{i_{n-k}})}ZR_{i_{n-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\mu\end{aligned} \tag{12.248}$$

像第九章中那样定义

$$^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m+1,n} = R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\mu \tag{12.249}$$

将 $R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}$ 作用到方程 (12.226), 我们得到

$$R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}L\mu = e^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m+1,n} + R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}m + {}^{(i_1\cdots i_n)}r'_{m+1,n} \tag{12.250}$$

其中

$$\begin{aligned}^{(i_1\cdots i_n)}r'_{m+1,n} =& \sum_{|s_1|+|s_2|=n,s_1\geqslant 1}((R)^{s_1}e)((R)^{s_2}(T)^{m+1}\mu)\\ &+R_{i_n}\cdots R_{i_1}(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}((T)^ke)((T)^{m+1-k}\mu))\end{aligned} \tag{12.251}$$

将 (12.250) 代入 (12.248), 我们得到

$$
\begin{aligned}
L^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m+1,n} = e^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m+1,n} + R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}m + {}^{(i_1\cdots i_n)}r'_{m+1,n} \\
+\sum_{k=0}^{m} R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^k\Lambda(T)^{m-k}\mu \\
+\sum_{k=0}^{n-1} R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}{}^{(R_{i_{n-k}})}ZR_{i_{n-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\mu
\end{aligned}
\tag{12.252}
$$

由假设 $\mathbf{E}_{\{l+2\}},\mathbf{E}^{Q}_{\{l+1\}}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|Th\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}\\
&\|Lh\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \quad 对于 \quad t\in[0,s]
\end{aligned}
\tag{12.253}
$$

再由推论 11.1.b, 我们有

$$
\|\omega_{L\hat{T}}\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.254}
$$

(12.253) 和 (12.254) 意味着

$$
\|e\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.255}
$$

(12.253) 意味着

$$
\|m\|_{\infty,[m+1,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1} \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.256}
$$

同样, (12.255) 与 $\mathbf{M}_{[m,l+1]}$ 共同意味着

$$
\|{}^{(i_1\cdots i_n)}r'_{m+1,n}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad n\leqslant l-m \tag{12.257}
$$

前提是 $n=0$, 从而 (12.251) 右端的第一个求和式为 0, 或者 $\mathbf{M}_{m+1,m+n}$ 成立. 并且由推论 11.1.c 有

$$
\|\Lambda\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.258}
$$

为了建立 $\mathbf{M}_{[m+1,l+1]}$, 我们将用关于 n 的归纳法对 $n=0,\cdots,l-m$ 建立 $\mathbf{M}_{[m+1,m+1+n]}$. 我们从 $n=0$ 开始. 此时方程 (12.252) 化为

$$
L\mu_{m+1,0} = e\mu_{m+1,0} + (T)^{m+1}m + r'_{m+1,0} + \sum_{k=0}^{m}(T)^k\Lambda(T)^{m-k}\mu \tag{12.259}
$$

运用 (12.258) (取 $l=m$) 以及 $\mathbf{M}_{[m,m+1]}$, (12.259) 中求和式的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$\sum_{k=0}^{m}\|\Lambda\cdot \not{d}(T)^{m-k}\mu\|_{\infty,[k,k],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_m(1+t)^{-1}\|\Lambda\|_{\infty,[m,m],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\|\mu-1\|_{\infty,[m,m+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_m\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \quad (12.260)$$

界定. 再由 (12.48) 和 (12.256) (取 $l=m$) 以及 (12.257) (取 $n=0$), 我们推出

$$L(|\mu_{m+1,0}|)\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}|\mu_{m+1,0}|+C_m\delta_0(1+t)^{-1} \quad (12.261)$$

这个与

$$\|\mu-1\|_{\infty,[m+1,m+1],\Sigma_0^{\epsilon_0}}\leqslant C_m\delta_0 \quad (12.262)$$

意味着

$$\|\mu_{m+1,0}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_m\delta_0(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad t\in[0,s] \quad (12.263)$$

这个估计与 $\mathbf{M}_{[m,m+1]}$ 意味着 $\mathbf{M}_{[m+1,m+1]}$.

接下来设 $\mathbf{M}_{[m+1,m+n]}$ 对某个 $n\in\{1,\cdots,l-m\}$ 成立. 我们将证明 $\mathbf{M}_{[m+1,m+1+n]}$ 也成立. 考虑 (12.252) 右端的第一项求和式. 由于 $n\leqslant l-m$, 这一项的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$\sum_{k=0}^{m}\|\Lambda\cdot \not{d}(T)^{m-k}\mu\|_{\infty,[k,l+k-m],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}\|\Lambda\|_{\infty,[m,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\|\mu-1\|_{\infty,[m,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}$$
$$\leqslant C_l\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \quad (12.264)$$

界定. 我们用了 (12.258) 和 $\mathbf{M}_{[m,l+1]}$.

接下来考虑 (12.252) 右端的第二个求和式. 考虑其中与 $k\in\{0,\cdots,n-1\}$ 对应的一项. 我们将其表达为

$$\begin{aligned}&R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}({}^{(R_{i_{n-k}})}Z\cdot \not{d}R_{i_{n-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\mu)\\ =&{}^{(R_{i_{n-k}})}Z\cdot \not{d}^{(i_1\overset{>i_{n-k}<}{\cdots}i_n)}\mu_{m+1,n-1}\\ &+\sum_{|s_1|+|s_2|=k,|s_1|\geqslant 1}((\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}{}^{(R_{i_{n-k}})}Z)\cdot \not{d}(R)^{s_2'}(T)^{m+1}\mu\end{aligned} \quad (12.265)$$

其中求和是针对 $\{n-k+1,\cdots,n\}$ 的任意一个分解 $\{s_1,s_2\}$, 并且 s_1 非空. 同样,

$$s_2'=s_2\bigcup\{1,\cdots,n-k-1\}$$

由于 $|s_1| \leqslant k \leqslant n-1 \leqslant l-m-1$, 和式中第一个因子被 (12.236) 界定. 同样, 由于 $|s_2| \leqslant k-1$, 我们有

$$|s_2'| = |s_2| + n - k - 1 \leqslant n-2 \quad \text{和} \quad 1 + |s_2'| + m + 1 \leqslant n + m$$

所以由 **H0** 和 $\mathbf{M}_{m+1,m+n}$, 和式被

$$C_l \delta_0^2 (1+t)^{-2} (1 + \log(1+t))^2 \tag{12.266}$$

界定. 另一方面, 由 (12.236) 和 **H0**, (12.265) 右端第一项被

$$C_l \delta_0 (1+t)^{-2} (1 + \log(1+t)) \max_j |^{(i_1 \overset{>i_{n-k}<}{\cdots} i_n j)} \mu_{m+1,n}| \tag{12.267}$$

界定. 将 (12.266) 和 (12.267) 组合起来, 我们得出 (12.252) 右端的第二个和式被

$$\begin{aligned} &C_l \delta_0 (1+t)^{-2} (1 + \log(1+t)) \max_j |^{(i_1 \overset{>i_{n-k}<}{\cdots} i_n j)} \mu_{m+1,n}| \\ &+ C_l \delta_0^2 (1+t)^{-2} (1 + \log(1+t))^2 \end{aligned} \tag{12.268}$$

界定.

(12.255)—(12.257), (12.264) 和 (12.268) 通过 (12.252) 意味着

$$\begin{aligned} &L(|^{(i_1 \cdots i_l)} \mu_{m+1,n}|) \\ &\leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-2} (1 + \log(1+t)) \max_{j_1 \cdots j_n} |^{(j_1 \cdots j_n)} \mu_{m+1,n}| + C_l \delta_0 (1+t)^{-1} \end{aligned} \tag{12.269}$$

沿着 L 的积分曲线设

$$^{(i_1 \cdots i_n)} x'_{m+1,n}(t) = |^{(i_1 \cdots i_n)} \mu_{m+1,n}| \tag{12.270}$$

(12.269) 有如下形式:

$$\frac{d\,^{(i_1 \cdots i_n)} x'_{m+1,n}}{dt} \leqslant f_l \max_{j_1 \cdots j_n} {}^{(j_1 \cdots j_n)} x'_{m+1,n} + g_l \tag{12.271}$$

其中

$$f_l(t) = C_l \delta_0 (1+t)^{-2} (1 + \log(1+t)), \quad g_l(t) = C_l \delta_0 (1+t)^{-1} \tag{12.272}$$

这个与 (12.217)—(12.218) 相同. 然后设

$$\bar{x}'_{m+1,n}(t) = \max_{i_1 \cdots i_n} {}^{(i_1 \cdots i_n)} x'_{m+1,n}(t) \tag{12.273}$$

再由

$$\bar{x}'_{m+1,n}(0) \leqslant C_l\delta_0$$

我们得出

$$\max_{i_1\cdots i_n} \|^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m+1,n}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+\log(1+t)) \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.274}$$

这个与 $\mathbf{M}_{[m+1,m+n]}$ 意味着 $\mathbf{M}_{[m+1,m+1+n]}$, 所以命题得证. □

对任意非负整数 k, 我们定义

$$\mathcal{A}'_k = \max_{i_1\cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{12.275}$$

对任意非负整数 l, 我们定义

$$\mathcal{A}'_{[l]} = \sum_{k=0}^{l}\mathcal{A}'_k \tag{12.276}$$

回忆

$$\mathcal{A}_0 = \|\chi - \frac{\not{g}}{1-u+t}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{12.277}$$

对 $k>0$ 有

$$\mathcal{A}_k = \max_{i_1\cdots i_k} \|\not{\mathcal{L}}_{R_{i_k}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\chi\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{12.278}$$

以及

$$\mathcal{A}_{[l]} = \sum_{k=0}^{l}\mathcal{A}_k \tag{12.279}$$

同样回忆

$$\mathcal{W}_0 = \max_{\alpha}\{\|\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\} \tag{12.280}$$

对 $k>0$ 有

$$\mathcal{W}_k = \max_{\alpha;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{12.281}$$

以及

$$\mathcal{W}_{[l]} = \sum_{k=0}^{l}\mathcal{W}_k \tag{12.282}$$

$$\mathcal{W}_k^Q = \max_{\alpha;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}Q\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}, \quad \mathcal{W}_{[l]}^Q = \sum_{k=0}^{l}\mathcal{W}_k^Q \tag{12.283}$$

对 $k=0,\cdots,l$ 有

$$\mathcal{Y}_k=\max_{j;i_1\cdots i_k}\|R_{i_k}\cdots R_{i_1}y^i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})},\quad \mathcal{Y}_{[l]}=\sum_{k=0}^{l}\mathcal{Y}_k \tag{12.284}$$

同样回忆, 对非负整数 n, 我们记

$$n_*=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{若 } n \text{ 是偶数}\\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{若 } n \text{ 是奇数}\end{cases} \tag{12.285}$$

引理 12.5 设 **H0** 和 (12.23) 成立. 设 l 是一个正整数并且设 $\not{\mathbf{E}}_{[l_*]},\not{\mathbf{E}}^Q_{[l_*-1]}$ 以及 $\not{\mathbf{X}}'_{[l_*-1]}$ 成立. 则我们有

$$\mathcal{A}_{[l]}\leqslant\mathcal{A}'_{[l]}+C_l\mathcal{A}'_{[l-1]}+C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+\mathcal{W}_{[l]})$$

证明 由 (12.185) 我们得到, 对 $k\geqslant1$ 有

$$\mathcal{A}_k\leqslant\mathcal{A}'_k+\frac{1}{1-u+t}\max_i\max_{j_1\cdots j_{k-1}}\|\not{\mathcal{L}}_{R_{j_{k-1}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{j_1}}{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{12.286}$$

对 $k\in\{1,\cdots,l\}$ 求和并且加上

$$\mathcal{A}_0=\mathcal{A}'_0 \tag{12.287}$$

我们推出, 对 $l\geqslant1$ 有

$$\mathcal{A}_{[l]}\leqslant\mathcal{A}'_{[l]}+\frac{3}{1-u+t}\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{12.288}$$

由引理 12.4 (l_* 替代 l), 当前引理的假设意味着 $\not{\mathbf{X}}_{[l_*-1]}$, 所以命题 10.2 成立. 从而推论 10.2.d 意味着

$$\max_i\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l-1],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]}) \tag{12.289}$$

将这个代入 (12.288), 我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_{[l]}\leqslant\mathcal{A}'_{[l]}+C_l\mathcal{A}_{[l-1]}+C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+\mathcal{W}_{[l]})\quad \text{对于}\quad l\geqslant1\\&\mathcal{A}_{[0]}=\mathcal{A}'_{[0]}\end{aligned} \tag{12.290}$$

引理得证. □

命题 12.11 设引理 12.4 的假设成立. 设 l 是一个非负整数, 并且设连续性假设 $\mathbf{E}_{\{l_*+2\}},\mathbf{E}^Q_{\{l_*+1\}},\mathbf{E}^{QQ}_{\{l_*\}}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 初值满足

$$\|\chi'\|_{\infty,[l_*],\Sigma_0^{\epsilon_0}}\leqslant C_l\delta_0$$

则 $\mathbf{X}'_{[l_*]}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立, 并且存在一个不依赖于 s 的常数 C_l 使得对 $t \in [0,s]$ 有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{[l]}(t) \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{A}'_{[l]}(0) + \delta_0\mathcal{Y}_0(0)\\ + \int_0^t (1+t')^{-1}(\mathcal{W}_{[l+2]}(t') + \mathcal{W}^Q_{[l+1]}(t'))dt')\end{aligned}$$

证明 该命题的假设包含了命题 12.9 的假设 (l_* 代替 l), 所以 $\mathbf{X}'_{[l_*]}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 然后由引理 12.4, $\mathbf{X}_{[l_*]}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 所以命题 10.1 成立 (l_*+1 代替 l), 从而命题 10.2 对 $l+1$ 成立.

我们将估计 ${}^{(i_1\cdots i_l)}b_l$ (见 (12.182)) 的 $L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_t)$ 范数. 由连续性假设 $\mathbf{E}^Q_{\{l_*\}}, \mathbf{E}_{\{l_*+1\}}$, 我们有

$$\|L\psi_\mu\|_{\infty,[l_*],\Sigma^{\epsilon_0}_t}, \quad \|\not{d}\psi_\mu\|_{\infty,[l_*],\Sigma^{\epsilon_0}_t} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.291}$$

以及

$$\|Lh\|_{\infty,[l_*],\Sigma^{\epsilon_0}_t}, \quad \|\not{d}h\|_{\infty,[l_*],\Sigma^{\epsilon_0}_t} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.292}$$

所以由推论 10.1.b, 我们有

$$\|e\|_{\infty,[l_*],\Sigma^{\epsilon_0}_t}, \quad \|\kappa^{-1}\zeta\|_{\infty,[l_*],\Sigma^{\epsilon_0}_t} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \quad 对于 \quad t\in[0,s] \tag{12.293}$$

显然由当前命题的假设, 我们有

$$\begin{aligned}\|Lh\|_{2,[l],\Sigma^{\epsilon_0}_t} &\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l]})\\ \|\not{d}h\|_{2,[l],\Sigma^{\epsilon_0}_t} &\leqslant C_l(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[l+1]} \quad 对于 \quad t\in[0,s]\end{aligned} \tag{12.294}$$

所以由推论 10.1.g 和推论 10.2.g (l 被 $l+1$ 替代), 我们有

$$\begin{aligned}\|e\|_{2,[l],\Sigma^{\epsilon_0}_t} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]} + \mathcal{W}_{[l]}))\\ 对于 \quad t\in[0,s]\end{aligned} \tag{12.295}$$

同样由表达式

$$\kappa^{-1}\zeta = \alpha\epsilon - \not{d}\alpha$$

和推论 10.2.h, 我们有

$$\begin{aligned}&\|\kappa^{-1}\zeta\|_{2,[l],\Sigma^{\epsilon_0}_t}\\ &\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l-1]})) \quad 对于 \quad t\in[0,s]\end{aligned} \tag{12.296}$$

由 (12.45), 再由 L^i 的表达式

$$L^i = -\eta \hat{T}^i + \psi_i$$

和推论 10.2.g, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\alpha'\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{[l+2]} + \delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}^Q_{[l+1]} + (1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0 + \mathcal{A}_{[l]})
\end{aligned} \tag{12.297}$$

其中我们用了引理 10.8 和引理 10.11 来估计交换子以及用 $\mathbf{H0}, \mathbf{H1}, \mathbf{H2}$ 来估计 $S_{t,u}$ 上的切导数. 这个与 (12.295) 以及第十章中 ${}^{(R_i)}\not{\pi}$ 的估计 (10.145):

$$\begin{aligned}
\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{\infty,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \\
\|{}^{(R_i)}\not{\pi}\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} &\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned} \tag{12.298}$$

意味着如下关于 b 的估计 (见 (12.183)):

$$\|b\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{[l+2]} + (1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0 + \mathcal{A}_{[l]} + \mathcal{W}^Q_{[l+1]}) \tag{12.299}$$

接下来我们估计 ${}^{(i_1\cdots i_l)}s_l$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_l)}r_l$ 的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 由表达式 (12.178), 关于 ${}^{(R_i)}\not{\pi}$ 的估计 (12.298) 以及 $\mathbf{X}'_{[l_*]}$ 成立, 我们得到

$$\begin{aligned}
\|{}^{(i_1\cdots i_l)}r_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant{}& C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[l-1]} \\
&+C_l\delta_0^2(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))^2(\mathcal{Y}_0 + \mathcal{W}_{[l]})
\end{aligned} \tag{12.300}$$

同样由 (12.180) 以及 e 的估计, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}s_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l(1+t)^{-2}\mathcal{A}'_{[l-1]} \\
&\quad +C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + \mathcal{W}_{[l]}))
\end{aligned} \tag{12.301}$$

由 (12.299)—(12.301) 和引理 12.5, 我们得到

$$\begin{aligned}
\|{}^{(i_1\cdots i_l)}b_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant{}& C_l\delta_0((1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[l]} \\
&+(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{[l+2]} + (1+t)^{-1}\mathcal{Y}_0 + \mathcal{W}^Q_{[l+1]}))
\end{aligned} \tag{12.302}$$

接下来我们将估计 (12.176) 右端和式的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 该和式中对应于 $k \in \{0, \cdots, l-1\}$ 的一项由 (12.195) 表示. 对于 (12.195) 右端的第一项, 我们有估计 (12.197). 这意味着

$$\|\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})Z}{}^{(i_1 \overset{>i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

$$\leqslant C(1+t)^{-1} \cdot (\|{}^{(R_{i_{l-k}})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}(3\max_j \|{}^{(i_1 \overset{i_{l-k}}{\cdots} i_l j)}\chi'_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} + \|{}^{(i_1 \overset{i_{l-k}}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})})$$

$$+\|{}^{(i_1 \overset{i_{l-k}}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \max_j \|{}^{(j;i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}) \tag{12.303}$$

如果 $l \geqslant 2$, 从而 $l_* \geqslant 1$, 我们运用推论 10.1.i (l_*+1 代替 l) 得到

$$\|{}^{(R_{i_{l-k}})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}, \quad \max_j \|{}^{(j;i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.304}$$

从而有

$$\|\not{\mathcal{L}}_{(R_{i_{l-k}})Z}{}^{(i_1 \overset{i_{l-k}}{\cdots} i_l)}\chi'{}_{l-1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[l]}, \quad l \geqslant 2 \tag{12.305}$$

另一方面如果 $l=1$, 则 $l_*=0$, 我们可以估计 (12.197) 括号中最后一项的 L^2 范数:

$$3\|\chi'\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \max_j \|{}^{(j;i_1)}Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \tag{12.306}$$

由推论 10.2.i ($l+1$ 代替 l), 我们有

$$\max_i \|{}^{(R_i)}Z\|_{2,[l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]} + \mathcal{W}_{[l+1]}) \tag{12.307}$$

其中由引理 12.5, 我们用 $\mathcal{A}'_{[l]}$ 表示 $\mathcal{A}_{[l]}$. 从而由命题 12.6 和 (12.307) ($l=1$), (12.306) 被

$$C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[1]} + \mathcal{W}_{[2]}) \tag{12.308}$$

界定. 所以在 $l=1$ 的情形, 我们有

$$\begin{aligned}\|\not{\mathcal{L}}_{(R_i)Z}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant\ & C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[1]} \\ & + C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + \mathcal{W}_{[2]})\end{aligned} \tag{12.309}$$

接下来我们考虑 (12.195) 双重和式中与 $\{m_1, \cdots, m_p\} \subset \{l-k+1, \cdots, l\}$, $p \in \{1, \cdots, k\}$ 对应的一项. 我们有估计 (12.204).

我们考虑三种情形:

$$\text{情形 } 1: \quad p \leqslant l_* - 1, \quad \text{情形 } 2: \quad p = l_*, \quad \text{情形 } 3: \quad p \geqslant l_* + 1$$

在情形 1, 推论 10.1.i ($l_* + 1$ 代替 l) 意味着

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}, \quad \max_j \|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))
\end{aligned} \tag{12.310}$$

则 (12.204) 意味着

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{L}_{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})Z}{}^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C(1+t)^{-1}\cdot(\|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}(3\max_j\|^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l j)}\chi'_{l-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\cdot\|^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}) \\
&+\max_j\|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}) \\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[l-1]}
\end{aligned} \tag{12.311}$$

其中我们用到了 $p \geqslant 1$.

在情形 2, 推论 10.1.i ($l_* + 1$ 代替 l) 意味着 (12.310) 的第一式, 但是推不出第二式. 我们用推论 10.2.i ($l + 1$ 代替 l) 得到

$$\max_j\|^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]} + \mathcal{W}_{[l+1]}) \tag{12.312}$$

其中我们用到了 $p \leqslant k \leqslant l - 1$.

由于在情形 2, 我们有 $l - 1 - p = l - 1 - l_* \leqslant l_*$, 我们可以用 $\mathbf{X}'_{[l_*]}$ 来估计

$$\|^{(i_1 \overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p} i_{l-k}<}{\cdots} i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{12.313}$$

由 (12.312) 和 (12.313), 我们得到在情形 2 有

$$
\begin{aligned}
&\|\not{\mathcal{L}}_{{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z}{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C(1+t)^{-1}\cdot(\|{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}(3\max_j\|{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_lj)}\chi'_{l-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\cdot\|{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})})\\
&+3\|{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\max_j\|{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})})\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned}\tag{12.314}
$$

在情形 3, 我们用 (12.312) 以及 (12.307) (l 被 $l-1$ 替代) 来估计

$$
\|{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l-1]}+\mathcal{W}_{[l]})\tag{12.315}
$$

由于在情形 3, 我们有 $l-p\leqslant l-l_*-1\leqslant l_*$, 我们可以用 $\mathbf{X}'_{[l_*]}$ 来估计

$$
\max_j\|{}^{(i_1\overset{i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}}{\cdots}i_lj)}\chi'_{l-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\tag{12.316}
$$

以及 (12.313).

所以在情形 3, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\not{\mathcal{L}}_{{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z}{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C(1+t)^{-1}\cdot(\|{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p};i_{l-k})}Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}(3\max_j\|{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_lj)}\chi'_{l-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\cdot\|{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})})\\
&+3\|{}^{(i_1\overset{>i_{m_1}\cdots i_{m_p}i_{l-k}<}{\cdots}i_l)}\chi'_{l-1-p}\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\max_j\|{}^{(i_{m_1}\cdots i_{m_p}j;i_{l-k})}Z\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})})\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned}\tag{12.317}
$$

将 (12.311), (12.314) 和 (12.317) 组合起来, 我们得出 (12.195) 中的双重求和式的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$
C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})\tag{12.318}
$$

界定. 将这个结果与 (12.305) 和 (12.309) 组合起来, 我们得出 (12.176) 右端求和式的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{k=0}^{l-1}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_l}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k+1}}}\not{\mathcal{L}}_{{}^{(R_{i_{l-k}})}Z}\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-k-1}}}\cdots\not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}+\mathcal{W}_{[l+1]})
\end{aligned}\tag{12.319}
$$

界定.

由 (12.302) 和 (12.319), 我们通过 (12.176) 和 (12.181) 以及 (12.187) 得出

$$\begin{aligned}
&\|\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}\chi_l'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]})+(1+t)^{-2}(\mathcal{W}_{[l+2]}+\mathcal{W}^Q_{[l+1]})
\end{aligned} \tag{12.320}$$

定义非负函数

$$^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l=(1-u+t)^2|^{(i_1\cdots i_l)}\chi_l'| \tag{12.321}$$

$$^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l=(1-u+t)^2(2|\chi'||^{(i_1\cdots i_l)}\chi_l'|+|\not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}\chi_l'|) \tag{12.322}$$

由 (12.56), 我们有

$$L^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l\leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l \tag{12.323}$$

将 $^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l$ 和 $^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l$ 拉回到 S^2:

$$^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l(t,u)={}^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l\circ\Phi_{t,u},\quad {}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l(t,u)={}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l\circ\Phi_{t,u} \tag{12.324}$$

其中 $\Phi_{t,u}$ 是 S^2 到 $S_{t,u}$ 的微分同胚, 其定义见第八章. 从而 (12.324) 变为

$$\frac{\partial}{\partial t}{}^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l(t,u)\leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l(t,u)$$

对这个积分得到

$$^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l(t,u)\leqslant {}^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l(0,u)+\int_0^t {}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l(t',u)dt' \tag{12.325}$$

在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 上面取 L^2 范数得到

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} \\
\leqslant\ & \|^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l(0)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+\int_0^t\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l(t')\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}dt'
\end{aligned} \tag{12.326}$$

再由 (8.333), 我们有

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\|^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant\ & C(\|^{(i_1\cdots i_l)}\phi_l\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}+\int_0^t(1+t')^{-1}\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt')
\end{aligned} \tag{12.327}$$

将 l 用 $k \in \{0, \cdots, l\}$ 代替, 在两边关于 $i_1, \cdots, i_k$ 取最大, 并且对 $k \in \{0, \cdots, l\}$ 求和有

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1} \sum_{k=0}^{l} \max_{i_1 \cdots i_k} \|^{(i_1 \cdots i_k)} \phi_k \|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C\Big(\sum_{k=0}^{l} \max_{i_1 \cdots i_k} \|^{(i_1 \cdots i_k)} \phi_k \|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} + \int_0^t (1+t')^{-1} \sum_{k=0}^{l} \max_{i_1 \cdots i_k} \|^{(i_1 \cdots i_k)} \rho_k \|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})} dt'\Big)
\end{aligned} \tag{12.328}
$$

由 (12.321) 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l} \max_{i_1 \cdots i_l} \|^{(i_1 \cdots i_k)} \phi_k \|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \geqslant C^{-1}(1+t)^2 \mathcal{A}'_{[l]}(t) \\
&\sum_{k=0}^{l} \max_{i_1 \cdots i_k} \|^{(i_1 \cdots i_k)} \phi_k \|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant \mathcal{A}'_{[l]}(0)
\end{aligned} \tag{12.329}
$$

再由 (12.322), (12.320) 和 $\mathbf{X}'_{[0]}$ 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l} \max_{i_1 \cdots i_k} \|^{(i_1 \cdots i_k)} \rho_k \|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[l]}(t) + C(1+t)^2 \| \not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1 \cdots i_l)} \chi'_l \|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
&\leqslant C_l \delta_0 (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]}(t)) + C_l(\mathcal{W}_{[l+2]}(t) + \mathcal{W}^Q_{[l+1]}(t))
\end{aligned} \tag{12.330}
$$

将 (12.329) 和 (12.330) 代入 (12.328) 有

$$
\begin{aligned}
(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}(t) \leqslant C\mathcal{A}'_{[l]}(0) &+ \int_0^t C_l \delta_0 (1+t')^{-2}(1+\log(1+t')) \cdot (1+t')\mathcal{A}'_{[l]}(t') dt' \\
&+ \int_0^t C_l \delta_0 (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{Y}_0(t') dt' \\
&+ C_l \int_0^t (1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{[l+2]}(t') + \mathcal{W}^Q_{[l+1]}(t')) dt'
\end{aligned} \tag{12.331}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}(t) \leqslant C\mathcal{A}'_{[l]}(0) &+ \int_0^t C_l \delta_0 (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{Y}_0(t') dt' \\
&+ C_l \int_0^t (1+t')^{-1}(\mathcal{W}_{[l+2]}(t') + \mathcal{W}^Q_{[l+1]}(t')) dt'
\end{aligned} \tag{12.332}
$$

最后我们必须用 $\mathcal{Y}_0(0)$ 估计 $\mathcal{Y}_0(t)$. 所以我们必须导出一个关于 y^i 的传输方程. 由 (6.60),

$$\hat{T}^i = -\frac{x^i}{1-u+t} + y^i \tag{12.333}$$

所以

$$L\hat{T}^i = -\frac{L^i}{1-u+t} + \frac{x^i}{(1-u+t)^2} + Ly^i \tag{12.334}$$

再由 (6.64) 和 (6.65),

$$L^i = \frac{x^i}{1-u+t} + \omega^i - \eta y^i \tag{12.335}$$

其中

$$\omega^i = \frac{(\eta-1)x^i}{1-u+t} - \psi_i \tag{12.336}$$

将 (12.335) 代入 (12.334), 我们得到

$$L\hat{T}^i = \frac{\eta y^i - \omega^i}{1-u+t} + Ly^i \tag{12.337}$$

另一方面, 回忆第三章有

$$L(\hat{T}^i) = q_L \cdot \not{d}x^i \tag{12.338}$$

从而 y^i 满足如下传输方程:

$$Ly^i + \frac{y^i}{1-u+t} = \tilde{\omega}^i \tag{12.339}$$

其中

$$\tilde{\omega}^i = \frac{\omega^i - (\eta-1)y^i}{1-u+t} + q_L \cdot \not{d}x^i \tag{12.340}$$

由 (12.23) 和 (12.336), (12.340) 右端的第一项的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$C(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[0]}(t) \tag{12.341}$$

界定. 由 (3.182) 和 (12.333), 我们推出

$$\|q_L\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[1]}(t) \tag{12.342}$$

所以我们得到

$$\max_i \|\tilde{\omega}^i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{[1]}(t) \tag{12.343}$$

对 (12.339) 积分, 在声学坐标下有

$$(1-u+t)y^i(t,u,\vartheta) = (1-u)y^i(0,u,\vartheta) + \int_0^t (1-u+t')\tilde{\omega}^i(t',u,\vartheta)dt' \quad (12.344)$$

在 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 取 L^2 范数得

$$\begin{aligned}&(1+t)\|y^i(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\ &\leqslant C(\|y^i(0)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} + \int_0^t (1+t')\|\tilde{\omega}^i\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}dt')\end{aligned} \quad (12.345)$$

这个与

$$\|y^i\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(\|y^i\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} + \int_0^t \|\tilde{\omega}^i\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt') \quad (12.346)$$

等价. 关于 $i=1,2,3$ 取最大有

$$\mathcal{Y}_0(t) \leqslant C(\mathcal{Y}_0(0) + \int_0^t (1+t')^{-1}\mathcal{W}_{[1]}(t')dt') \quad (12.347)$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{Y}_0(t')dt'\\ &\leqslant C(\mathcal{Y}_0(0) + \int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{W}_{[1]}(t')dt')\end{aligned} \quad (12.348)$$

事实上, 设

$$I_t(t') = -\int_{t'}^t (1+s)^{-2}(1+\log(1+s))ds$$

从而

$$\frac{d}{dt'}I_t(t') = (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))$$

同样设

$$J(t') = \int_0^{t'} (1+s)^{-1}\mathcal{W}_{[1]}(s)ds$$

则

$$\begin{aligned}&\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\int_0^{t'}(1+s)^{-1}\mathcal{W}_{[1]}(s)dsdt'\\ &= I_t(t)J(t) - I_t(0)J(0) - \int_0^t I_t(t')\frac{dJ}{dt'}(t')dt'\end{aligned}$$

但是

$$I_t(t) = J(0) = 0$$

所以这个化为

$$-\int_0^t I_t(t')\frac{dJ}{dt'}(t')dt'$$

现在,

$$\begin{aligned}-I_t(t') &= \int_{t'}^t (1+s)^{-2}(1+\log(1+s))ds \leqslant \int_{t'}^{\infty}(1+s)^{-2}(1+\log(1+s))ds \\ &= [-\frac{2}{1+s} - \frac{\log(1+s)}{1+s}]_{t'}^{\infty} = \frac{2+\log(1+t')}{1+t'}\end{aligned}$$

所以

$$-\int_0^t I_t(t')\frac{dJ}{dt'}(t')dt' \leqslant 2\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{W}_{[1]}(t')dt'$$

将 (12.348) 代入 (12.332) 的右端, (12.348) 右端的积分被吸收到 (12.332) 右端的最后一个积分中. 所以命题得证. □

命题 12.12　设命题 12.11 的假设对某个非负整数 l 成立. 设 $m \in \{0, \cdots, l+1\}$, 初值满足

$$\|\mu - 1\|_{\infty,[m,l_*+1],\Sigma_0^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0$$

则 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立, 并且存在一个不依赖于 s 的常数 C_l 使得对 $t \in [0, s]$, 我们有

$$\begin{aligned}(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}(t) \leqslant C\mathcal{B}_{[m,l+1]}(0) + C_l(\mathcal{A}'_{[l]}(0) + \delta_0\mathcal{Y}_0(0) \\ + \int_0^t (1+t')^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+2\}}(t') + \mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}(t'))dt')\end{aligned}$$

证明　该命题的假设包含了命题 12.10 的假设 (l_* 代替 l), 所以 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 因此命题 11.1 的假设对 l_* 成立, 所以命题 11.2 的假设也成立. 所以命题 11.1 及其推论对 l_* 成立并且命题 11.2 及其推论同样成立.

考虑传输方程 (12.252) ($m+1$ 被 m 替代, 使得 $m \in \{0, \cdots, l+1\}$). 我们必须估计方程右端的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 由 m 和 e 的定义, 我们有

$$\|m\|_{2,[m,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\mathcal{W}_{\{l+2\}} \tag{12.349}$$

$$\|e\|_{2,[m,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}$$
$$+\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \mathcal{W}_{\{l+1\}})) \tag{12.350}$$

这里我们同样用到了推论 11.2.b (关于 $\omega_{L\hat{T}}$ 的估计; 注意到为了证明这个估计, 我们只用到了 $\mathbf{M}_{[m,l_*]}$).

同样由推论 11.1.b (l_* 代替 l), 我们有

$$\|e\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2} \tag{12.351}$$

接下来考虑 ${}^{(i_1\cdots i_l)}r'_{m,n}$, 其表达式见 (12.251) (把 $m+1$ 替换成 m). 这里 $n \leqslant l+1-m$. 考虑求和通项

$$((R)^{s_1}e)((R)^{s_2}(T)^m\mu), \quad |s_1|+|s_2|=n, |s_1|\geqslant 1$$

如果 $|s_2| \leqslant l_*+1-m$, 我们用 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 来估计第二个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 否则我们有 $|s_1| \leqslant n-(l_*+2-m) \leqslant l-l_*-1 \leqslant l_*$ 并且我们用 (12.351) 来估计第一个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 注意到 $|s_2| \leqslant n-1 \leqslant l-m$, 对第一个和式我们可以得到其 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数的估计:

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[m,l]} + C_l(1+\log(1+t))\|e\|_{2,[m,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{12.352}$$

接下来考虑第二个求和式中的求和项

$$R_{i_n}\cdots R_{i_1}(((T)^k e)((T)^{m-k}\mu)), \quad k\in\{1,\cdots,m\}$$

如果至多只有 $l_*+1+k-m$ 阶导数落到 $(T)^{m-k}\mu$, 我们就用 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 估计其相应因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 否则至多只有

$$n-(l_*+2+k-m) \leqslant l-l_*-1-k \leqslant l_*-k$$

阶导数落到 $(T)^k e$ 上, 此时我们用 (12.351) 估计相应因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 注意到 $k\geqslant 1$, (12.251) 右端第二项被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[m-1,l]} + C_l(1+\log(1+t))\|e\|_{2,[m,l+1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{12.353}$$

界定. 将 (12.352) 和 (12.353) 组合起来, 代入 (12.350), 我们得到

$$\max_{n\leqslant l+1-m}\max_{i_1\cdots i_n}\|{}^{(i_1\cdots i_n)}r'_{m,n}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$
$$\leqslant C_l(1+t)^{-1}(\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}$$
$$+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}_{[l]} + \mathcal{W}_{\{l+1\}}))) \tag{12.354}$$

接下来我们估计 (12.252) 中的两个求和式 ($m+1$ 被 m 替代). 第一个求和式的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\Lambda \cdot \not{d}(T)^{m-1-k}\mu\|_{2,[k,l+k+1-m],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \tag{12.355}$$

界定. 这里, $\Lambda, \not{d}(T)^{m-1-k}\mu$ 最多只有 k 阶 T- 导数, 所以 μ 最多只有 $m-1$ 阶 T-导数, 从而最多只有 $l+k+1-m$ 阶空间导数. 由推论 11.1.c (l_* 代替 l),

$$\|\Lambda\|_{\infty,[m,l_*],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{12.356}$$

如果最多只有 l_* 阶空间导数落到 Λ, 我们用这个估计相应因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 否则最多只有

$$(l+k+1-m)-(l_*+1) \leqslant l_*+k+1-m$$

阶空间导数落到 $\not{d}(T)^{m-1-k}\mu$, 因而总共只有 l_*+1 阶空间导数落到 μ, 然后我们用 $\mathbf{M}_{[m-1,l_*+1]}$ 来估计相应因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 所以我们推出 (12.355) 被

$$\begin{aligned}
&C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{B}_{[m-1,l+1]} \\
&+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\|\Lambda\|_{2,[m-1,l],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\cdot(\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\delta_0(1+\log(1+t))(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l-1]}) \\
&+(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}}))
\end{aligned} \tag{12.357}$$

界定, 我们用了推论 11.2.c (m 被 $m-1$ 替代).

最后我们考虑 (12.252) 右端的第二个求和式 ($m+1$ 被 m 替代). 考虑与 $k \in \{0,\cdots,n-1\}$ 对应的通项

$$\begin{aligned}
&R_{i_n}\cdots R_{i_{n-k+1}}({}^{(R_{i_{n-k}})}Z\cdot\not{d}R_{i_{n-k-1}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu) \\
=&\sum_{|s_1|+|s_2|=k}((\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}\,{}^{(R_{i_{n-k}})}Z)\cdot\not{d}(R)^{s_2'}(T)^m\mu \\
&s_2' = s_2\bigcup\{1,\cdots,n-k-1\}
\end{aligned} \tag{12.358}$$

如果 $|s_1| \leqslant l_*$, 我们用推论 10.1.i (l_*+1 代替 l) 来估计第一个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 否则 $|s_2| \leqslant k-l_*-1$ 并且

$$|s_2'| = |s_2|+n-k-1 \leqslant n-l_*-2 \leqslant l-l_*-1-m \leqslant l_*-m$$

所以 $1+|s_2'|+m \leqslant l_*+1$, 我们用 $\mathbf{M}_{[m,l_*+1]}$ 估计第二个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 同样由于 $|s_1| \leqslant k \leqslant n-1 \leqslant l-m$ 以及

$$1+|s_2'|+m=|s_2|+n-k+m \leqslant n+m \leqslant l+1$$

我们得出 (12.252) 第二个求和式被

$$\begin{aligned}
&C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\
&+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\max_i \|^{(R_i)}Z\|_{2,[l-m],\Sigma_t^{\epsilon_0}}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\
&\cdot((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}_{[l]}+\mathcal{W}_{\{l+1\}})
\end{aligned} \tag{12.359}$$

界定, 我们用了推论 10.2.i ($l+1$ 代替 l).

由 (12.347), (12.352), (12.355) 和 (12.357), 再由引理 12.5 用 $\mathcal{A}'_{[l]}$ 表示 $\mathcal{A}_{[l]}$, 我们推出

$$\begin{aligned}
&\|L^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m,n}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\
&+C_l(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\delta_0(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]})))
\end{aligned} \tag{12.360}$$

对 $n \leqslant l+1-m$ 成立.

定义

$$^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{m,n}=|^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m,n}| \tag{12.361}$$

$$^{(i_1\cdots i_n)}\rho'_{m,n}=|L^{(i_1\cdots i_n)}\mu_{m,n}| \tag{12.362}$$

显然我们有

$$L^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{m,n} \leqslant {}^{(i_1\cdots i_n)}\rho'_{m,n} \tag{12.363}$$

用与推出 (12.327) 相同的方法, 我们有

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\|^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{m,n}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C(\|^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{m,n}\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}+\int_0^t(1+t')^{-1}\|^{(i_1\cdots i_n)}\rho'_{m,n}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt')
\end{aligned} \tag{12.364}$$

在两边关于 $i_1\cdots i_n$ 取最大, 把 m 用 $k\in\{0,\cdots,m\}$ 替代, 再对 $n\in\{0,\cdots,l+1-k\}$ 和 $k\in\{0,\cdots,m\}$ 求和得到

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{l+1-k}\max_{i_1\cdots i_n}\|^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{k,n}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C(\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{l+1-k}\|^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{k,n}\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\
&+\int_0^t(1+t')^{-1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{l+1-k}\|^{(i_1\cdots i_n)}\rho'_{k,n}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt')
\end{aligned}
\tag{12.365}
$$

由 (12.361), 我们有

$$
\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{l+1-k}\max_{i_1\cdots i_n}\|^{(i_1\cdots i_n)}\phi'_{k,n}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}=\mathcal{B}_{[m,l+1]}(t)
\tag{12.366}
$$

由 (12.360) 和 (12.362), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{l+1-k}\|^{(i_1\cdots i_n)}\rho'_{k,n}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\
&+C_l(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\delta_0(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]})))
\end{aligned}
\tag{12.367}
$$

将 (12.366) 和 (12.367) 代入 (12.365), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}(t)\\
\leqslant\ & C\mathcal{B}_{[m,l+1]}(0)+\int_0^t C_l\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\cdot(1+t')^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}(t')dt'\\
&+\int_0^t C_l\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{Y}_0(t')dt'\\
&+\int_0^t C_l(1+t')^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+2\}}(t')+(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}(t'))dt'\\
&+\int_0^t C_l\delta_0(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\mathcal{A}'_{[l]}(t')dt'
\end{aligned}
\tag{12.368}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}(t)\\
\leqslant\ & C\mathcal{B}_{[m,l+1]}(0)+\int_0^t C_l\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{Y}_0(t')dt'\\
&+\int_0^t C_l(1+t')^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+2\}}(t')+(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}(t'))dt'\\
&+\int_0^t C_l\delta_0(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\mathcal{A}'_{[l]}(t')dt' \qquad (12.369)
\end{aligned}
$$

由命题 12.11, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))\mathcal{A}'_{[l]}(t')dt'\\
\leqslant\ & C_l(\mathcal{A}'_{[l]}(0)+\delta_0\mathcal{Y}_0(0)+\int_0^t(1+t')^{-1}(\mathcal{W}_{[l+1]}(t')+\mathcal{W}^Q_{[l]}(t'))dt') \qquad (12.370)
\end{aligned}
$$

再由 (12.348), 命题得证. □

第十三章 μ 的基本性质

在这一章中, 我们将建立在第五章中引入的连续性假设 $\mathbf{C1}, \mathbf{C2}, \mathbf{C3}$, 定理 5.1 的证明用到了这些假设. 为此, 我们将运用命题 8.6. 该命题的假设为命题 8.5 的假设再加上第六章中的假设 $\mathbf{I0}$ (即命题 12.1 中关于初值的假设). 而命题 8.5 的假设则是引理 8.10 的假设再加上连续性假设 $\mathbf{E_{LT}3}, \mathbf{E_{LL}3}$. 最后引理 8.10 的假设则是在第五章中引入的基本连续性假设 $\mathbf{A1}, \mathbf{A2}, \mathbf{A3}$, 以及在第六章中引入的连续性假设 $\mathbf{E1}, \mathbf{E2}, \mathbf{F2}$, 再加上 $\not{\mathbf{E}}\mathbf{3}_0$. 现在 $\mathbf{A1}$ 和 $\mathbf{A2}$ 可以由 $\mathbf{E1}$ 推出, 而 $\mathbf{A3}$ 可以由 $\mathbf{A2}$ 和命题 12.1 推出. $\mathbf{F2}$ 与 $\not{\mathbf{X}}'_0$ 相同, 我们已经在命题 12.6 中推导了它. $\mathbf{E1}$ 就是 $\mathbf{E}_{\{0\}}$ 而 $\mathbf{E2}$ 可以由 $\mathbf{E}_{\{1\}}, \mathbf{E}^Q_{\{0\}}$ 和 $\mathbf{H0}$ 推出, 我们已经在推论 12.2.a 中建立了它. $\mathbf{E_{LL}3}$ 可以由 $\mathbf{E}^{QQ}_{\{0\}}$ 和 $\mathbf{E}^Q_{\{0\}}$ 推出, 而 $\mathbf{E_{LT}3}$ 可以由 $\mathbf{E}^Q_{\{1\}}, \mathbf{E}_{\{1\}}$, 以及推论 11.1.c 中当 $m = l = 0$ 时关于 $\|\Lambda\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计和 $\mathbf{H0}$ 推出. 命题 11.1 的假设则可以由命题 12.10 推出. 最后 $\not{\mathbf{E}}\mathbf{3}_0$ 可以由 $\mathbf{E}_{\{2\}}$ 和 $\mathbf{H0}$ 以及 $\mathbf{H1}$ 推出, 在推论 12.5 中我们已经建立了 $\mathbf{H1}$. 所以命题 8.6 的假设全部来自于命题 12.10 当 $m = l = 0$ 时的假设, 即命题 12.9 当 $l = 0$ 时的假设, 即命题 12.6 的假设加上

$$\|\mu - 1\|_{\infty,[0,1],\Sigma_0^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0 \tag{13.1}$$

命题 13.1 设命题 12.6 的假设成立, 并且初值满足 (13.1). 则在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中, 我们有

$$\mu^{-1}(L\mu)_+ \leqslant (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1} + A(t)$$

其中

$$A(t) = C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

由于

$$\int_0^s A(t)dt \leqslant C\delta_0$$

C 是一个不依赖于 s 的常数, 我们得出 **C1** 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立.

证明 我们用命题 8.6 在声学坐标中表示:

$$\mu^{-1}(L\mu)_+ = \frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ = \frac{(\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1} + \hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta))_+}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t) + \hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)} \tag{13.2}$$

考虑一个给定的 $(u,\vartheta) \in [0,\epsilon_0] \times S^2$. 我们有三种情形需要考虑:

情形 1: $\hat{E}_s(u,\vartheta) = 0$, 情形 2: $\hat{E}_s(u,\vartheta) > 0$, 情形 3: $\hat{E}_s(u,\vartheta) < 0$

在情形 1, (13.2) 化为

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ = \frac{(\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta))_+}{1+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)} \tag{13.3}$$

由命题 8.6,

$$|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{1+t} \tag{13.4}$$

$$|\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.5}$$

这意味着

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.6}$$

在情形 2, 我们有

$$(\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1} + \hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta))_+ \leqslant \hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1} + |\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)|$$

所以代入 (13.2) 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \\
\leqslant &\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}+|\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)|}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)} \\
= &\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)} \\
&+\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{(1+t)}(\frac{1}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)}-\frac{1}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)}) \\
&+\frac{|\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)|}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)}
\end{aligned} \tag{13.7}$$

由于对足够小的 δ_0 有

$$|\hat{E}_s(u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0 \leqslant 1 \tag{13.8}$$

(13.7) 右端的第一项被

$$\frac{1}{(1+t)(1+\log(1+t))} \tag{13.9}$$

界定. (13.7) 右端第二项括号中的因子的绝对值被

$$\begin{aligned}
&\frac{|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|}{(1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta))(1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t))} \\
\leqslant &\frac{1}{(1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t))}\frac{|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|}{(1-|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|)}
\end{aligned}$$

界定, 所以由 (13.4), 取 δ_0 足够小, (13.7) 右端第二项的绝对值被

$$\frac{1}{(1+t)(1+\log(1+t))}\frac{|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|}{(1-|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|)} \leqslant \frac{C\delta_0}{(1+t)^2} \tag{13.10}$$

界定. 同样由 (13.5) 和 (13.4), 对足够小的 δ_0, (13.7) 右端第三项的绝对值被

$$C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.11}$$

界定. 由 (13.9)—(13.11), 我们得出在情形 2 有

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \leqslant \frac{1}{(1+t)(1+\log(1+t))}+C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.12}$$

最后我们考虑情形 3. 此时我们定义

$$t_1(u,\vartheta)=e^{-\frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)}}-1 \tag{13.13}$$

有两种子情形需要考虑:

子情形 3a: $t \leqslant t_1(u,\vartheta)$, 子情形 3b: $t > t_1(u,\vartheta)$.

在子情形 3a, 我们有

$$\log(1+t) \leqslant -\frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)}$$

所以

$$1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t) \geqslant \frac{1}{2} \tag{13.14}$$

由 (13.4), 对足够小的 δ_0 有

$$|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)| \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{对于} \quad t\in[0,s] \tag{13.15}$$

从而

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) = 1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta) \geqslant \frac{1}{4} \tag{13.16}$$

所以由 (13.2) 和 (13.5) 有

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \leqslant 4(\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{(1+t)}+\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta))_+ \leqslant 4|\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.17}$$

在子情形 3b, 由 (13.5), 我们有

$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) = \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{1+t}+\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta) \leqslant \frac{1}{1+t}(\hat{E}_s(u,\vartheta)+C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{1+t}) \tag{13.18}$$

设

$$\tau = \log(1+t) \quad \text{从而} \quad t = e^\tau - 1 \tag{13.19}$$

映射 $t\mapsto\tau$ 是一个从 $[0,\infty)$ 到其自身的保持定向的微分同胚. 同样,

$$\frac{1+\log(1+t)}{1+t} = e^{-\tau}(1+\tau) := f(\tau) \tag{13.20}$$

是一个关于 τ 的减函数. 所以 $t > t_1(u,\vartheta)$ 对应于 $\tau > \tau_1(u,\vartheta)$, 其中

$$\tau_1(u,\vartheta) = -\frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)} \tag{13.21}$$

并且也对应于

$$f(\tau) < f(\tau_1(u,\vartheta)) = (1 - \frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)})e^{\frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)}} \tag{13.22}$$

从而由 (13.18), 在子情形 3b 有

$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) < \frac{1}{1+t}(\hat{E}_s(u,\vartheta) + C\delta_0(1 - \frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)})e^{\frac{1}{2\hat{E}_s(u,\vartheta)}})$$

$$= \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{1+t}(1 - 2C\delta_0 g(x)) \tag{13.23}$$

这里我们设

$$x = -2\hat{E}_s(u,\vartheta) > 0 \quad 和 \quad g(x) = \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \tag{13.24}$$

现在, $0 < x \leqslant C\delta_0$, 函数 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 有界, 并且我们有

$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = 0 \tag{13.25}$$

从而对足够小的 δ_0 有

$$1 - 2C\delta_0 g(x) > 0$$

所以由 (13.23) 有

$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) < 0 \tag{13.26}$$

所以在子情形 3b 有

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ = 0 \tag{13.27}$$

再由 (13.17) 和 (13.27), 我们得到在情形 3 有

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \leqslant C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.28}$$

将 (13.6), (13.12), (13.28) 组合起来, 我们得出在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中有

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \leqslant \frac{1}{(1+t)(1+\log(1+t))} + A(t) \tag{13.29}$$

其中

$$A(t) = C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.30}$$

所以命题得证. □

命题 13.2　设命题 12.10 的假设对 $m=2, l=1$ 成立. 则在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中, 我们有

$$\mu^{-1}(T\mu)_+ \leqslant B_s(t)$$

这里

$$B_s(t) = C\sqrt{\delta_0}\frac{(1+\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}} + C\delta_0(1+\tau)$$

其中 $\tau=\log(1+t), \sigma=\log(1+s)$. 我们有

$$\int_0^s (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B_s(t)dt \leqslant C\sqrt{\delta_0}$$

其中 C 是不依赖于 s 的常数. 进一步, 由我们已经证明的 **C1**, **C2** 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立.

证明　我们再次运用命题 8.6. 记

$$\hat{E}_{s,m} = \min_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2} \hat{E}_s(u,\vartheta) \tag{13.31}$$

有两种情形需要考虑: $\hat{E}_{s,m}\geqslant 0$ 和 $\hat{E}_{s,m}<0$. 第一种情形更简单一些. 在第二种情形, 我们设

$$\hat{E}_{s,m} = -\delta_1, \quad \delta_1 > 0 \tag{13.32}$$

定义

$$\mathcal{V}'_{s-} = \{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2 : \hat{E}_s(u,\vartheta) < -\frac{\delta_1}{2}\} \tag{13.33}$$

我们记 $\mathcal{U}'_{s,t-}$ 为 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 的子集, 使得其声学坐标 (t,u,ϑ) 满足 $(u,\vartheta)\in\mathcal{V}'_{s-}$. 现在由命题 8.6,

$$\hat{\mu}_s(s,u,\vartheta) = 1 + \hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+s) \tag{13.34}$$

所以如果设 $\sigma=\log(1+s)$ 则有

$$0 \leqslant \min_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2} \hat{\mu}_s(s,u,\vartheta) = 1-\delta_1\sigma \tag{13.35}$$

考虑任意一点 $p\in\Sigma_t^{\epsilon_0}\setminus\mathcal{U}'_{s,t-}$. p 的声学坐标 (t,u,ϑ) 满足 $(u,\vartheta)\in([0,\epsilon_0]\times S^2)\setminus\mathcal{V}'_{s-}$. 设 $\tau=\log(1+t)$, 由命题 8.6 和 (13.15), (13.35) 以及 $\tau\leqslant\sigma$, 我们有

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) &= 1 + \hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t) + \hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta) \\ &\geqslant 1 - \frac{1}{2}\delta_1\tau - |\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)| \geqslant \frac{1}{2} - |\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)| \geqslant \frac{1}{4}\end{aligned} \tag{13.36}$$

由于

$$\mu(p) = \mu_{[1],s}(u, \vartheta)\hat{\mu}_s(t, u, \vartheta) \tag{13.37}$$

再由命题 8.6 有

$$\inf_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2} \mu_{[1],s}(u, \vartheta) \geqslant \frac{1}{2} \tag{13.38}$$

从而

$$\mu(p) \geqslant \frac{1}{8} \tag{13.39}$$

在 $\hat{E}_{s,m} \geqslant 0$ 时, 由命题 8.6 和 (13.4), 我们有

$$\hat{\mu}_s(t, u, \vartheta) \geqslant 1 + \hat{Q}_{0,s}(t, u, \vartheta) \geqslant 1 - |\hat{Q}_{0,s}(t, u, \vartheta)| \geqslant \frac{3}{4} \tag{13.40}$$

所以由 (13.37) 和 (13.38),

$$\mu(p) \geqslant \frac{3}{8} \tag{13.41}$$

由命题 12.10, $m = 2, l = 1, \mathbf{M}_{[2,2]}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立. 特别地, 我们有

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |T\mu| \leqslant C\delta_0(1 + \log(1 + t)) \quad 对于 \quad t \in [0, s] \tag{13.42}$$

再由 (13.39), (13.41) 和 (13.42), 我们有

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) \leqslant C\delta_0(1 + \log(1 + t)) \tag{13.43}$$

对任意 $p \in \Sigma_t^{\epsilon_0}, t \in [0, s]$, 当 $\hat{E}_{s,m} \geqslant 0$ 时成立; 对任意 $p \in \Sigma_t^{\epsilon_0} \setminus \mathcal{U}'_{s,t-}, t \in [0, s]$, 当 $\hat{E}_{s,m} < 0$ 时成立.

我们仍需考虑 $\hat{E}_{s,m} < 0$ 以及 $p \in \mathcal{U}'_{s,t-}$ 的情形. 设

$$\tau_1 = \frac{1}{2\delta_1}, \quad t_1 = e^{\tau_1} - 1 \tag{13.44}$$

有两种子情形需要考虑: $t \leqslant t_1$ 和 $t > t_1$. 在第一种子情形, 即 $\tau \leqslant \tau_1$ 时, 我们由命题 8.6 和 (13.15) 有

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_s(t, u, \vartheta) &= 1 + \hat{E}_s(u, \vartheta)\log(1 + t) + \hat{Q}_{0,s}(t, u, \vartheta)\\ &\geqslant 1 - \delta_1\tau - |\hat{Q}_{0,s}(t, u, \vartheta)| \geqslant \frac{1}{2} - |\hat{Q}_{0,s}(t, u, \vartheta)| \geqslant \frac{1}{4}\end{aligned} \tag{13.45}$$

由 (13.37), (13.38), 下界 (13.39) 成立, 这个与 (13.42) 共同意味着

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) \leqslant C\delta_0(1 + \log(1 + t)) \tag{13.46}$$

对 $p \in \mathcal{U}'_{s,t-}$ 在 $t \leqslant t_1$ 时成立.

最后我们需要考虑子情形 $p \in \mathcal{U}'_{s,t-}, t > t_1$. 如果 $(T\mu)(p) \leqslant 0$, 则 $((T\mu))_+(p) = 0$, 从而结论是平凡的. 否则 $(T\mu)(p) > 0$, 这时我们考虑 T 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上通过 p 点的积分曲线. $\mathcal{U}'_{s,t-}$ 与这条积分曲线的交集是该积分曲线的开子集, 它对应于开区间 $\mathcal{J} \subset (0, \epsilon_0]$ (T 的积分曲线的参数为 u). 所以 $\mathcal{J}$ 是一族开区间的并. 0 不是 $\mathcal{J}$ 的边界点. 设点 p 对应于参数 u_*, 则 $u_* \in \mathcal{J}$. 考虑区间 $\mathcal{I}$, 即 $\mathcal{J}$ 对应于 u_* 的子区间. 如果 $\mathcal{I}$ 不是最右端的区间, 则 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{I} = (a, b), a > 0, b < \epsilon_0$, 如果 $\mathcal{I}$ 是最右端的区间, 则 $\mathcal{I} = (a, \epsilon_0]$ 或者 $\mathcal{I} = (a, \epsilon_0), a > 0$. 将函数 μ 视为沿着积分曲线的关于 u 函数. 则沿着同一条积分曲线 $T\mu$ 可以视为 $\frac{d\mu}{du}$, $T^2\mu$ 视为 $\frac{d^2\mu}{du^2}$. 考虑子区间 $(a, u_*] \subset \mathcal{I}$. 则要么 (情形 1) $\frac{d\mu}{du} > 0$ 在整个 $(a, u_*]$ 都成立, 或者 (情形 2) 存在 $(a, u_*]$ 最右侧的一个值 u 使得 $\frac{d\mu}{du} = 0$, 然后记这个最右侧的值为 $\bar{u}$, 我们有 $\frac{d\mu}{du} > 0$ 在 $(\bar{u}, u_*]$ 上成立.

在情形 1, 我们有

$$\mu(u_*) > \mu(a) \tag{13.47}$$

现在 $a \notin \mathcal{J}$, 所以存在积分曲线上一点 q (其对应于参数 a) 属于 $\Sigma_t^{\epsilon_0} \setminus \mathcal{U}'_{s,t-}$. 从而下界 (13.39) 在 q 成立:

$$\mu(q) \geqslant \frac{1}{8} \tag{13.48}$$

由 (13.47) 有 $\mu(u_*) > \mu(a)$, 这意味着

$$\mu(p) > \frac{1}{8} \tag{13.49}$$

这个与 (13.42) 共同推出

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) \leqslant C\delta_0(1 + \log(1 + t)) \tag{13.50}$$

在情形 2, $\frac{d^2\mu}{du^2}$ 在 $[\bar{u}, u_*]$ 上的平均值是正的. 然后记

$$\gamma(t) = \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} (T)^2 \mu \tag{13.51}$$

我们有 $\gamma(t) > 0$. 然后考虑某个 $u \in [\bar{u}, u_*]$. 我们有

$$\frac{d\mu}{du}(u_*) - \frac{d\mu}{du}(u) = \int_u^{u_*} \frac{d^2\mu}{du^2}(u')du'$$

即

$$(T\mu)(u_*) - (T\mu)(u) = \int_u^{u_*} ((T)^2\mu)(u')du' \leqslant \gamma(t)(u_* - u) \tag{13.52}$$

所以

$$(T\mu)(u) \geqslant (T\mu)(u_*) - \gamma(t)(u_* - u) \geqslant \frac{1}{2}(T\mu)(u_*) \quad \text{对于} \quad u \in [u_1, u_*] \tag{13.53}$$

其中

$$u_1 = u_* - \frac{(T\mu)(u_*)}{2\gamma(t)} \tag{13.54}$$

所以 $\bar{u} < u_1$, 否则 (13.53) 对 $u = \bar{u}$ 成立, 意味着 $(T\mu)(\bar{u}) \geqslant \frac{1}{2}(T\mu)(u_*) > 0$, 这与 $(T\mu)(\bar{u}) = 0$ 矛盾. 由于 $T\mu > 0$ 在 $(\bar{u}, u_*]$ 成立, 特别是在 $(\bar{u}, u_1]$ 成立, 我们有

$$\mu(u_1) > \mu(\bar{u}) \tag{13.55}$$

进一步, 由 (13.53), (13.54), 我们有

$$\mu(u_*) - \mu(u_1) = \int_{u_1}^{u_*} (T\mu)(u)du \geqslant \frac{1}{2}(T\mu)(u_*)(u_* - u_1) = \frac{((T\mu)(u_*))^2}{4\gamma(t)} \tag{13.56}$$

记

$$\mu_m(t) = \min_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} \mu \tag{13.57}$$

我们有

$$\mu(\bar{u}) \geqslant \mu_m(t) \tag{13.58}$$

将 (13.55), (13.56) 和 (13.58) 组合起来, 我们有

$$\mu(p) - \mu_m(t) \geqslant \frac{((T\mu)(p))^2}{4\gamma(t)} \tag{13.59}$$

所以我们得到

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) = \frac{(T\mu)(p)}{\mu(p)} \leqslant \frac{(T\mu)(p)}{\frac{((T\mu)(p))^2}{4\gamma(t)} + \mu_m(t)} = 2\sqrt{\gamma(t)} f_\epsilon(x) \tag{13.60}$$

其中

$$x = \frac{(T\mu)(p)}{2\sqrt{\gamma(t)}} > 0, \quad \epsilon = \sqrt{\mu_m(t)} > 0 \tag{13.61}$$

$f_\epsilon(x)$ 是如下函数:

$$f_\epsilon(x) = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \tag{13.62}$$

现在 $f_\epsilon(x)$ 在 $x=\epsilon$ 取得最大值, 其最大值为 $\frac{1}{2\epsilon}$. 所以

$$f_\epsilon(x) \leqslant \frac{1}{2\epsilon} \tag{13.63}$$

从而由 (13.60) 有

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) \leqslant \frac{\sqrt{\gamma(t)}}{\sqrt{\mu_m(t)}} \tag{13.64}$$

现在考虑 $\mu_m(t)$. 由命题 8.6 和 (13.37), (13.38), 我们有

$$\begin{aligned}\mu(t,u,\vartheta) &\geqslant \frac{1}{2}\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta) = \frac{1}{2}(1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(1-\delta_1\tau-|\hat{Q}_{0,s}|)\end{aligned} \tag{13.65}$$

由于 $\delta_1\sigma \leqslant 1$, 这意味着

$$\mu_m(t) \geqslant \frac{1}{2}(\delta_1(\sigma-\tau)-|\hat{Q}_{0,s}|) \tag{13.66}$$

由命题 8.6, 我们有

$$|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)| \leqslant C\delta_0 b(t,s) \tag{13.67}$$

其中

$$b(t,s) = \frac{1+\log(1+t)}{1+t}\frac{s-t}{1+s} \tag{13.68}$$

由 (8.288) 有

$$0 \leqslant b(t,s) \leqslant \frac{1+\tau}{e^\tau}(\sigma-\tau) \tag{13.69}$$

将 (13.67), (13.69) 代入 (13.66), 我们得到

$$\mu_m(t) \geqslant \frac{1}{2}\delta_1(1-C\frac{\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^\tau})(\sigma-\tau) \tag{13.70}$$

由于我们在考虑子情形 $\tau > \tau_1$, 所以我们有

$$\frac{1+\tau}{e^\tau} < \frac{1+\tau_1}{e^{\tau_1}} = \frac{1+\frac{1}{2\delta_1}}{e^{\frac{1}{2\delta_1}}}$$

因子

$$\frac{1}{\delta_1}(1+\frac{1}{2\delta_1})e^{-\frac{1}{2\delta_1}}$$

是有界的并且当 $\delta_1 \to 0$ 时趋向于 0. 所以如果 δ_0 足够小, 我们有

$$1 - C\frac{\delta_0}{\delta_1}\frac{1+\tau}{e^\tau} \geqslant \frac{1}{2}$$

同样由于 $2\delta_1 \geqslant \frac{1}{\tau}$, 我们由 (13.70) 得到

$$\mu_m(t) \geqslant \frac{1}{8}\frac{\sigma-\tau}{1+\tau} \tag{13.71}$$

另一方面, 由 $\mathbf{M}_{[2,2]}$, 我们有

$$\gamma(t) \leqslant C\delta_0(1+\tau) \tag{13.72}$$

由 (13.71), (13.72), 我们从 (13.64) 得到

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) \leqslant C\sqrt{\delta_0}\frac{1+\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}} \tag{13.73}$$

这就是情形 2 的界. 将这个与 (13.50) 结合起来, 我们得到对任意 $p \in \mathcal{U}'_{s,t-}, t \in (t_1, s]$ 有

$$(\mu^{-1}(T\mu)_+)(p) \leqslant C\sqrt{\delta_0}\frac{1+\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}} + C\delta_0(1+\tau) \tag{13.74}$$

将这个与 (13.46) 和 (13.43) 结合, 我们得出, 在一般情形下有

$$\mu^{-1}(T\mu)_+ \leqslant B_s(t) \tag{13.75}$$

其中

$$B_s(t) = C\sqrt{\delta_0}\frac{1+\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}} + C\delta_0(1+\tau) \tag{13.76}$$

我们有

$$\int_0^s (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B_s(t)dt = \int_0^\sigma (1+\tau)^4 B_s(t) e^{-\tau} d\tau$$

以及

$$\int_0^{\frac{\sigma}{2}} \frac{(1+\tau)^5}{\sqrt{\sigma-\tau}} e^{-\tau} d\tau \leqslant C\int_0^{\frac{\sigma}{2}} \frac{(1+\tau)^5}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} d\tau$$
$$\leqslant C\int_0^{\infty} \frac{(1+\tau)^5}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} d\tau = C \quad \text{不依赖于 } s$$

而

$$\int_{\frac{\sigma}{2}}^{\sigma} \frac{(1+\tau)^5}{\sqrt{\sigma-\tau}} e^{-\tau} d\tau \leqslant (1+\sigma)^5 e^{-\frac{\sigma}{2}} \int_{\frac{\sigma}{2}}^{\sigma} \frac{d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}$$
$$= \sqrt{2\sigma}(1+\sigma)^5 e^{-\frac{\sigma}{2}} \leqslant C \quad \text{不依赖于 } s$$

所以

$$\int_0^s (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B_s(t)dt \leqslant C\sqrt{\delta_0}$$

其中常数 C 不依赖于 s.

现在考虑 $\mu^{-1}(L\mu+\underline{L}\mu)_+$. 由于 $\underline{L}=\eta^{-2}\mu L+2T$, 我们有

$$\mu^{-1}(L\mu+\underline{L}\mu)_+ \leqslant \eta^{-2}|L\mu| + \mu^{-1}(L\mu)_+ + 2\mu^{-1}(T\mu)_+ \tag{13.77}$$

由 μ 的传输方程, (13.77) 右端第一项被 $C\delta_0(1+t)^{-1}$ 界定. 右端第二项由命题 13.1 界定, 但我们用另一种方法处理情形 2, 即我们用 (13.8) 估计 (13.7) 右端第一项:

$$C\delta_0(1+t)^{-1}$$

从而在情形 2 ($\hat{E}_s(u,\vartheta)>0$), 我们得到如下估计:

$$\frac{1}{\hat{\mu}_s}(\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t})_+ \leqslant \frac{C\delta_0}{(1+t)} \tag{13.78}$$

所以我们有

$$\mu^{-1}(L\mu)_+ \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{13.79}$$

这个与 (13.75) 以及 (13.77) 共同意味着

$$\mu^{-1}(L\mu+\underline{L}\mu)_+ \leqslant B'_s(t) \quad 在 \quad W^s_{\epsilon_0} \text{ 上} \tag{13.80}$$

其中

$$B'_s(t) = 2B_s(t) + C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{13.81}$$

注意到

$$\int_0^s (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B'_s(t)dt \leqslant C\sqrt{\delta_0} \tag{13.82}$$

其中 C 是一个不依赖于 s 的常数, 从而我们得到 **C2** 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 上成立. 所以命题 13.2 成立. □

命题 13.3　设命题 13.1 的假设成立并且设 $\mathcal{U}$ 为

$$\mathcal{U} = \{x \in W^*_{\epsilon_0} : \mu < \frac{1}{4}\}$$

则存在一个不依赖于 s 的正整数 C 使得在 $\mathcal{U}\bigcap W_{\epsilon_0}^s$ 中有

$$L\mu \leqslant -C^{-1}(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1}$$

即 **C3** 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立.

证明 考虑 $p\in\mathcal{U}\bigcap\Sigma_t^{\epsilon_0}, t\in[0,s]$, 并设其声学坐标为 (t,u,ϑ). 首先我们有 $\hat{E}_s(u,\vartheta)<0$. 不然由命题 8.6, 对足够小的 δ_0 有

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)\geqslant 1+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)\geqslant 1-C\delta_0\geqslant\frac{1}{2}$$

所以

$$\mu(t,u,\vartheta)=\mu_{[1],s}(u,\vartheta)\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)\geqslant\frac{1}{4}$$

与 $p\in\mathcal{U}$ 矛盾. 接下来有 $\log(1+t)=\tau>\tau_2$, 其中

$$\tau_2=\frac{1}{4\delta},\quad \delta=-\hat{E}_s(u,\vartheta)>0 \tag{13.83}$$

否则由命题 8.6, 对足够小的 δ_0 有

$$\hat{\mu}_s(t,u,\vartheta)=1-\delta\tau+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)\geqslant\frac{3}{4}-C\delta_0\geqslant\frac{1}{2}$$

所以 $\mu(t,u,\vartheta)\geqslant\frac{1}{4}$ 与 $p\in\mathcal{U}$ 矛盾.

现在由命题 8.6 有

$$L\mu=\mu_{[1],s}\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t} \tag{13.84}$$

和

$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta)=-\frac{\delta}{1+t}+\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta) \tag{13.85}$$

由 (13.5) 有

$$\frac{\partial\hat{\mu}_s}{\partial t}\leqslant-\frac{\delta}{1+t}(1-\frac{C\delta_0}{\delta}\frac{1+\tau}{e^\tau}) \tag{13.86}$$

而 $\tau>\tau_2$ 意味着

$$\frac{1+\tau}{e^\tau}<\frac{1+\tau_2}{e^{\tau_2}}=(1+\frac{1}{4\delta})e^{-\frac{1}{4\delta}}$$

因为函数

$$\frac{1}{\delta}(1+\frac{1}{4\delta})e^{-\frac{1}{4\delta}}$$

有界并且当 $\delta \to 0$ 时趋向于 0, 所以

$$\frac{C\delta_0}{\delta}\frac{1+\tau}{e^\tau} \leqslant \frac{1}{2}$$

前提是 δ_0 足够小. 所以由 (13.86) 有

$$\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) \leqslant -\frac{1}{2}\frac{\delta}{1+t} \tag{13.87}$$

由于 $\log(1+t) = \tau > \tau_2 = \frac{1}{4\delta}$, 这意味着

$$\frac{\partial \hat{\mu}_s}{\partial t}(t,u,\vartheta) \leqslant -\frac{1}{8}\frac{1}{(1+t)(1+\log(1+t))} \tag{13.88}$$

然后由 (13.84) 以及命题 8.6 的结论, $\mu_{[1],s} \geqslant \frac{1}{2}$, 我们有

$$L\mu \leqslant -C^{-1}(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1}, \quad 其中\ C = 16 \tag{13.89}$$

所以命题得证. □

接下来我们定义第五章中需要的函数 ω.

命题 13.4 设命题 12.6 的假设成立, 并且初值满足 (13.1). 定义

$$\omega = 2(1+t)$$

则 ω 满足 **D1**, **D2**, **D3**, **D4** 和 **D5**, 这正是第五章中所需要的.

证明 **D1** 是显然的. 我们有

$$L\omega = 2, \quad T\omega = 0, \quad \not{d}\omega = 0 \tag{13.90}$$

由 (13.90) 的第一式有

$$L\omega - \frac{\omega}{1-u+t} = 2(1 - \frac{1+t}{1-u+t}) = \frac{-2u}{1-u+t} \tag{13.91}$$

所以

$$|L\omega - \frac{\omega}{1-u+t}| \leqslant \frac{C}{1+t} \tag{13.92}$$

另一方面, 由 (5.9) 有

$$\nu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi + L\log\Omega) = \frac{1}{1-u+t} + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi' + L\log\Omega) \tag{13.93}$$

所以由命题 12.6 有

$$|\nu - \frac{1}{1-u+t}| \leqslant C\delta_0 \frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2} \tag{13.94}$$

再由 (13.92) 和 (13.94),

$$|L\omega - \nu\omega| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{13.95}$$

这意味着 **D2**. 由 (13.90) 的前面两式有

$$\underline{L}\omega = 2\eta^{-1}\kappa \tag{13.96}$$

所以由命题 12.1 有

$$|\underline{L}\omega| \leqslant C(1+\log(1+t)) \tag{13.97}$$

这可以推出 **D3**. **D4** 显然可以由 (13.90) 的第三式得到.

最后我们考虑 **D5**. 为了计算 $\mu\Box_{\tilde{g}}\omega$, 我们要用 (3.154) (将 f 取为 ω). 由 (13.90) 的第三式, 这个化为

$$-\mu\Omega\Box_{\tilde{g}}\omega = L(\underline{L}\omega) + \nu\underline{L}\omega + \underline{\nu}L\omega \tag{13.98}$$

由 (13.96) 有

$$L(\underline{L}\omega) = 2L(\eta^{-1}\kappa) \tag{13.99}$$

同样由 (13.96) 以及 (13.90) 的第一式有

$$\begin{aligned}\nu\underline{L}\omega + \underline{\nu}L\omega &= 2(\nu\eta^{-1}\kappa + \underline{\nu}) \\ &= (\eta^{-1}\kappa\mathrm{tr}\chi + \mathrm{tr}\underline{\chi} + \eta^{-1}\kappa L\log\Omega + \underline{L}\log\Omega) \\ &= 2(\kappa\mathrm{tr}\not{k} + \eta^{-1}\kappa L\log\Omega + T\log\Omega)\end{aligned} \tag{13.100}$$

这里我们用到了 $\nu, \underline{\nu}$ 的定义以及如下事实:

$$\eta^{-1}\kappa\chi + \underline{\chi} = 2\kappa\not{k}$$

所以我们得到

$$-\mu\Omega\Box_{\tilde{g}}\omega = 2(L(\eta^{-1}\kappa) + \kappa\mathrm{tr}\not{k} + \eta^{-1}\kappa L\log\Omega + T\log\Omega) \tag{13.101}$$

命题 12.6 意味着

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mu|\Box_{\tilde{g}}\omega|) \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{13.102}$$

这就证明了 **D5**. 所以命题得证. □

现在考虑定理 5.1 的其他假设. **B** 可以从 $\mathbf{\not{X}}_{[1]}$ 和 $\mathbf{M}_{[1,2]}$ 直接推出, 它们已经分别在命题 12.9 ($l = 1$) 和命题 12.10 ($m = l = 1$) 推出. 命题 10.5, 10.6, 11.5, 11.6, 要求 $\mathbf{\not{X}}_{[(l+1)_*]}$ 和 $\mathbf{M}_{\{(l+1)_*+1\}}$. 这些假设可以分别由命题 12.9 和命题 12.10 在 $\mathbf{E}_{\{(l+1)_*+2\}}, \mathbf{E}^{Q}_{\{(l+1)_*+1\}}, \mathbf{E}^{QQ}_{\{(l+1)_*\}}$ 基础之上推出. 我们现在将这些假设中的常数都设为 1. 更一般地, 定义连续性假设 $\mathbf{E}^{Q\cdots Q}_{\{q\}}$ 如下, 其中 Q 的长度为 p, $p = 0, \cdots, q$: 首先, 连续性假设 $\mathbf{E}_{0,0}$ 在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立, 如果对 $t \in [0, s]$ 有

$$\mathbf{E}_{0,0}: \quad \max_{\alpha} \|\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant \delta_0(1+t)^{-1}$$

对不全为 0 的常数 p, m, n 成立, 我们说连续性假设

$$\mathbf{E}^{Q\cdots Q}_{m,n}$$

在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立, 如果对 $t \in [0, s]$ 有

$$\mathbf{E}^{Q\cdots Q}_{m,n}: \quad \max_{\alpha; i_1 \cdots i_n} \|R_{i_n} \cdots R_{i_1}(T)^m(Q)^p \psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant \delta_0(1+t)^{-1}$$

然后我们定义 $\mathbf{E}^{Q\cdots Q}_{\{q\}}$ 为 $\mathbf{E}^{Q\cdots Q}_{m,n}$ 满足

$$\{(m,n) : m, n \geqslant 0, \quad m + n \leqslant q\}$$

的组合. 最后我们定义连续性假设 $\mathbf{E}_{\{\{k\}\}}$ 为如下假设的组合:

$$\mathbf{E}^{Q\cdots Q}_{\{k-p\}}: \quad p = 0, \cdots, k$$

从现在开始我们称**连续性假设**为 $\mathbf{E}_{\{\{(l+1)_*+2\}\}}$. 我们已经看到所有的假设都可以由连续性假设再加上初值的假设推出.

第十四章　声学量最高阶空间导数的误差估计

14.1　声学量最高阶空间导数的误差量

这一章我们处理声学量 χ 和 μ 的最高阶空间导数的误差估计. 注意到 $\not{\mathcal{L}}_L\chi$ 和 $L\mu$ 可以分别用 χ 和 μ 由传输方程表示, 所以 χ 和 μ 的最高阶导数实际上是空间导数.

给定一个正整数 n, 我们记 ${}^{(\alpha;I_1\cdots I_{n-1})}\psi_n$ 为 n 阶变分:

$$ {}^{(\alpha;I_1\cdots I_{n-1})}\psi_n = Y_{I_{n-1}}\cdots Y_{I_1}{}^{(\alpha)}\psi_1 \tag{14.1} $$

其中

$$ {}^{(\alpha)}\psi_1 = \psi_\alpha \tag{14.2} $$

这里, 指标 $I_1,\cdots,I_{n-1}$ 取遍集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 并且我们有

$$ Y_1 = T,\quad Y_2 = Q,\quad Y_{i+2} = R_i,\quad i=1,2,3 \tag{14.3} $$

对 $n\geqslant 2$ 我们可以将 (14.1) 表示为

$$ {}^{(\alpha;I_1\cdots I_{n-1})}\psi_n = Y_{I_{n-1}}\cdots Y_{I_1}\psi_\alpha,\quad n\geqslant 2 \tag{14.4} $$

我们要求多重指标 $(I_1\cdots I_{n-1})$ 为如下几种形式之一. 首先会有一串 "2" (可能为空集). 然后会有一串 "1" (同样可能为空集). 最后会有一串属于集合 $\{3,4,5\}$ 的多重指标. 如果 "2" 的长度为 p, "1" 的长度为 m, 来自于 $\{3,4,5\}$ 的多重指标长度为 n, 则我们有

$$(I_1\cdots I_{p+m+n}) = (2\cdots 21\cdots 1i_1+2\cdots i_n+2) \tag{14.5}$$

其中 $(i_1\cdots i_n)$ 是来自于 $\{1,2,3\}$ 的多重指标. 所以如果 $p+m+n>0$, 我们有

$$^{(\alpha;I_1\cdots I_{p+m+n})}\psi_{p+m+n+1} = R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m(Q)^p\psi_\alpha \tag{14.6}$$

我们将用一个比 (14.1) 更简单的记号:

$$^{(I_1\cdots I_{n-1})}\psi_n = Y_{I_{n-1}}\cdots Y_{I_1}\psi_1 \tag{14.7}$$

特别是当我们不关心究竟是哪一个一阶变分的时候.

我们有如下非齐次波方程:

$$\square_{\tilde{g}}{}^{(I_1\cdots I_{n-1})}\psi_n = {}^{(I_1\cdots I_{n-1})}\rho_n \tag{14.8}$$

像第七章中那样, 定义

$$^{(I_1\cdots I_{n-1})}\tilde{\rho}_n = \Omega^2\mu^{(I_1\cdots I_{n-1})}\rho_n \tag{14.9}$$

由 (7.30), 对 $n\geqslant 2$ 我们有如下递推公式:

$$^{(I_1\cdots I_{n-1})}\tilde{\rho}_n = (Y_{I_{n-1}} + {}^{(Y_{I_{n-1}})}\delta)^{(I_1\cdots I_{n-2})}\tilde{\rho}_{n-1} + {}^{(Y_{I_{n-1}};I_1\cdots I_{n-2})}\sigma_{n-1} \tag{14.10}$$

以及

$$\tilde{\rho}_1 = 0 \tag{14.11}$$

在 (14.10) 中函数 $^{(Y_{I_{n-1}})}\delta$ 由 (7.33) 定义, 并且只依赖于交换向量场 $Y_{I_{n-1}}$, 而函数 $^{(Y_{I_{n-1}};I_1\cdots I_{n-2})}\sigma_{n-1}$ 由 (7.31) 和 (7.32) 定义并且依赖于 $Y_{I_{n-1}}$ 以及 $^{(I_1\cdots I_{n-2})}\psi_{n-1}$. 我们将把命题 8.2 应用到 (14.10). 将 n 用 $n+1$ 代替, 我们有

$$^{(I_1\cdots I_n)}\tilde{\rho}_{n+1} = (Y_{I_n} + {}^{(Y_{I_n})}\delta)^{(I_1\cdots I_{n-1})}\tilde{\rho}_n + {}^{(Y_{I_n};I_1\cdots I_{n-1})}\sigma_n \tag{14.12}$$

对 $n=1,2,\cdots$ 成立. 再运用命题 8.2 得到

$$^{(I_1\cdots I_n)}\tilde{\rho}_{n+1} = \sum_{m=0}^{n-1}(Y_{I_n} + {}^{(Y_{I_n})}\delta)\cdots(Y_{I_{n-m+1}} + {}^{(Y_{I_{n-m+1}})}\delta)^{(Y_{I_{n-m}};I_1\cdots I_{n-m-1})}\sigma_{n-m} \tag{14.13}$$

或者设 $n = l+1, m = k$ 有

$$^{(I_1\cdots I_{l+1})}\tilde{\rho}_{l+2} = \sum_{k=0}^{l}(Y_{I_{l+1}} + {}^{(Y_{I_{l+1}})}\delta)\cdots(Y_{I_{l-k+2}} + {}^{(Y_{I_{l-k+2}})}\delta)^{(Y_{I_{l-k+1}};I_1\cdots I_{l-k})}\sigma_{l+1-k} \tag{14.14}$$

我们将注意力集中在声学量的最高阶空间导数, 即 χ 的 $l+1$ 阶空间导数和 μ 的 $l+2$ 阶空间导数. 这些只出现在 $^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的 $l+1$ 阶空间导数中. 由 (7.59), 我们有

$$^{(Y)}\sigma_{n-1} = {}^{(Y)}\sigma_{1,n-1} + {}^{(Y)}\sigma_{2,n-1} + {}^{(Y)}\sigma_{3,n-1} \tag{14.15}$$

其中 $^{(Y)}\sigma_{1,n-1}, {}^{(Y)}\sigma_{2,n-1}, {}^{(Y)}\sigma_{3,n-1}$ 由 (7.74)—(7.79) 给出. 在这当中只有 $^{(Y)}\sigma_{2,n-1}$ 包含 $^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的空间导数.

我们得出 $^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的 $l+1$ 阶, 即最高阶空间导数只出现在 (14.14) 和式的 $k=l$ 那一项中:

$$(Y_{I_{l+1}} + {}^{(Y_{I_{l+1}})}\delta)\cdots(Y_{I_2} + {}^{(Y_{I_2})}\delta)^{(Y_{I_1})}\sigma_1 \tag{14.16}$$

即在

$$Y_{I_{l+1}}\cdots Y_{I_2}{}^{(Y_{I_1})}\sigma_{2,1} \tag{14.17}$$

中. 并且我们可以将 $^{(Y_{I_1})}\sigma_{2,1}$ 用它的最高阶空间导数的部分代替:

$$\begin{aligned}&(1/2)T(\mathrm{tr}^{(Y_{I_1})}\tilde{\not\pi})L\psi_1 - \not{\mathcal{L}}_T{}^{(Y_{I_1})}\tilde{Z}\cdot \not d\psi_1\\&-(1/2)\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}^{(Y_{I_1})}\tilde{Z}\underline{L}\psi_1 - (1/2)\mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}^{(Y_{I_1})}\tilde{\underline{Z}}L\psi_1\\&+(1/2)\not d^{(Y_{I_1})}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}\cdot(\not d\psi_1) + \mathrm{d}\!\!\!/\mathrm{iv}(\mu^{(Y_{I_1})}\hat{\tilde{\not\pi}})\cdot(\not d\psi_1)\end{aligned} \tag{14.18}$$

这里我们将关于 $\underline{L}$ 的导数用关于 T 的导数来表示了. 注意到形如 (14.17) 那样的表达式, 即可能包含声学量最高阶空间导数的项为 $(I_2\cdots I_{l+1})$ 当中不包含 2 的那些项, 所以要么 $p=0$, 此时 Y_{I_1} 是 T, R_j, $j=1,2,3$ 中的某个向量场, 要么 $p=1$, 此时 $Y_{I_1}=Q$. 接下来我们记 $[\quad]_{P.A.}$ 为由 χ' 和 μ 表示的声学主部, 注意到 $\chi - \chi' = (1-u+t)^{-1}\not g$ 是低阶项.

首先考虑 $p=1, Y_{I_1}=Q$ 的情形. $^{(Q)}\tilde{\pi}$ 的分量在第六章中给出. 注意到

$$[\nu]_{P.A.} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi', \quad [\Lambda]_{P.A.} = -(\not d\mu)^{\sharp} \tag{14.19}$$

我们有

$$
\begin{aligned}
[{}^{(Q)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}]_{P.A.} &= 0 \\
[{}^{(Q)}\tilde{Z}]_{P.A.} &= 0 \\
[{}^{(Q)}\tilde{\underline{Z}}]_{P.A.} &= 2\Omega(1+t)(\not{d}\mu)^{\sharp} \\
[\mathrm{tr}{}^{(Q)}\tilde{\not{\pi}}]_{P.A.} &= 2\Omega(1+t)\mathrm{tr}\chi' \\
[{}^{(Q)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}]_{P.A.} &= 2\Omega(1+t)\hat{\chi}'
\end{aligned}
\tag{14.20}
$$

由 (14.18), 我们得到

$$
[{}^{(Q)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} = [\Omega(1+t)((T\mathrm{tr}\chi' - \not{\Delta}\mu)L\psi_1 + 2\mu(\not{d}\mathrm{iv}\hat{\chi}')\cdot(\not{d}\psi_1))]_{P.A.} \tag{14.21}
$$

由 (8.99) 有

$$
[2\not{d}\mathrm{iv}\hat{\chi}' - \not{d}\mathrm{tr}\chi']_{P.A.} = 0 \tag{14.22}
$$

同样由 (3.124)—(3.125) 有

$$
[T\mathrm{tr}\chi' - \not{\Delta}\mu]_{P.A.} = 0 \tag{14.23}
$$

再由 (14.22) 和 (14.23), (14.21) 化为

$$
[{}^{(Q)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} = \Omega(1+t)\mu(\not{d}\mathrm{tr}\chi')\cdot(\not{d}\psi_1) \tag{14.24}
$$

接下来考虑 $p=0, Y_{I_1}=R_j$ 的情形. 由 (6.8) 和 (6.180) 有

$$
{}^{(R_j)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}} = -2\Omega R_j\mu - 2\mu R_j\Omega \tag{14.25}
$$

所以

$$
[{}^{(R_j)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}]_{P.A.} = -2\Omega R_j\mu \tag{14.26}
$$

由 (6.67) 有

$$
[{}^{(R_j)}\not{\pi}_L]_{P.A.} = -R_j\cdot\chi' \tag{14.27}
$$

由于

$$
{}^{(R_j)}\tilde{Z} = \Omega^{(R_j)}Z
$$

所以有

$$[{}^{(R_j)}\tilde{Z}]_{P.A.} = -\Omega R_j \cdot \chi'^{\sharp} \tag{14.28}$$

我们得到

$$^{(R_j)}\not{\pi}_{\underline{L}} = \eta^{-1}\kappa{}^{(R_j)}\not{\pi}_L + 2{}^{(R_j)}\not{\pi}_T$$

由 (6.63) 以及事实

$$\chi = \eta(\not{k} - \theta)$$

和 (14.28), 我们推出

$$[{}^{(R_j)}\tilde{\underline{Z}}]_{P.A.} = \Omega\eta^{-1}(\kappa R_j \cdot \chi'^{\sharp} + 2\lambda_j(\not{d}\mu)^{\sharp}) \tag{14.29}$$

接下来由 (6.8), 我们有

$$[{}^{(R_j)}\tilde{\not{\pi}}]_{P.A.} = [\Omega{}^{(R_j)}\not{\pi}]_{P.A.} \tag{14.30}$$

再由 (6.59) 和 (3.27) 有

$$[{}^{(R_j)}\not{\pi}]_{P.A.} = 2\lambda_j\eta^{-1}\chi' \tag{14.31}$$

所以

$$[{}^{(R_j)}\tilde{\not{\pi}}]_{P.A.} = 2\Omega\lambda_j\eta^{-1}\chi' \tag{14.32}$$

从而有

$$[\mathrm{tr}{}^{(R_j)}\tilde{\not{\pi}}]_{P.A.} = 2\Omega\lambda_j\eta^{-1}\mathrm{tr}\chi' \tag{14.33}$$

以及

$$[{}^{(R_j)}\hat{\tilde{\not{\pi}}}]_{P.A.} = 2\Omega\lambda_j\eta^{-1}\hat{\chi}' \tag{14.34}$$

将 (14.26), (14.28), (14.29), (14.33), (14.34) 代入 (14.18), 我们得到

$$\begin{aligned}
&[{}^{(R_j)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} \\
&= [\Omega\lambda_j\alpha^{-1}(T\mathrm{tr}\chi')L\psi_1 + \Omega(R_j \cdot \not{\mathcal{L}}_T\chi') \cdot (\not{d}\psi_1) + (1/2)\Omega\mathrm{d}\not{i}\mathrm{v}(R_j \cdot \chi')\underline{L}\psi_1 \\
&\quad -(1/2)\Omega\alpha^{-1}(\kappa\mathrm{d}\not{i}\mathrm{v}(R_j \cdot \chi') + 2\lambda_j(\not{\Delta}\mu))L\psi_1 \\
&\quad -\Omega(\not{d}R_j\mu) \cdot (\not{d}\psi_1) + 2\Omega\lambda_j\kappa\mathrm{d}\not{i}\mathrm{v}\hat{\chi}' \cdot (\not{d}\psi_1)]_{P.A.}
\end{aligned} \tag{14.35}$$

由 (14.22), (14.23) 以及 (3.124)—(3.125),

$$[\not{\mathcal{L}}_T \chi' - \not{D}^2 \mu]_{P.A.} = 0 \tag{14.36}$$

(14.35) 化为

$$\begin{aligned}[^{(R_j)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} = &[\Omega \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(R_j \cdot \chi') T\psi_1 + \Omega\lambda_j \kappa \not{d}\mathrm{tr}\chi' \cdot (\not{d}\psi_1) \\ &+ \Omega(R_j \cdot \not{D}^2 \mu - \not{d}R_j \mu) \cdot (\not{d}\psi_1)]_{P.A.}\end{aligned} \tag{14.37}$$

考虑 $\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(R_j \cdot \chi')$ 在 $S_{t,u}$ 任意一个局部标架下的分量:

$$\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(R_j \cdot \chi') = \not{D}_A (R_j^B \chi_B'^A) = R_j^B (\not{D}_A \chi_B'^A) + (\not{D}_A R_j^B) \chi_B'^A$$

并注意到 $R_{jB} = \not{g}_{BC} R_j^C$:

$$(\not{D}_A R_j^B)\chi_B'^A = (\not{D}_A R_{jB})\chi'^{AB} = \frac{1}{2}(\not{D}_A R_{jB} + \not{D}_B R_{jA})\chi'^{AB} = \frac{1}{2} {}^{(R_j)}\not{\pi}_{AB} \chi'^{AB}$$

我们得出

$$\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(R_j \cdot \chi') = R_j \cdot \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\chi' + \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^{(R_j)}\not{\pi} \cdot \chi') \tag{14.38}$$

第二项是低阶项. 由 (14.22) 有

$$[\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(R_j \cdot \chi')]_{P.A.} = [R_j \cdot \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\chi']_{P.A.} = R_j \mathrm{tr}\chi' \tag{14.39}$$

最后考虑 $(R_j \cdot \not{D}^2 \mu - \not{d}R_j \mu) \cdot (\not{d}\psi_1)$. 用 $S_{t,u}$ 上的切向量场 $X = (\not{d}\psi_1)^\sharp$ 表示, 我们有

$$R_j \cdot \not{D}^2 \mu \cdot (\not{d}\psi_1) = \not{D}^2 \mu \cdot (X, R_j) \tag{14.40}$$

以及

$$\begin{aligned}\not{D}^2 \mu(X, R_j) &= X R_j \mu - \not{d}\mu \cdot (\not{D}_X R_j) \\ &= X R_j \mu - \not{d}\mu \cdot (\not{D}_{R_j} X) + \not{d}\mu \cdot [R_j, X]\end{aligned} \tag{14.41}$$

所以

$$\begin{aligned}(R_j \cdot \not{D}^2 \mu - \not{d}R_j \mu) \cdot (\not{d}\psi_1) &= \not{D}^2 \mu \cdot (X, R_j) - X R_j \mu \\ &= \not{d}\mu \cdot \not{\mathcal{L}}_{R_j} X - \not{d}\mu \cdot (\not{D}_{R_j} X)\end{aligned} \tag{14.42}$$

显然 (14.42) 不包含二阶的声学量. 我们有

$$[\Omega(R_j \cdot \not{D}^2 \mu - \not{d} R_j \mu) \cdot (\not{d}\psi_1)]_{P.A.} = 0 \tag{14.43}$$

由 (14.39) 和 (14.43), (14.37) 最后化为

$$[{}^{(R_j)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} = \Omega(R_j \mathrm{tr}\chi')T\psi_1 + \Omega\kappa\lambda_j \not{d}\mathrm{tr}\chi' \cdot (\not{d}\psi_1) \tag{14.44}$$

最后我们考虑 $p = 0, Y_{I_1} = T$ 的情形. ${}^{(T)}\tilde{\pi}$ 的分量由第六章给出. 我们有

$${}^{(T)}\tilde{Z} = {}^{(T)}\tilde{\not{\pi}}_L \cdot \not{g}^{-1} = \Omega\Lambda, \quad {}^{(T)}\tilde{\underline{Z}} = {}^{(T)}\tilde{\not{\pi}}_{\underline{L}} \cdot \not{g}^{-1} = \Omega\eta^{-1}\kappa\Lambda \tag{14.45}$$

注意到 $\underline{\chi} = -\eta^{-1}\kappa\chi + 2\kappa\not{k}$, 我们有

$$[\underline{\nu}]_{P.A.} = [\frac{1}{2}\mathrm{tr}\underline{\chi}]_{P.A.} = -\frac{1}{2}\eta^{-1}\kappa\mathrm{tr}\chi', \quad [\hat{\underline{\chi}}]_{P.A.} = -\eta^{-1}\kappa\hat{\chi}' \tag{14.46}$$

再由 (14.19), 我们得到

$$\begin{aligned}
[{}^{(T)}\tilde{\pi}_{L\underline{L}}]_{P.A.} &= -2\Omega T\mu \\
[{}^{(T)}\tilde{Z}]_{P.A.} &= -\Omega(\not{d}\mu) \\
[{}^{(T)}\tilde{\underline{Z}}]_{P.A.} &= -\Omega\eta^{-1}\kappa(\not{d}\mu) \\
[\mathrm{tr}{}^{(T)}\tilde{\not{\pi}}]_{P.A.} &= -2\Omega\eta^{-1}\kappa\mathrm{tr}\chi' \\
[{}^{(T)}\hat{\tilde{\pi}}]_{P.A.} &= -2\Omega\eta^{-1}\kappa\hat{\chi}'
\end{aligned} \tag{14.47}$$

将上式代入 (14.18) 得

$$\begin{aligned}
[{}^{(T)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} = [&-\Omega\alpha^{-1}\kappa(T\mathrm{tr}\chi')L\psi_1 + \Omega(\not{d}T\mu) \cdot (\not{d}\psi_1) \\
&+(1/2)\Omega(\not{\Delta}\mu)\underline{L}\psi_1 + (1/2)\Omega\eta^{-1}\kappa(\not{\Delta}\mu)L\psi_1 \\
&-\Omega(\not{d}T\mu) \cdot (\not{d}\psi_1) - 2\Omega\kappa^2 \mathrm{d\not{i}v}\hat{\chi}' \cdot (\not{d}\psi_1)]_{P.A.}
\end{aligned} \tag{14.48}$$

由 (14.22) 和 (14.23), (14.48) 化为

$$[{}^{(T)}\sigma_{2,1}]_{P.A.} = \Omega(\not{\Delta}\mu)T\psi_1 - \Omega\kappa^2 \not{d}\mathrm{tr}\chi' \cdot (\not{d}\psi_1) \tag{14.49}$$

由上可知, 与 ${}^{(\alpha;I_1\cdots I_{l+1})}\psi_{l+2}$ 相关的、重新定义的 ${}^{(\alpha;I_1\cdots I_{l+1})}\tilde{\rho}_{l+2}$ 所包含的声学主部如下:

当 $Y_{I_1} = Q$ 时, 变分为

$$^{(\alpha;21\cdots1i_1+2\cdots i_n+2)}\psi_{l+2} = R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m Q\psi_\alpha, \quad m+n=l \tag{14.50}$$

其中有 m 个 “1”. 由 (14.17) 和 (14.24), 相对应的声学主部为

$$\begin{aligned}
&[^{(\alpha;21\cdots1i_1+2\cdots i_n+2)}\tilde{\rho}_{l+2}]_{P.A.}\\
&=[\Omega(1+t)\mu(\not{d}R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\mathrm{tr}\chi')\cdot(\not{d}\psi_\alpha)]_{P.A.}\\
&=\begin{cases}\Omega(1+t)\mu(\not{d}R_{i_n}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')\cdot(\not{d}\psi_\alpha), & m=0\\ \Omega(1+t)\mu(\not{d}R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m-1}\not{\Delta}\mu)\cdot(\not{d}\psi_\alpha), & m\geqslant 1\end{cases}
\end{aligned} \tag{14.51}$$

其中有 m 个 “1”, 并且在 $m\geqslant 1$ 时, 我们用到了 (14.23).

当 $Y_{I_1} = R_j$ 时, 设 $i_1 = j$, 我们有

$$I_1\cdots I_{l+1} = i_1+2\cdots i_{l+1}+2$$

其变分为

$$^{(\alpha;i_1+2\cdots i_{l+1}+2)}\psi_{l+2} = R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha \tag{14.52}$$

由 (14.17) 和 (14.44), 其对应的声学主部为

$$\begin{aligned}
&[^{(\alpha;i_1+2\cdots i_{l+1}+2)}\tilde{\rho}_{l+2}]_{P.A.}\\
&=\Omega(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')T\psi_\alpha + \Omega\kappa\lambda_{i_1}(\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_2}\mathrm{tr}\chi')\cdot(\not{d}\psi_\alpha)
\end{aligned} \tag{14.53}$$

当 $Y_{I_1} = T$ 时, 其变分为

$$^{(\alpha;1\cdots1i_1+2\cdots i_n+2)}\psi_{l+2} = R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha,\ m+n=l \tag{14.54}$$

这里有 $m+1$ 个 “1”. 由 (14.17) 和 (14.49), 其对应的声学主部为

$$\begin{aligned}
&[^{(\alpha;i_1+2\cdots i_{l+1}+2)}\tilde{\rho}_{l+2}]_{P.A.}\\
&=\begin{cases}\Omega(R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu)T\psi_\alpha - \Omega\kappa^2(\not{d}R_{i_n}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')\cdot(\not{d}\psi_\alpha),\ m=0\\ \Omega(R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu)T\psi_\alpha - \Omega\kappa^2(\not{d}R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^{m-1}\not{\Delta}\mu)\cdot(\not{d}\psi_\alpha),\ m\geqslant 1\end{cases}
\end{aligned} \tag{14.55}$$

同样这里有 $m+1$ 个 “1”, 并且当 $m\geqslant 1$ 时我们用到了 (14.23).

从 (14.51), (14.53), (14.55) 可以看到, 最难的误差积分来自于 (14.53) 中的

$$\Omega(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')T\psi_\alpha \tag{14.56}$$

以及 (14.55) 中的

$$\Omega(R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m \not{\Delta}\mu)T\psi_\alpha,\ m+n=l \tag{14.57}$$

在 (14.53) 和 (14.55) 中这些项都与 $T\psi_\alpha$ 成比例. 而其他项在这两个表达式中与 $\not{d}\psi_\alpha$ 成比例. 除去使估计在 μ 很小的区域中变得简单的因子 κ, 这些项相对于 (14.56) 和 (14.57) 的主部还有一个形如 $(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2$ 的衰减. (14.51) 中的项同样与 $\not{d}\psi_\alpha$ 成比例, 并且除去因子 μ, 这些项相对于 (14.56) $(m=0)$ 和 (14.57) $(m\geqslant 1)$ 还有一个形如 $(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 的衰减. 所以我们可以将注意力集中在 (14.56) 和 (14.57).

14.2 临界误差积分

回忆第七章, n 阶变分 ψ_n 对应的误差积分为

$$-\int_{W_u^t}\tilde{\rho}_n(K_0\psi_n)dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{14.58}$$

与 K_0 相关, 以及

$$-\int_{W_u^t}\tilde{\rho}_n(K_1\psi_n+\omega\psi_n)dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{14.59}$$

与 K_1 相关.

由于

$$K_0\psi_n=\underline{L}\psi_n+(1+\eta^{-1}\kappa)L\psi_n \tag{14.60}$$

而

$$K_1\psi_n+\omega\psi_n=(\omega/\nu)(L\psi_n+\nu\psi_n) \tag{14.61}$$

$L\psi_n$ 在 (14.60) 中的系数相对于 (14.61) 中同一项的系数有形如 $(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$ 的衰减. 所以只需估计误差积分 (14.59) 以及 (14.60) 中来自于 $\underline{L}\psi_n$ 对误差积分 (14.58) 的贡献. 这个贡献的绝对值被

$$\int_{W_u^t}|\tilde{\rho}_n||\underline{L}\psi_n|dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{14.62}$$

界定. 所以我们要估计 (14.56) 和 (14.57) 对 (14.62) 和 (14.59) 的贡献.

我们从 (14.56) 对 (14.62) 的贡献开始. 该贡献为

$$
\begin{aligned}
&\int_{W_{\epsilon_0}^t} \Omega|R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||T\psi_\alpha||\underline{L}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dt'dud\mu_{\not{g}} \\
\leqslant C&\int_0^t \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}\|\underline{L}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'
\end{aligned}
\tag{14.63}
$$

现在由 (8.40), (8.63), (8.335) 和 (8.346), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)\|\mu\not{d}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant{}& C(1+t)^2(\||^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+\||\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\check{f}_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}) \\
={}& C((1+t)^2\||^{(i_1\cdots i_l)}x_l(t)|\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t))
\end{aligned}
\tag{14.64}
$$

代入 (8.413), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \\
\leqslant{}& C(1+t)^2((1+t)^{-2(i_1\cdots i_l)}P_l(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)) \\
&+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))B_l(t')dt'
\end{aligned}
\tag{14.65}
$$

这里, 由 (8.403) 有

$$
\begin{aligned}
{}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)={}&C(1+t)^{-2}({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t) \\
&+C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^{3(i_1\cdots i_l)}Q_l(t')dt' \\
&+C(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}
\end{aligned}
\tag{14.66}
$$

同样 (见 (8.405))

$$
B_l(t)=\max_{i_1\cdots i_l}{}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t) \tag{14.67}
$$

由 (8.348) 和 (8.349) 有

$$
{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}(\bar{\mu}_m^a(t')^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}(t')) \tag{14.68}
$$

$$
{}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')^{1/2}\bar{\mu}_m^a(t')^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}(t')) \tag{14.69}
$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}$ 由命题 10.6 定义, 并且我们有

$$
{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l(t)\leqslant{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}(t)+{}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}(t) \tag{14.70}
$$

注意到 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)$ 和 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t)$ 是非减的.

对 (14.63) 右端的主要贡献来自于 (14.65) 右端的第一项. 即, 来自于 $(1+t)^{-2(i_1\cdots i_l)}P_l(t)$ 以及关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)$ 的表达式 (14.66) 右端的第一项. 所以我们这里需要考虑的是

$$C({}^{(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(0)}(t)+(1+t)^{-1/2(i_1\cdots i_l)}\bar{P}_{l,a}^{(1)}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t) \tag{14.71}$$

实际的临界贡献来自于

$${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(0)}(t)=|\ell|\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)} \tag{14.72}$$

14.3 假设 J

为了估计临界贡献, 我们将要用到如下定义的假设 **J**. 回忆与 Galileo 时空相关的算子

$$S=x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-1,\quad \mathring{R}_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^k},\quad i=1,2,3 \tag{14.73}$$

该假设为: 存在不依赖于 s 的常数 C 使得在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中有

$$\mathbf{J}:\quad |S\phi|,|TS\phi|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1},\quad |\mathring{R}_i\phi|,|T\mathring{R}_i\phi|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1},\quad i=1,2,3 \tag{14.74}$$

成立, 其中 ϕ 是位势函数. 稍后我们将用连续性假设建立这个假设. 现在我们将用这个假设 **J** 导出一个用 $L\mu$ 表示的关于 $T\psi_\alpha$ 的衰减估计.

首先我们考虑与 Σ_t 相切的向量场

$$V=\sum_{i=1}^{3}(T\psi_i)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14.75}$$

回忆第六章中与 Euclid 球面垂直的单位向量 N:

$$N=\sum_{i=1}^{3}\frac{x^i}{r}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14.76}$$

将 V 分解为在 $\bar{g}$ 下分别与 Euclid 球面相切和垂直的部分:

$$V=V^{\parallel}+V^{\perp},\quad V^{\perp}=\bar{g}(V,N)N,\quad |V|^2=|V^{\parallel}|^2+|V^{\perp}|^2 \tag{14.77}$$

考虑向量场 $N \times V$. 我们有

$$|N \times V|^2 = |V^{\parallel}|^2 \tag{14.78}$$

$N \times V$ 的第 i 分量为

$$r(N \times V)^i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} x^j T(\partial_k \phi) = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}(T(x^j \partial_k \phi) - (Tx^j)\partial_k \phi) \tag{14.79}$$

所以我们有

$$r(N \times V)^i = T\mathring{R}_i \phi - \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} T^j \psi_k \tag{14.80}$$

由 **J**, 命题 12.1 和 (12.6) 有

$$r|N \times V| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \quad \text{在 } W^s_{\epsilon_0} \text{ 中成立} \tag{14.81}$$

再由 (12.14) 和 (14.78), 我们得到

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |V^{\parallel}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{14.82}$$

由 (14.75)—(14.77) 和 (14.82), 我们有

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |T\psi_i - \frac{x^i}{r}\bar{g}(V, N)| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{14.83}$$

接下来考虑

$$S\phi = x^\alpha \partial_\alpha \phi - \phi = t\psi_0 + \sum_{i=1}^{3} x^i \psi_i - \phi \tag{14.84}$$

我们有

$$TS\phi = tT\psi_0 + \sum_{i=1}^{3} x^i T\psi_i + \sum_{i=1}^{3} \psi_i Tx^i - T\phi$$

最后两项相互抵消, 我们得到

$$TS\phi = tT\psi_0 + \sum_{i=1}^{3} x^i T\psi_i = tT\psi_0 + r\bar{g}(V, N) \tag{14.85}$$

由 **J** 我们得到

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |\frac{t}{r} T\psi_0 + \bar{g}(V, N)| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{14.86}$$

将 (14.83) 和 (14.86) 组合起来, 我们得到

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |T\psi_i + \frac{tx^i}{r^2} T\psi_0| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{14.87}$$

回忆命题 8.5 的证明, 我们有

$$L\mu = m + e\mu$$

然后由 (8.209),

$$m = m_0 + m_1, \quad m_0 = \frac{1}{2}\ell T\psi_0$$

而由 (8.214), (8.218) 和 (8.220) 有

$$|m_1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}, \quad |e| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}$$

从而

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |L\mu - \frac{1}{2}\ell T\psi_0| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \tag{14.88}$$

由 (14.87), (12.14) 和 (14.88), 我们得到

$$\begin{aligned}\max_\alpha(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|) &\leqslant C\mu^{-1}|T\psi_0| + C\mu^{-1}\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)) \\ &\leqslant \frac{C}{|\ell|}(\mu^{-1}|L\mu| + C\mu^{-1}\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t)))\end{aligned}$$

在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上取上确界得到想要的估计:

$$\max_\alpha \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|) \leqslant \frac{C}{|\ell|}(\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|) + C\bar{\mu}_m^{-1}\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))) \tag{14.89}$$

我们将用这个通过 (14.68), (14.71) 和 (14.65) 来估计 (14.72) 对 (14.63) 右端的临界贡献. 为了估计它通过 (14.65) 对 (14.63) 的其他估计, 我们只需用

$$\max_\alpha \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|) \leqslant C\bar{\mu}_m^{-1}\delta_0(1+t)^{-1} \tag{14.90}$$

它可以由 $\mathbf{E}_{\{1\}}$ 推出.

14.4 与 K_0 相关的临界估计

14.4.1 关于 (14.56) 的贡献的估计

对非负实数 a 和 p, 我们定义

$$^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t'))\tag{14.91}$$

这些是关于 t 的非减函数, 并且我们有

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')}\\&\leqslant\bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^p\sqrt{^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)}\quad 对于\quad t'\in[0,t]\end{aligned}\tag{14.92}$$

所以由 (14.68), (14.72) 对 (14.71) 的临界贡献被

$$C|\ell|\bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)}\tag{14.93}$$

界定. 同样, 关于 (14.63) 右端的最后一个因子, 我们有

$$\begin{aligned}&\|\underline{L}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant\sqrt{\mathcal{E}_0[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)}\\&\leqslant\bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)}\end{aligned}\tag{14.94}$$

将 (14.89), (14.93) 和 (14.94) 代入 (14.63) 右端的积分, 因子 $|\ell|$ 抵消, 然后我们得到对该积分的临界贡献被

$$\begin{aligned}&C\int_0^t(\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)+C\bar{\mu}_m^{-1}\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t')))\\&\cdot\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2p\,(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t')dt'\end{aligned}\tag{14.95}$$

界定. 这时第一个因子中第二项的贡献不是临界的. 我们稍后将在估计

$$C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]}\tag{14.96}$$

通过 (14.69), (14.71) 和 (14.65) 对 (14.63) 右端的贡献时估计这种类型的积分. 上式中的积分出现在命题 10.6 中关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}$ 的表达式中. 现在我们将注意力集中在临界积分上:

$$C\int_0^t \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2p(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t')dt' \tag{14.97}$$

由于

$$|L\mu| = \max\{-(L\mu)_-, (L\mu)_+\} \leqslant -(L\mu)_- + (L\mu)_+$$

我们有

$$\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|) \leqslant \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(-\mu^{-1}(L\mu)_-) + \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}(L\mu)_+) \tag{14.98}$$

将 (14.98) 代入 (14.97), 我们首先考虑 (14.98) 右端的第一项. 由 (8.249) 有

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(-\mu^{-1}(L\mu)_-) = M(t) \tag{14.99}$$

所以其贡献为

$$\begin{aligned} &C\int_0^t M(t')\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2p(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t')dt' \\ &\leqslant C(1+\log(1+t))^{2p(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)I_{2a}(t) \end{aligned} \tag{14.100}$$

其中 $I_a(t)$ 是引理 8.11 中的积分. 由引理 8.11, 我们有

$$I_{2a}(t) \leqslant C(2a)^{-1}\bar{\mu}_m^{-2a}(t) \tag{14.101}$$

其中 C 是一个不依赖于 a 的常数, 前提是 $a \geqslant 2$ 并且 δ_0 足够小依赖于 a. 所以我们得出 (14.100) 被

$$\frac{C}{2a}\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t) \tag{14.102}$$

界定.

接下来考虑 (14.98) 右端的第二项. 命题 11.3 意味着

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}(L\mu)_+) \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1} \tag{14.103}$$

所以我们考虑的贡献为

$$C\int_0^t \bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{2p-1\,(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t')dt' \tag{14.104}$$

由引理 8.11 的推论 2 有

$$\bar{\mu}_m^{-2a}(t') \leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t) \tag{14.105}$$

其中 C 不依赖于 a, 同样我们要假设 $a \geqslant 2$ 以及 δ_0 足够小并依赖于 a. 由于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)$ 是一个关于 t 的非减函数, 所以 (14.104) 被

$$C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{2p-1}dt' \tag{14.106}$$

界定. 由于

$$\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{2p-1}dt' = \frac{1}{2p}((1+\log(1+t))^{2p}-1)$$

这一项被

$$\frac{C}{2p}\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p\,(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t) \tag{14.107}$$

界定. 所以我们就估计了对 (14.63) 的临界贡献. 我们将转向其他的贡献.

定义

$$\mathcal{E}_{0,[n]}(t) = \sum_{m=1}^{n}\mathcal{E}_{0,m}(t) \tag{14.108}$$

其中 $\mathcal{E}_{0,n}$ 表示与 K_0 相关的所有 n 阶变分能量的和. 定义

$$\mathcal{G}_{0,[n];a,p}(t) = \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\mathcal{E}_{0,[n]}(t')) \tag{14.109}$$

同样定义

$$\mathcal{E}'_{1,[n]}(t) = \sum_{m=1}^{n}\mathcal{E}'_{1,m}(t) \tag{14.110}$$

其中 $\mathcal{E}'_{1,n}$ 表示与 K_1 相关的 n 阶变分的能量的和. 对 $q \geqslant p$, 我们定义

$$\mathcal{G}'_{1,[n];a,q}(t) = \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\mathcal{E}'_{1,[n]}(t')) \tag{14.111}$$

我们现在考虑 (14.96) 通过 (14.69) 和 (14.65) 对 (14.63) 右端的贡献, 它来自于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}P_l^{(1)}$ 定义式的第二项. 由 (14.110) 和 (14.111), 我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}'_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')} &\leqslant \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')}\\ &\leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^q\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \quad \text{对于} \quad t'\in[0,t]\end{aligned} \tag{14.112}$$

所以由 (14.69), (14.96) 对 (14.71) 的贡献被

$$C_q(1+t)^{-1/2}\bar{\mu}_m^{-a}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.113}$$

界定, 其中 C_q 是依赖于 q 的常数:

$$C_q = C\sup_{t\in[0,\infty)}((1+t)^{-1/2}(1+\log(1+t))^{q+1/2})$$

同样由 (14.94) 和定义 (14.108), (14.109), 我们有

$$\|\underline{L}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \tag{14.114}$$

所以由 (14.90), (14.96) 通过 (14.65) 对 (14.63) 右端的贡献被

$$C_q\delta_0\int_0^t(1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p\bar{\mu}_m^{-2a-1}(t')\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \tag{14.115}$$

界定. 为了估计这个, 我们需要考虑出现在引理 8.11 中的两种情形:

情形 1: $\hat{E}_{s,m}\geqslant 0$.

在这种情形我们有下界 (8.258):

$$\bar{\mu}_m(t)\geqslant 1-C\delta_0 \tag{14.116}$$

这意味着

$$\bar{\mu}_m^{-2a-1}(t)\leqslant C \tag{14.117}$$

前提是 $\delta_0 a$ 足够小 (见 (8.260)). 所以在情形 1, (14.115) 被

$$C_q\delta_0\int_0^t(1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \tag{14.118}$$

界定.

在情形 2, 设

$$\hat{E}_{s,m}=-\delta_1,\quad \delta_1>0 \tag{14.119}$$

用证明引理 8.11 的证明方法 (把 a 用 $2a$ 替代), 设

$$t_1=e^{\frac{1}{4a\delta_1}}-1 \tag{14.120}$$

然后我们考虑两种子情形:

子情形 2a: $t' \leqslant t_1$, 子情形 2b: $t' > t_1$.

在子情形 2a, 我们有下界 (8.273) (把 a 用 $2a$ 替代):

$$\bar{\mu}_m(t') \geqslant 1 - \frac{1}{a} \tag{14.121}$$

由于 $(1-\frac{1}{a})^{-2a-1}$ 当 $a \in [2,\infty)$ 是有界的, 如果 $t \leqslant t_1$, (14.115) 被

$$C_q\delta_0 \int_0^t (1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p \sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \tag{14.122}$$

界定, 并且如果 $t > t_1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} (1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p \bar{\mu}_m^{-2a-1}(t') \sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \\
\leqslant\ & C\int_0^{t_1} (1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p \sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt'
\end{aligned} \tag{14.123}$$

在子情形 2b, 我们有下界 (8.303) (把 a 用 $2a$ 代替):

$$\bar{\mu}_m(t') \geqslant (1-\frac{1}{a})(1-\delta_1\tau'), \quad \tau' = \log(1+t') \tag{14.124}$$

由 $\mathcal{G}_{0,[n];a,p}(t)$, $\mathcal{G}'_{1,[n];a,q}(t)$ 是 t 的非减函数, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t} (1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p \bar{\mu}_m^{-2a-1}(t') \sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \\
\leqslant\ & C\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \cdot \int_{t_1}^{t} (1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p (1-\delta_1\tau')^{-2a-1}dt'
\end{aligned} \tag{14.125}$$

(14.125) 中的积分为

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t} (1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p (1-\delta_1\tau')^{-2a-1}dt' \\
\leqslant\ & (1+t_1)^{-1/2}(1+\log(1+t_1))^p \int_{\tau_1}^{\tau} (1-\delta_1\tau')^{-2a-1}d\tau' \\
\leqslant\ & (1+t_1)^{-1/2}(1+\log(1+t_1))^p \frac{1}{2a\delta_1}(1-\delta_1\tau)^{-2a} \\
\leqslant\ & 2\varphi_{1+p}(4a\delta_1)(1-\delta_1\tau)^{-2a}
\end{aligned} \tag{14.126}$$

这里对任意实数 r 我们记 $\varphi_r(x)$ 为如下正实轴上的函数:

$$\varphi_r(x) = e^{-\frac{1}{2x}}(1+\frac{1}{x})^r \tag{14.127}$$

函数 $\varphi_r(x)$ 当 $x \to 0$ 时以指数速度递减到 0. 由于 $\delta_1 \leqslant C\delta_0$, 我们有

$$\varphi_r(4a\delta_1) \leqslant \varphi_r(Ca\delta_0) \tag{14.128}$$

前提是 $Ca\delta_0$ 足够小. 同样由下界 (8.314) (把 a 用 $2a$ 替代),

$$\bar{\mu}_m^{-2a}(t) \geqslant \frac{1}{C}(1-\delta_1\tau)^{-2a} \tag{14.129}$$

(14.125) 的右端被

$$C\varphi_{1+p}(Ca\delta_0)\bar{\mu}_m^{-2a}(t)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.130}$$

界定. 与 (14.123) 结合起来我们得到: 如果 $t > t_1$, (14.115) 被

$$\begin{aligned}&C_q\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(\varphi_{1+p}(Ca\delta_0)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\\&+\int_0^t(1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt')\end{aligned} \tag{14.131}$$

界定. 将这个与先前的结果 (14.122) (对子情形 $t \leqslant t_1$), (14.118)(对情形 1) 结合起来, 我们得出 (14.96) 通过 (14.65) 对 (14.63) 右端的贡献被

$$\begin{aligned}&C_q\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(\varphi_{1+p}(Ca\delta_0)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\\&+\int_0^t(1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt')\end{aligned} \tag{14.132}$$

界定.

现在我们考虑 ${}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)$ 的表达式 (14.66) 中第二项对 (14.65) 右端第一项的贡献, 即

$$C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^{3\,(i_1\cdots i_l)}Q_l(t')dt' \tag{14.133}$$

对 $\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计的贡献.

这里我们将用命题 10.5 中关于 $\max_{i_1\cdots i_l}{}^{(i_1\cdots i_l)}Q_l$ 的估计. 右端的主部为

$$C_l(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}^Q_{[l+1]}+\delta_0(\mathcal{W}^T_{[l+1]}+\mathcal{W}_{[l+2]})) \tag{14.134}$$

我们将估计该主部通过 (14.133) 对 (14.63) 右端的贡献.

对每个非负整数 n, 我们有

$$\mathcal{W}_{n+1} \leqslant C(1+t)\sqrt{\sum_{i_1\cdots i_n,\alpha}\|\not{d}R_{i_n}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|^2_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}} \leqslant C\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,n+1}} \tag{14.135}$$

从而

$$\mathcal{W}_{[l+2]} \leqslant C_l \bar{\mu}_m^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}} + \mathcal{W}_0 \tag{14.136}$$

由引理 5.1, 我们有

$$\mathcal{W}_0 \leqslant \sqrt{\epsilon_0} \max_{\alpha} \sup_{u \in [0,\epsilon_0]} \|\psi_\alpha\|_{L^2(S_{t,u})} \leqslant C\epsilon_0 \sqrt{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_0[\psi_\alpha]} = C\epsilon_0 \sqrt{\mathcal{E}_{0,[1]}} \tag{14.137}$$

类似地, 对每个非负整数 n 有

$$\mathcal{W}_{n+1}^T \leqslant C(1+t) \sqrt{\sum_{i_1 \cdots i_n, \alpha} \|\not{d} R_{i_n} \cdots R_{i_1} T\psi_\alpha\|^2_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}} \leqslant C\bar{\mu}_m^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}'_{1,n+2}} \tag{14.138}$$

从而

$$\mathcal{W}_{[l+1]}^T \leqslant C_l \bar{\mu}_m^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}} + \mathcal{W}_0^T \tag{14.139}$$

由引理 5.1 有

$$\mathcal{W}_0^T \leqslant \sqrt{\epsilon_0} \max_{\alpha} \sup_{u \in [0,\epsilon_0]} \|T\psi_\alpha\|_{L^2(S_{t,u})} \leqslant C\epsilon_0 \sqrt{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_0[T\psi_\alpha]} \leqslant C\epsilon_0 \sqrt{\mathcal{E}_{0,[2]}} \tag{14.140}$$

类似地, 我们有

$$\mathcal{W}_{[l+1]}^Q \leqslant C_l \bar{\mu}_m^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}} + \mathcal{W}_0^Q \tag{14.141}$$

再由引理 5.1, 我们有

$$\mathcal{W}_0^Q \leqslant \sqrt{\epsilon_0} \max_{\alpha} \sup_{u \in [0,\epsilon_0]} \|Q\psi_\alpha\|_{L^2(S_{t,u})} \leqslant C\epsilon_0 \sqrt{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_0[Q\psi_\alpha]} \leqslant C\epsilon_0 \sqrt{\mathcal{E}_{0,[2]}} \tag{14.142}$$

上述不等式意味着 (14.134) 被

$$C_l(1+t)^{-4}(1+\log(1+t))(\bar{\mu}_m^{-1/2} \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}} + C\epsilon_0 \sqrt{\mathcal{E}_{0,[2]}}) \tag{14.143}$$

界定, 所以 (14.134) 对 (14.133) 的贡献被

$$\begin{aligned} &C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2 \\ &\cdot \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))(\bar{\mu}_m^{-1/2}(t') \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')} + C\epsilon_0 \sqrt{\mathcal{E}_{0,[2]}(t')}) dt' \end{aligned} \tag{14.144}$$

界定. 我们首先估计上述最后一个因子中的主部, 即 $\bar{\mu}_m^{-1/2}(t') \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')}$. 由定义 (14.111), 我们有

$$\bar{\mu}_m^{-1/2}(t') \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^q \sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.145}$$

所以我们所考虑的贡献被

$$C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2 J_{a,q}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.146}$$

界定, 其中

$$J_{a,q}(t)=\int_0^t (1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^{q+1}dt' \tag{14.147}$$

为估计 $J_{a,q}(t)$, 像估计 (14.115) 中那样, 我们再次考虑出现在引理 8.11 中的两种情形.

在情形 1, 我们有下界 (14.116) 进而有 (14.117), 这意味着

$$\begin{aligned}
J_{a,q}(t) &\leqslant C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{q+1}dt' = C\int_0^\tau (1+\tau')^{q+1}d\tau' \\
&\leqslant \frac{C}{q+2}(1+\tau)^{q+2} = \frac{C}{q+2}(1+\log(1+t))^{q+2}
\end{aligned} \tag{14.148}$$

类似地, 在子情形 2a, 如果 $t\leqslant t_1$, 我们有

$$J_{a,q}(t)\leqslant \frac{C}{q+2}(1+\log(1+t))^{q+2} \tag{14.149}$$

而如果 $t>t_1$ 则有

$$J_{a,q}(t_1)\leqslant \frac{C}{q+2}(1+\log(1+t_1))^{q+2} < \frac{C}{q+2}(1+\log(1+t))^{q+2} \tag{14.150}$$

在子情形 2b, 我们有下界 (14.124), 这意味着

$$\begin{aligned}
&J_{a,q}(t)-J_{a,q}(t_1) \\
&\leqslant C(1+\log(1+t))^{q+1}\int_{t_1}^t (1-\delta_1\tau')^{-a-1/2}(1+t')^{-1}dt' \\
&= C(1+\tau)^{q+1}\int_{\tau_1}^\tau (1-\delta_1\tau')^{-a-1/2}d\tau' \leqslant \frac{C}{\delta_1}\frac{(1+\tau)^{q+1}}{a-\frac{1}{2}}(1-\delta_1\tau)^{-a+1/2} \\
&\leqslant \frac{C}{a\delta_1}(1+\tau)^{q+1}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)
\end{aligned} \tag{14.151}$$

其中在最后一步我们用到了 (8.312), 它意味着

$$\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)\geqslant \frac{1}{C}(1-\delta_1\tau)^{-a+1/2}$$

由于 $\tau\geqslant\tau_1=1/4a\delta_1$, (14.151) 意味着

$$J_{a,q}(t)-J_{a,q}(t_1)\leqslant C(1+\log(1+t))^{q+2}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t) \tag{14.152}$$

由 (14.149), (14.150), (14.152), 我们得出, 一般情形下有

$$J_{a,q}(t) \leqslant C(1+\log(1+t))^{q+2}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t) \tag{14.153}$$

所以 (14.146) 被

$$C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{q+4}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.154}$$

界定. 这就界定了通过 (14.133) 对

$$\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

的估计的贡献. 由 (14.114) 和 (14.90), 相应的对 (14.63) 右端的贡献被

$$C_l\delta_0\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{p+q+4}\bar{\mu}_m^{-2a-1/2}(t')\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \tag{14.155}$$

界定.

而这可以用与估计 (14.115) 相类似的方法来估计. 从而我们得到如下界:

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a+1/2}(t)(1+\log(1+t))^{2p}(\varphi'_{5+q-p}(Ca\delta_0)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\\&+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{4+q-p}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt')\end{aligned} \tag{14.156}$$

这里对任意实数 r 我们记 $\varphi'_r(x)$ 为如下定义在正实轴上的函数:

$$\varphi'_r(x) = e^{-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})^r \tag{14.157}$$

注意到 $\varphi'_r(x)$ 在 $x\to 0$ 时以指数速度递减到 0, 并且由于 $\delta_1 \leqslant C\delta_0$, 我们有

$$\varphi'_r(4a\delta_1) \leqslant \varphi'_r(Ca\delta_0)$$

前提是 $Ca\delta_0$ 足够小.

最后我们考虑关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}B_l(t)$ 的表达式 (14.66) 中最后一项对 (14.65) 右端第一项的贡献, 即, 来自于

$$C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2\|{}^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \tag{14.158}$$

对关于 $\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计的贡献. 由 (14.90) 和 (14.114), 相应的对 (14.63) 右端积分的贡献被

$$C\delta_0\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{p+2}\bar{\mu}_m^{-a-1}(t')\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')}dt' \tag{14.159}$$

界定. 同样这可以用与 (14.115) 相同的方法估计. 我们得到一个形如

$$\begin{aligned}&C_p\delta_0\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\bar{\mu}_m^{-a}(t)(\varphi'_{3+p}(Ca\delta_0)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}\\&+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2+p}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')}dt')\end{aligned} \tag{14.160}$$

的界. 考虑 (14.65) 右端最后一项的贡献, 我们注意到这一项被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')^2\bar{\mu}_m^a(t')B_l(t'))\bar{\mu}_m^{-a}(t) \tag{14.161}$$

界定. 所以相对于 $(1+t)^{2(i_1\cdots i_l)}B_l$ 我们还有一个额外的衰减因子 $C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4$, 所以这一项的贡献我们已经估计好了.

14.4.2 关于 (14.57) 的贡献的估计

我们现在考虑 (14.57) 对相应积分 (14.62) 的贡献. 回忆这个是与变分 (14.54) 相关的, 相应的贡献为

$$\begin{aligned}&\int_{W_{\epsilon_0}^t}\Omega|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu||T\psi_\alpha||\underline{L}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dt'dud\mu_{\not{g}}\\&\leqslant C\int_0^t\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}\\&\cdot\|\underline{L}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'\end{aligned} \tag{14.162}$$

其中 $m=0,\cdots,l$.

由 (9.60), (9.70) 和 (9.213), 我们有

$$\begin{aligned}&\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C(1+t)(\||^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(t)\||_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+\||^{(i_1\cdots i_{l-m})}\check{f}'_{m,l-m}(t)\||_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)})\\&=C((1+t)\||^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(t)\||_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}+{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'_{m,l-m}(t))\end{aligned} \tag{14.163}$$

将 (9.268) 和 (9.270) 代入, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C(1+t)((1+t)^{-1\,(i_1\cdots i_{l-m})}P'_{m,l-m}(t)+{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}B'_{m,l-m}(t))\\
&+C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2(\int_0^t(1+t')(1+\log(1+t'))B_l(t')dt'\\
&+\sum_{k=0}^m\int_0^t(1+\log(1+t'))B'_{k,l-k}(t')dt')
\end{aligned}\tag{14.164}$$

对 $m=0,\cdots,l$ 成立.

这里 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}B'_{m,l-m}(t)$ 由 (9.259) 定义:

$$\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}B'_{m,l-m}(t)\\
=\ & C(1+t)^{-1}({}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(0)}_{m,l-m,a}(t)+(1+t)^{-1/2\,(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(1)}_{m,l-m,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\\
&+C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^{2\,(i_1\cdots i_{l-m})}Q'_{m,l-m}(t')dt'\\
&+C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}
\end{aligned}\tag{14.165}$$

同样 (见 (9.261))

$$B'_{m,l-m}(t)=\max_{i_1\cdots i_{l-m}}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}B'_{m,l-m}(t)\tag{14.166}$$

${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(0)}_{m,l-m,a}(t)$, ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(1)}_{m,l-m,a}(t)$ 由 (9.215) 和 (9.216) 定义:

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(0)}_{m,l-m,a}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}(\bar{\mu}_m^a(t')^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(0)}_{m,l-m}(t'))\tag{14.167}$$

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(1)}_{m,l-m,a}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')^{1/2}\bar{\mu}_m^a(t')^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(1)}_{m,l-m}(t'))\tag{14.168}$$

${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(0)}_{m,l-m}(t)$, ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(1)}_{m,l-m}(t)$ 的定义见命题 11.6, 并且我们有

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'_{m,l-m}(t)\leqslant{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(0)}_{m,l-m}(t)+{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(1)}_{m,l-m}(t)\tag{14.169}$$

注意到 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(0)}_{m,l-m,a}(t)$, ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(1)}_{m,l-m,a}(t)$ 是非减的.

(14.164) 的主要贡献来自于 (14.164) 右端的第一项. 即, 来自于

$$(1+t)^{-1\,(i_1\cdots i_{l-m})}P'_{m,l-m}(t)$$

和关于 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}B'_{m,l-m}(t)$ 的表达式 (14.165) 右端的第一项. 所以这里我们考虑的是

$$C({}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(0)}_{m,l-m,a}(t)+(1+t)^{-1/2}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\bar{P}'^{(1)}_{m,l-m,a}(t))\bar{\mu}_m^{-a}(t) \tag{14.170}$$

实际的临界贡献来自于

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(0)}_{m,l-m}=|\ell|\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]} \tag{14.171}$$

我们将用 (14.89) 来估计 (14.171) 通过 (14.167), (14.170) 和 (14.165) 对 (14.162) 右端的临界贡献. 另一方面, 为了估计其他项通过 (14.165) 对同一个积分的贡献, 我们只需运用 (14.90).

对非负实数 a 和 p, 我们定义

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t)\\=&\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\sum_\alpha \mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t'))\end{aligned} \tag{14.172}$$

这些量是 t 的非减函数, 我们有

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t')}\\&\leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^p\sqrt{{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t)}\end{aligned} \tag{14.173}$$

对 $t'\in[0,t]$ 成立, 所以由 (14.167), (14.171) 对 (14.170) 的临界贡献被

$$|\ell|\bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t)} \tag{14.174}$$

界定. 同样, 考虑 (14.162) 右端积分的最后一个因子, 我们有

$$\begin{aligned}&\|\underline{L}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant\sqrt{\mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)}\\&\leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t)}\end{aligned} \tag{14.175}$$

将 (14.89), (14.174) 和 (14.175) 代入 (14.162) 右端的积分中, 因子 $|\ell|$ 抵消, 并且我们得到对积分的临界贡献被

$$\begin{aligned}&C\int_0^t(\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)+C\bar{\mu}_m^{-1}\delta_0(1+t')^{-2}(1+\log(1+t')))\\&\cdot\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2p}\,{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t')dt'\end{aligned} \tag{14.176}$$

界定. 这里第一个因子中的第二项的贡献实际上不是临界的. 我们将在估计

$$\begin{aligned} & C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]} \\ & +C(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^{3/2}\sqrt{\sum_{\alpha,j}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha]} \end{aligned} \quad (14.177)$$

对命题 11.6 中表达式 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}P'^{(1)}_{m,l-m}$ 的贡献时处理这一项. 现在我们将注意力集中在临界积分

$$C\int_0^t \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2p(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t')dt' \quad (14.178)$$

这个可以用与处理 (14.97) 相同的方法来估计. 我们得到这一项被 (见 (14.102) 和 (14.107))

$$C(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2p})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t) \quad (14.179)$$

界定.

我们接下来估计对 (14.162) 右端的余下贡献. 我们首先考虑来自于 (14.179) 的贡献. 由定义 (14.110) 和 (14.111), 我们有

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t')} \\ \leqslant & \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^q\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \\ & \sqrt{\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha](t')} \\ \leqslant & \sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^q\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \end{aligned} \quad (14.180)$$

对 $t'\in[0,t]$ 成立, 所以由定义 (14.168), (14.177) 对 (14.170) 的贡献被

$$C_q(1+t)^{-1/2}\bar{\mu}_m^{-a}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \quad (14.181)$$

界定. 同样, 我们有

$$\|\underline{L}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \quad (14.182)$$

由 (14.90) 我们得出 (14.177) 通过 (14.164) 对 (14.162) 右端积分的贡献被

$$C_q\delta_0\int_0^t(1+t')^{-3/2}(1+\log(1+t'))^p\bar{\mu}_m^{-2a-1}(t')\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \tag{14.183}$$

界定. 这个形式上与 (14.115) 相同, 所以它被 (14.122) 界定.

接下来我们考虑 (14.165) 的第二项对 (14.164) 右端第一项的贡献, 即来自于

$$C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2\int_0^t(1+t')^{2(i_1\cdots i_{l-m})}Q'_{m,l-m}(t')dt' \tag{14.184}$$

对关于 $\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not\Delta\mu\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 估计的贡献. 这里我们将运用命题 11.5, 即关于 $\max_{i_1\cdots i_{l-m}}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Q'_{m,l-m}$ 的贡献. 其主部为

$$C_l(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+2\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}}) \tag{14.185}$$

我们将估计这个主部通过 (14.184) 和 (14.164) 对 (14.162) 右端积分的贡献.

对每对非负整数 m,n, 我们有

$$\mathcal{W}_{m,n+1}\leqslant C(1+t)\sqrt{\sum_{i_1\cdots i_n,\alpha}\|\not d R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m\psi_\alpha\|^2_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}}\leqslant C\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,m+n+1}} \tag{14.186}$$

以及对每个非负整数 m, 我们有

$$\mathcal{W}_{m+1,0}\leqslant\sqrt{\sum_\alpha\|(T)^{m+1}\psi_\alpha\|^2_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}}\leqslant C\sqrt{\mathcal{E}_{0,m+1}} \tag{14.187}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\{l+2\}}=\sum_{n+m\leqslant l+2}\mathcal{W}_{m,n}&=\sum_{n+m\leqslant l+1}\mathcal{W}_{m,n+1}+\sum_{m\leqslant l+1}\mathcal{W}_{m+1,0}+\mathcal{W}_0\\&\leqslant C_l(\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}}+\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}})+\mathcal{W}_0\end{aligned} \tag{14.188}$$

类似地, 我们有

$$\mathcal{W}^Q_{\{l+1\}}\leqslant C_l(\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}}+\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}})+\mathcal{W}^Q_0 \tag{14.189}$$

$$\mathcal{W}^{QQ}_{\{l\}}\leqslant C_l(\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}}+\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}})+\mathcal{W}^{QQ}_0 \tag{14.190}$$

然后我们得出 (14.185) 被

$$C_l(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}}+\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}}) \tag{14.191}$$

界定 (因为我们可以假设 $l \geqslant 1$). 从而 (14.185) 对 (14.184) 的贡献被

$$\begin{aligned}&C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2\\&\cdot\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))(\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')}+\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')})dt'\end{aligned} \tag{14.192}$$

界定. 由定义 (14.109) 有

$$\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \tag{14.193}$$

这个与 (14.145) 意味着 (14.192) 被 (见定义 (14.147))

$$C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2(J_{a,q}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}+J_{a-1/2,p}(t)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}) \tag{14.194}$$

界定. 代入 (14.153) ((a,q) 被 $(a-\frac{1}{2},p)$ 替代), 我们得出 (14.185) 通过 (14.184) 对关于

$$\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$$

的估计的贡献被

$$\begin{aligned}&C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{q+4}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\\&+C_l(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{p+4}\bar{\mu}_m^{-a+1}(t)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}\end{aligned} \tag{14.195}$$

界定. 由 (14.182) 和 (14.90), 与 (14.162) 右端积分相对应的贡献被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{p+q+4}\bar{\mu}_m^{-2a-1/2}(t')\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt'\\&+C_l\delta_0\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2p+4}\bar{\mu}_m^{-2a}(t')\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')dt'\end{aligned} \tag{14.196}$$

界定. (14.196) 右端第一项与 (14.155) 相同, 并且被 (14.156) 估计, 而第二项则用类似的方法估计:

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a+1}(1+\log(1+t))^{2p}(\varphi'_5(Ca\delta_0)\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\\&+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^4\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')dt')\end{aligned} \tag{14.197}$$

现在考虑 (14.167) 中最后一项对 (14.164) 右端第一项的贡献, 即来自于下式的贡献:

$$C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^2\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \tag{14.198}$$

由 (14.182) 和 (14.90), 我们考虑的贡献被

$$\begin{aligned}&C\delta_0\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\&\cdot\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{p+2}\bar{\mu}_m^{-a-1}(t')\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')}dt'\end{aligned} \tag{14.199}$$

界定. 这与 (14.159) 类似, 被

$$\begin{aligned}&C_p\delta_0\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\bar{\mu}_m^{-a}(t)(\varphi'_{3+p}(Ca\delta_0)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}\\&+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2+p}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')}dt')\end{aligned} \tag{14.200}$$

界定. (14.164) 右端最后一项的贡献被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4\\&\cdot(\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')^2\bar{\mu}_m^a(t')B_l(t'))+\sum_{k=0}^m\sup_{t'\in[0,t]}((1+t')\bar{\mu}_m^a(t')B'_{k,l-k}))\bar{\mu}_m^{-a}(t)\end{aligned} \tag{14.201}$$

界定. 相对于 $(1+t)^{2(i_1\cdots i_l)}B_l$ 和 $(1+t)^{(i_1\cdots i_{l-m})}B'_{m,l-m}$, 这里有一个额外的衰减因子 $C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^4$, 所以这一项的贡献已经估计好了.

14.5 与 K_1 相关的临界估计

14.5.1 关于 (14.56) 的贡献的估计

我们现在考虑 (14.56) 对相应积分 (14.59) 的贡献. 回忆这个与变分 (14.52) 相关, 相应的贡献为

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)\Omega(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(T\psi_\alpha)((L+\nu)R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)dt'du'd\mu_{\not{g}} \tag{14.202}$$

这里直接用 $\mathcal{F}'_1[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha]$ 不能得到一个合适的估计. 进而我们用另外一种方式. 首先, 由于

$$\tilde{\not{g}}=\Omega\not{g},\quad d\mu_{\tilde{\not{g}}}=\Omega d\mu_{\not{g}}$$

积分 (14.202) 为

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')((L+\nu)R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)dt'du'd\mu_{\tilde{g}} \tag{14.203}$$

对任意函数 f, 考虑积分

$$\int_{W_u^t}(Lf+2\nu f)dt'du'd\mu_{\tilde{g}}$$

设

$$F(t,u)=\int_{S_{t,u}}fd\mu_{\tilde{g}} \tag{14.204}$$

则我们有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\int_{S_{t,u}}(Lf+2\nu f)d\mu_{\tilde{g}} \tag{14.205}$$

我们在第五章已经用到了这个公式, 所以有

$$\begin{aligned}\int_{W_u^t}(Lf+2\nu f)dt'du'd\mu_{\tilde{g}}&=\int_0^u\int_0^t\frac{\partial F}{\partial t'}(t',u')dt'du'\\&=\int_0^u(F(t,u')-F(0,u'))du'=\int_{\Sigma_t^u}fdu'd\mu_{\tilde{g}}-\int_{\Sigma_0^u}fdu'd\mu_{\tilde{g}}\end{aligned} \tag{14.206}$$

回到 (14.203), 我们将被积函数写成

$$\begin{aligned}&-(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')((L+\nu)R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)\\&=-(L+2\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha))\\&\quad+(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'))\end{aligned}$$

在 (14.206) 中将 f 取成 $(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)$, 我们得到 (14.203) 等于

$$\begin{aligned}&-\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{g}}\\&+\int_{\Sigma_0^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{g}}\\&+\int_{W_u^t}(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'))dt'du'd\mu_{\tilde{g}}\end{aligned} \tag{14.207}$$

我们首先考虑超曲面上的积分

$$-\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{g\!\!/}} \tag{14.208}$$

(另一个超曲面上的积分可以用初值表示). 设 f, g 是任意定义在 $S_{t,u}$ 上的函数, X 是 $S_{t,u}$ 上的任意一个切向量场. 我们有

$$\int_{S_{t,u}} f(Xg)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} = \int_{S_{t,u}} X(fg)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} - \int_{S_{t,u}} g(Xf)d\mu_{\tilde{g\!\!/}}$$

和

$$\int_{S_{t,u}} X(fg)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} = \int_{S_{t,u}} \tilde{\mathrm{d\!/iv}}(fgX)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} - \int_{S_{t,u}} (\tilde{\mathrm{d\!/iv}}X)fgd\mu_{\tilde{g\!\!/}}$$

由于

$$\int_{S_{t,u}} \tilde{\mathrm{d\!/iv}}(fgX)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} = 0, \quad \tilde{\mathrm{d\!/iv}}X = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,{}^{(X)}\tilde{\pi\!\!/}$$

我们得到

$$\int_{S_{t,u}} f(Xg)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} = -\int_{S_{t,u}} (g(Xf) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,{}^{(X)}\tilde{\pi\!\!/}fg)d\mu_{\tilde{g\!\!/}} \tag{14.209}$$

运用 (14.209), 取

$$X = R_{i_{l+1}}, \quad g = R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi', \quad f = (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)$$

我们得出 (14.208) 等于下述和式:

$$H_0 + H_1 + H_2 \tag{14.210}$$

其中

$$H_0 = \int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{g\!\!/}} \tag{14.211}$$

$$H_1 = \int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(R_{i_{l+1}}T\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{g\!\!/}} \tag{14.212}$$

$$\begin{aligned}H_2 = \int_{\Sigma_t^u}&(T\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}(\omega/\nu)\\&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,{}^{(R_{i_{l+1}})}\tilde{\pi\!\!/}(\omega/\nu))du'd\mu_{\tilde{g\!\!/}}\end{aligned} \tag{14.213}$$

现在由命题 12.9 和推论 10.1.d (取 $l=1$), 注意到 ω 在 $S_{t,u}$ 上为常数, 我们有

$$(\nu/\omega)|R_{i_{l+1}}(\omega/\nu)| + \frac{1}{2}|\mathrm{tr}^{(R_{i_{l+1}})}\tilde{\not\pi}| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{14.214}$$

从而 H_2 相对于 H_1 有一个额外的衰减因子 $\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$. 所以我们可以将注意力集中在 H_0 和 H_1.

我们首先考虑 H_0. 我们有

$$|H_0| \leqslant C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)^3|T\psi_\alpha||R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}} \tag{14.215}$$

虽然由命题 12.11, 我们有一个关于 $R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'$ 的 L^2 估计, 这里我们需要一个更精确的估计. 由于

$$\begin{aligned}L\mathrm{tr}\chi' &= \mathrm{tr}(\not{\mathcal{L}}_L\chi') - 2\mathrm{tr}(\chi\cdot\chi') \\ &= \mathrm{tr}(\not{\mathcal{L}}_L\chi') - \frac{2}{1-u+t}\mathrm{tr}\chi' - 2|\chi'|^2\end{aligned} \tag{14.216}$$

对 (12.47) 取迹, 我们得到

$$L\mathrm{tr}\chi' + \frac{2}{1-u+t}\mathrm{tr}\chi' = \rho_0 \tag{14.217}$$

其中

$$\rho_0 = e\mathrm{tr}\chi - |\chi'|^2 + \mathrm{tr}b \tag{14.218}$$

将 $R_{i_l}\cdots R_{i_1}$ 作用到这个方程并且用引理 11.22, 我们得到如下传输方程:

$$LR_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' + \frac{2}{1-u+t}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' = {}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l \tag{14.219}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l = R_{i_l}\cdots R_{i_1}\rho_0 + \sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(R_{i_{l-k}})}ZR_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' \tag{14.220}$$

显然 ρ_0 的主部包含在 $-\mathrm{tr}\alpha'$ 中, 它为 $\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\not{\Delta}h$. 我们可以将这个写得更精确一些:

$$\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\not{\Delta}h = \frac{1}{2}\frac{dH}{dh}(\not{\Delta}\psi_0 - \sum_i\psi_i\not{\Delta}\psi_i - \sum_i\not{d}\psi_i\cdot\not{d}\psi_i)$$

所以这一项可以表示为

$$-R_{i_l}\cdots R_{i_1}(\mathrm{tr}\alpha'^{[P]})=\frac{1}{2}R_{i_l}\cdots R_{i_1}[\frac{dH}{dh}(\not\Delta\psi_0-\sum_i\psi_i\not\Delta\psi_i-\sum_i\not d\psi_i\cdot\not d\psi_i)]$$
$$=m_T^\alpha R_{i_l}\cdots R_{i_1}\not\Delta\psi_\alpha+{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{n}_l \tag{14.221}$$

这里 m_T^α 在第十章中定义并且 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{n}_l$ 是一个低阶项 ($l+1$ 阶):

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{n}_l=\sum_{|s_1|>0}((R)^{s_1}m_T^\alpha)((R)^{s_2}\not\Delta\psi_\alpha)+R_{i_l}\cdots R_{i_1}\tilde{n}_0 \tag{14.222}$$

其中

$$\tilde{n}_0=-\frac{1}{2}\frac{dH}{dh}\sum_i\not d\psi_i\cdot\not d\psi_i \tag{14.223}$$

由连续性假设, 我们有

$$\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{n}_l\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-3}\mathcal{W}_{\{l+1\}} \tag{14.224}$$

由 (10.185) 有

$$|m_T^0-\frac{1}{2}\ell|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1},\quad |m_T^i|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{14.225}$$

定义函数

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}=\frac{1}{2}\ell\not\Delta R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_0 \tag{14.226}$$
$${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}=(m_T^0-\frac{1}{2}\ell)\not\Delta R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_0+m_T^i\not\Delta R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_i \tag{14.227}$$

将 (14.221) 表达为

$$-R_{i_l}\cdots R_{i_1}(\mathrm{tr}\alpha'^{[P]})={}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{n}_l \tag{14.228}$$

设 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(2)}$ 有

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l={}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}+{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(2)} \tag{14.229}$$

我们将估计 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(2)}$ 的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 首先我们估计来自

$$\sum_{k=0}^{l-1}R_{i_l}\cdots R_{i_{l-k+1}}{}^{(R_{i_{l-k}})}ZR_{i_{l-k-1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'$$

的贡献. 很明显, 这个贡献被

$$(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\mathcal{A}'_{[l]}(t) \tag{14.230}$$

界定, 其中我们用到了推论 10.1.i 中关于 ${}^{(R_i)}Z$ 的估计.

接下来我们将估计来自于 $R_{i_l}\cdots R_{i_1}\rho_0$ 的贡献. 回忆定义

$$\rho_0 = e\mathrm{tr}\chi' + \frac{2e}{1-u+t} - |\chi'|^2 - \mathrm{tr}\alpha'$$

由命题 12.6, (12.293) 和 (12.295), 上述第一项的贡献被

$$C_l(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))\mathcal{W}^Q_{\{l\}} + \delta_0(1+t)^{-3}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]} + \mathcal{W}_{[l]}) \tag{14.231}$$

界定. 同样由 (12.295), 第二项的贡献被

$$C_l(1+t)^{-2}(\mathcal{W}^Q_{\{l\}} + \delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]} + \mathcal{W}_{\{l\}})) \tag{14.232}$$

界定. 由命题 12.6, 第三项的贡献被

$$(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{A}'_{[l]} + \delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\cdot(\mathcal{W}_{[l]} + \mathcal{Y}_0)) \tag{14.233}$$

界定, 其中我们用到了推论 10.2.d.

最后, 由 $\alpha^{[N]}_{AB}$ 的表达式和推论 10.1.g 以及推论 10.2.g, 第四项的贡献被

$$(1+t)^{-3}(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \mathcal{W}^Q_{\{l\}} + (1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]})) \tag{14.234}$$

界定. 所以我们得到了如下关于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho^{(2)}_l$ 估计:

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho^{(2)}_l\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_t)}\\ \leqslant\ & C_l(1+t)^{-2}\mathcal{W}^Q_{\{l\}} + \delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}} + \mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]})\end{aligned} \tag{14.235}$$

另一方面, 由 **H1**, 我们有

$$|{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho^{(0)}_l| \leqslant C(1+t)^{-1}|\ell|\sqrt{\sum_{j,\alpha}|\not{d}R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|^2} \tag{14.236}$$

和

$$|{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho^{(1)}_l| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}\sqrt{\sum_{j,\alpha}|\not{d}R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|^2} \tag{14.237}$$

这些不等式意味着

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C|\ell|(1+t)^{-2}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)} \quad (14.238)$$

和

$$\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)} \quad (14.239)$$

而我们有

$$\|\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C|\ell|(1+t)^{-2}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)} \quad (14.240)$$

和

$$\|\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)} \quad (14.241)$$

我们将传输方程 (14.219) 在声学坐标 (t,u,ϑ) 下表示, 所以 L 变为 $\frac{\partial}{\partial t}$, 再将它沿着 L 的积分曲线从 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 开始积分, 从而得到

$$\begin{aligned}&(1-u+t)^2(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(t,u,\vartheta)\\ =&(1-u)^2(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(0,u,\vartheta)+\int_0^t(1-u+t')^{2(i_1\cdots i_l)}\rho_l(t',u,\vartheta)dt'\end{aligned} \quad (14.242)$$

所以我们有

$$\begin{aligned}&|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'|(t,u,\vartheta)\\ \leqslant& C(1+t)^{-2}(|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'|(0,u,\vartheta)+\sum_{k=0}^{2}{}^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}(t,u,\vartheta))\end{aligned} \quad (14.243)$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_l)}A^{(k)}(t,u,\vartheta)=\int_0^t(1+t')^2|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(k)}|(t',u,\vartheta)dt', \quad k=0,1,2 \quad (14.244)$$

由 (8.333), 我们有

$$\begin{aligned}\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)} &\leqslant \int_0^t(1+t')^2\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(k)}(t')\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}dt'\\ &\leqslant C\int_0^t(1+t')\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(k)}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'\end{aligned} \quad (14.245)$$

现在将逐点估计 (14.243) 代入 (14.215). 临界贡献来自于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}$. 这个贡献是如下临界积分:

$$C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|T\psi_\alpha||^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}||\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}} \tag{14.246}$$

回忆第八章中对 $[0,\epsilon_0]\times S^2$ 分解: $\mathcal{V}_{s-}$, $\mathcal{V}_{s+}$, 它们分别由 (8.337) 和 (8.338) 定义, 我们将分别考虑定义在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上分别与区域 $\mathcal{U}_{s,t}^-$ 和 $\mathcal{U}_{s,t}^+$ 对应的积分:

$$\mathcal{U}_{s,t}^-=\{(t,u,\vartheta)\in\Sigma_t^{\epsilon_0},\quad (u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s-}\} \tag{14.247}$$

$$\mathcal{U}_{s,t}^+=\{(t,u,\vartheta)\in\Sigma_t^{\epsilon_0},\quad (u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}\} \tag{14.248}$$

我们首先考虑在 $\mathcal{U}_{s,t}^-$ 的积分. 由 (8.333), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{U}_{s,t}^-}(1+t)|T\psi_\alpha||^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}||\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\ \leqslant&(1+t)\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^-}|T\psi_\alpha|\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}\|_{L^2(\mathcal{U}_{s,t}^-)}\|\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant&C(1+t)\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^-}|T\psi_\alpha|\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s-})}\sqrt{\mathcal{E}_1'[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)}\end{aligned} \tag{14.249}$$

现在由 (14.87) 和 (14.88), 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上有

$$\max_\alpha|T\psi_\alpha|\leqslant\frac{C}{|\ell|}(|L\mu|+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))) \tag{14.250}$$

在估计 $\mathcal{U}_{s,t}^-$ 上面的积分时, 我们可以假设 $\mathcal{V}_{s-}$ 非空, 回忆定义 (8.251) 和 (8.261) 有

$$\min_{(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s-}}\hat{E}_s(u,\vartheta)=\hat{E}_{s,m}=-\delta_1,\quad \delta_1>0 \tag{14.251}$$

现在由命题 8.6, 我们有

$$(L\mu)(t,u,\vartheta)=\mu_{[1],s}(u,\vartheta)(\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)}{1+t}+\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)) \tag{14.252}$$

从而

$$\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^-}|L\mu|\leqslant C(\frac{\delta_1}{1+t}+\frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{(1+t)^2}) \tag{14.253}$$

所以代入 (14.250) 有

$$\max_\alpha\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^-}|T\psi_\alpha|\leqslant\frac{C}{|\ell|}(\frac{\delta_1}{1+t}+\frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{(1+t)^2}) \tag{14.254}$$

另一方面, 由 (14.245) ($k=0$ 时) 和 (14.238) 有

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\ \leqslant\ & C|\ell|\int_0^t (1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')}dt' \end{aligned} \tag{14.255}$$

将 (14.254) 和 (14.255) 代入 (14.249), 因子 $|\ell|$ 抵消, 我们得到 (14.249) 被

$$\begin{aligned}&C\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)(\delta_1+\frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{1+t})\sqrt{\mathcal{E}_1'[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)}\\ &\cdot\int_0^t (1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')}dt' \end{aligned} \tag{14.256}$$

界定. 现在定义

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'(t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t))^{-2q}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'(R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(t')) \tag{14.257}$$

则 (14.256) 被

$$\begin{aligned}&C(1+\log(1+t))^{2q}\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t)(\delta_1+\frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{1+t})\\ &\cdot\int_0^t \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'}\cdot{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'(t)\end{aligned} \tag{14.258}$$

界定. 为了估计 (14.258) 中的积分, 我们用类似于证明引理 8.11 的方法. 由于我们假设 $\mathcal{V}_{s-}$ 非空, 我们只需考虑情形 2. 像 (8.267) 中那样设

$$t_1=e^{\frac{1}{2a\delta_1}}-1$$

像引理 8.11 那样, 在情形 2 时我们有两种子情形需要考虑. 在子情形 2a, 下界 (8.273) 成立, 所以有 $\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\leqslant C$ 以及

$$\int_0^t \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'}\leqslant C\int_0^t\frac{dt'}{1+t'}=C\log(1+t) \tag{14.259}$$

从而

$$\begin{aligned}&(\delta_1+\frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{1+t})\int_0^t \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'}\\ \leqslant\ & C(\delta_1\log(1+t)+C\delta_0\frac{(1+\log(1+t))^2}{1+t})\leqslant\frac{C}{a}\end{aligned} \tag{14.260}$$

因为在子情形 2a 有

$$\delta_1 \log(1+t) \leqslant \delta_1 \log(1+t_1) = \frac{1}{2a}$$

而

$$\frac{(1+\log(1+t))^2}{1+t} \leqslant C \quad 且 \quad C\delta_0 \leqslant \frac{1}{a}$$

在子情形 2b, 我们首先估计来自于

$$\int_0^{t_1} \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'} \leqslant C\log(1+t_1) = \frac{C}{2a\delta_1}$$

对 (14.260) 左端的贡献. 从而这个贡献被 (注意到 $t \geqslant t_1$)

$$\begin{aligned}(\delta_1 + C\delta_0\frac{(1+\log(1+t))}{1+t})\frac{C}{2a\delta_1} &\leqslant (\delta_1 + C\delta_0\frac{(1+\log(1+t_1))}{1+t_1})\frac{C}{2a\delta_1} \\ \leqslant \frac{C}{2a}(1+\frac{C\delta_0}{\delta_1}(1+\frac{1}{2a\delta_1})e^{-\frac{1}{2a\delta_1}}) &\leqslant \frac{C}{2a}(1+C\varphi_2'(2a\delta_1)) \leqslant \frac{C}{a} \qquad (14.261)\end{aligned}$$

界定 (见 14.157)). 接下来我们估计来自于

$$\int_{t_1}^{t} \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'} \qquad (14.262)$$

的贡献. 由下界 (8.303),

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'} &\leqslant C\int_{\tau_1}^{\tau}(1-\delta_1\tau')^{-a-1/2}d\tau' \\ &\leqslant \frac{C}{\delta_1}\frac{(1-\delta_1\tau)^{-a+1/2}}{a-1/2} \leqslant \frac{C}{\delta_1}\frac{\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)}{a-1/2} \qquad (14.263)\end{aligned}$$

其中在最后一步我们用到了 (8.312). 所以 (14.262) 对 (14.260) 左端的贡献被

$$\begin{aligned}&(\delta_1 + C\delta_0\frac{(1+\log(1+t))}{1+t})\frac{C}{\delta_1}\frac{\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)}{a-1/2} \\ &\leqslant \frac{C\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)}{a-1/2}(1+\frac{C\delta_0}{\delta_1}\frac{(1+\log(1+t_1))}{1+t_1}) \\ &\leqslant \frac{C\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)}{a-1/2}(1+C\varphi_2'(2a\delta_1)) \leqslant \frac{C\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)}{a-1/2} \qquad (14.264)\end{aligned}$$

界定. 将两种子情形的结论 (14.260) 和 (14.264) 结合起来, 我们得到在一般情形下有

$$(\delta_1 + C\delta_0\frac{(1+\log(1+t))}{1+t})\int_0^t \bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')\frac{dt'}{1+t'} \leqslant C\frac{\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)}{a-1/2} \qquad (14.265)$$

所以 (14.258), 从而 (14.256) 以及 (14.249) 左端的积分被

$$\frac{C}{a-1/2}\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}(t) \tag{14.266}$$

界定.

我们现在考虑在 $\mathcal{U}_{s,t}^+$ 上的积分:

$$\int_{\mathcal{U}_{s,t}^+}(1+t)|T\psi_\alpha|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}|\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}} \tag{14.267}$$

我们按如下方式估计:

$$\begin{aligned}
&(1+t)\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^+}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)\|\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}\|_{L^2(\mathcal{U}_{s,t}^+)}\|\mu^{1/2}\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C(1+t)\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^+}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)\|(\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)})(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\sqrt{\mathcal{E}_1'[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)}
\end{aligned} \tag{14.268}$$

由于由命题 8.6, 在 $\mathcal{U}_{s,t}^+$ 中我们有 $\mu \geqslant C^{-1}$, 则估计 (14.250) 意味着

$$\max_\alpha \sup_{\mathcal{U}_{s,t}^+}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|) \leqslant \frac{C}{|\ell|}(\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^+}(\mu^{-1}|L\mu|)+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))) \tag{14.269}$$

定义

$$\hat{E}_{s,M} = \max_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2}\hat{E}_s(u,\vartheta) \tag{14.270}$$

设

$$\delta_2 = \hat{E}_{s,M} \tag{14.271}$$

在估计 (14.269) 时我们可以设 $\delta_2 > 0$. 由命题 8.6, 我们有

$$\mu^{-1}L\mu = \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}+\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)} \tag{14.272}$$

由于在 $\mathcal{V}_{s+}$ 中我们有 $\hat{E}_s(u,\vartheta)\geqslant 0$, 所以 (14.272) 意味着在 $\mathcal{U}_{s,t}^+$ 中有

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}|L\mu| &\leqslant \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}+|\hat{Q}_{1,s}(t,u,\vartheta)|}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)-|\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)|}\\
&\leqslant \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)-C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))}\\
&\leqslant \frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)-C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))}\\
&\quad +C'\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}
\end{aligned} \tag{14.273}$$

其中

$$\eta=\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)\geqslant 0,\quad \epsilon=C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))>0$$

我们有

$$\frac{1}{1+\eta-\epsilon}=\frac{1}{1+\eta}+\frac{\epsilon}{(1+\eta-\epsilon)(1+\eta)}\leqslant\frac{1}{1+\eta}+C\epsilon$$

然后由于

$$\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}\epsilon\leqslant C''\delta_0^2(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

所以 (14.273) 意味着在 $\mathcal{U}_{s,t}^{+}$ 中有

$$\mu^{-1}|L\mu|\leqslant\frac{\hat{E}_s(u,\vartheta)(1+t)^{-1}}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)}+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\tag{14.274}$$

(14.274) 右端第一项为

$$\frac{1}{(1+t)\log(1+t)}\frac{\eta}{1+\eta}\tag{14.275}$$

这是一个关于 η 的增函数, 在 $\mathcal{U}_{s,t}^{+}$ 中当 η 取到在 $\mathcal{V}_{s+}$ 中最大值

$$\eta_M=\delta_2\log(1+t)\tag{14.276}$$

时取到最大值. 从而 (14.277) 在 $\mathcal{U}_{s,t}^{+}$ 中的上确界为

$$\frac{1}{(1+t)\log(1+t)}\frac{\eta_M}{1+\eta_M}=\frac{1}{1+t}\frac{\delta_2}{1+\delta_2\log(1+t)}\tag{14.277}$$

所以有

$$\sup_{\mathcal{U}_{s,t}^{+}}\mu^{-1}|L\mu|\leqslant\frac{1}{1+t}\frac{\delta_2}{1+\delta_2\log(1+t)}+C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{(1+t)^2}\tag{14.278}$$

将这个代入 (14.269) 得到 (14.268) 中的结果, 我们得出积分 (14.267) 被

$$\begin{aligned}&\frac{C}{|\ell|}(\frac{\delta_2}{1+\delta_2\log(1+t)}+C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{1+t})\\&\cdot\|\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)}(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\sqrt{\mathcal{E}_1'[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)}\end{aligned}\tag{14.279}$$

界定. 现在由 (14.244) ($k=0$), 我们有

$$(\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)})(t,u,\vartheta)=\int_0^t(1+t')^2(\frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu(t',u,\vartheta)})^{1/2}|(\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)})(t',u,\vartheta)|dt' \tag{14.280}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\|(\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)})(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}\\
\leqslant&\int_0^t(1+t')^2(\sup_{(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}}(\frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu(t',u,\vartheta)}))^{1/2}\|(\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)})(t')\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})}dt'\\
\leqslant&C\int_0^t(1+t')(\sup_{(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}}(\frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu(t',u,\vartheta)}))^{1/2}\|\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'
\end{aligned} \tag{14.281}$$

其中在最后一步我们用到了 (8.333). 由命题 8.6, 我们有对 $(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu(t',u,\vartheta)}&=\frac{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+\hat{Q}_{0,s}(t,u,\vartheta)}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t')+\hat{Q}_{0,s}(t',u,\vartheta)}\\
&\leqslant\frac{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t')-C\delta_0(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))}
\end{aligned} \tag{14.282}$$

由于

$$C\delta_0\frac{1+\log(1+t')}{1+t'}\leqslant C\delta_0\leqslant\frac{1}{2}$$

(14.282) 右端的分母为

$$\geqslant\frac{1}{2}+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t')\geqslant\frac{1}{2}(1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t'))$$

类似地, 由于

$$C\delta_0\frac{1+\log(1+t)}{1+t}\leqslant C\delta_0\leqslant\frac{1}{2}$$

(14.282) 右端的分子为

$$\frac{3}{2}+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)\leqslant\frac{3}{2}(1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t))$$

所以对于 $(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}$ 有如下关系成立:

$$\frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu(t',u,\vartheta)}\leqslant3\frac{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t)}{1+\hat{E}_s(u,\vartheta)\log(1+t')} \tag{14.283}$$

现在对 $a > b > 0, x \geqslant 0$, 函数

$$f(x) = \frac{1+ax}{1+bx}$$

是关于 x 的增函数. 所以取 $a = \log(1+t)$, $b = \log(1+t')$, $x = \hat{E}_s(u,\vartheta)$, 当 x 在 $\mathcal{V}_{s+}$ 中取到最大值 δ_2 时, (14.283) 取到它在 $\mathcal{V}_{s+}$ 中的最大值. 所以

$$\sup_{(u,\vartheta)\in\mathcal{V}_{s+}} \frac{\mu(t,u,\vartheta)}{\mu(t',u,\vartheta)} \leqslant 3\frac{1+\delta_2\log(1+t)}{1+\delta_2\log(1+t')} \tag{14.284}$$

将这个和 (14.240) 代入 (14.241), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|(\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}A_l^{(0)})(t)\|_{L^2(\mathcal{V}_{s+})} \\
\leqslant & C|\ell|\int_0^t \sqrt{\frac{1+\delta_2\log(1+t)}{1+\delta_2\log(1+t')}}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')}\frac{dt'}{1+t'} \\
\leqslant & C|\ell|\sqrt{{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}}\int_0^t \sqrt{\frac{1+\delta_2\log(1+t)}{1+\delta_2\log(1+t')}}(1+\log(1+t'))^q\bar{\mu}_m^{-a}(t')\frac{dt'}{1+t'} \\
\leqslant & C|\ell|\bar{\mu}_m^{-a}(t)\sqrt{{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}}\int_0^t \sqrt{\frac{1+\delta_2\log(1+t)}{1+\delta_2\log(1+t')}}(1+\log(1+t'))^q\frac{dt'}{1+t'}
\end{aligned} \tag{14.285}$$

其中最后一步我们用到了如下事实: 由引理 8.11 的推论 2, 我们有 $\bar{\mu}_m^{-a}(t') \leqslant C\bar{\mu}_m^{-a}(t)$. 将 (14.285) 代入 (14.279) 并注意到

$$\sqrt{\mathcal{E}_1'[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)} \leqslant \bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^q\sqrt{{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}(t)}$$

因子 $|\ell|$ 抵消, 我们得出 (14.279) 从而 (14.267) 被

$$\begin{aligned}
&C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{q\,(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}(t) \\
&\cdot\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{1+\delta_2\log(1+t)}} + C\delta_0\frac{(1+\log(1+t))^{3/2}}{1+t}\right)I_{q;\delta_2}(t)
\end{aligned} \tag{14.286}$$

界定. 其中

$$I_{q;\delta_2}(t) = \int_0^t \frac{(1+\log(1+t'))^q}{\sqrt{1+\delta_2\log(1+t')}}\frac{dt'}{1+t'} \tag{14.287}$$

设 $x = 1+\log(1+t')$, 积分 $I_{q;\delta_2}(t)$ 有如下形式:

$$I_{q;\delta_2}(t) = \int_1^{1+\log(1+t)} \frac{x^q}{\sqrt{1+\delta_2(x-1)}}dx \tag{14.288}$$

由于 $\delta_2 \leqslant 1$, 我们有

$$1 + \delta_2(x-1) \geqslant \delta_2 + \delta_2(x-1) = \delta_2 x$$

所以

$$I_{q;\delta_2}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} \int_0^{1+\log(1+t)} x^{q-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} \frac{(1+\log(1+t))^{q+1/2}}{q+1/2} \tag{14.289}$$

同样由于 (14.288) 中被积函数的分母 $\geqslant 1$, 所以

$$I_{q;\delta_2}(t) \leqslant \int_0^{1+\log(1+t)} x^q dx = \frac{(1+\log(1+t))^{q+1}}{q+1} \tag{14.290}$$

我们用 (14.289) 估计乘积:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta_2}{\sqrt{1+\delta_2\log(1+t)}} I_{q;\delta_2}(t) \\
&\leqslant \frac{\delta_2}{\sqrt{1+\delta_2\log(1+t)}} \frac{(1+\log(1+t))^{q+1/2}}{\sqrt{\delta_2}(q+1/2)} \\
&= \frac{\sqrt{\delta_2}\sqrt{1+\log(1+t)}}{\sqrt{1+\delta_2\log(1+t)}} \frac{(1+\log(1+t))^q}{(q+1/2)} \leqslant \frac{(1+\log(1+t))^q}{(q+1/2)}
\end{aligned} \tag{14.291}$$

其中最后一步我们用到了 $\delta_2 \leqslant 1$. 我们用 (14.290) 估计乘积:

$$\begin{aligned}
&C\delta_0 \frac{(1+\log(1+t))^{3/2}}{1+t} I_{q;\delta_2}(t) \\
&\leqslant C\delta_0 \frac{(1+\log(1+t))^{3/2}}{1+t} \frac{(1+\log(1+t))^{q+1}}{q+1} \\
&= C\delta_0 \frac{(1+\log(1+t))^{5/2}}{1+t} \frac{(1+\log(1+t))^q}{q+1} \leqslant \frac{C'\delta_0}{q+1}(1+\log(1+t))^q
\end{aligned} \tag{14.292}$$

我们得出 (14.286) 从而 (14.267) 被

$$\frac{C}{q+1/2} \bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_l)} \mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}(t) \tag{14.293}$$

界定.

所以我们已经估计了临界积分 (14.246). 我们将估计剩下的对 H_0 上积分的贡献. 这些贡献来自于 (14.243). 为了估计这些贡献, 我们只需要用

$$\max_\alpha \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} |T\psi_\alpha| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{14.294}$$

由 (8.333), 在 $k=1,2$ 时, 这些贡献被

$$
\begin{aligned}
&C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|T\psi_\alpha|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}|\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\
&\leqslant C\delta_0\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}{}^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}|\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\
&\leqslant C\delta_0\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C\delta_0\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t)}
\end{aligned}
\tag{14.295}
$$

界定.

首先考虑来自于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(1)}$ 的贡献. 由 (14.245) 和 (14.239) 有

$$
\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\delta_0(1+t)^{-3}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t)}
\tag{14.296}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(1)}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}&\leqslant C\delta_0\int_0^t\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')(1+t')^{-2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')}dt'\\
&\leqslant C\delta_0\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}J'_{a,q}(t)
\end{aligned}
\tag{14.297}
$$

其中

$$
J'_{a,q}(t)=\int_0^t\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^q dt'
\tag{14.298}
$$

为了估计这个积分, 我们考虑出现在引理 8.11 中的两种情形. 在情形 1, 我们有上界 (14.117), 它意味着

$$
J'_{a,q}(t)\leqslant C\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^q dt'\leqslant C_q
\tag{14.299}
$$

类似地, 在子情形 2a 有

$$
J'_{a,q}(t_1)\leqslant C_q
\tag{14.300}
$$

在子情形 2b, 我们有下界 (14.124), 记

$$
C_q(t_1)=\sup_{t'\geqslant t_1}((1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^q)
\tag{14.301}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
J'_{a,q}(t)-J'_{a,q}(t_1)&\leqslant C\cdot C_q(t_1)\int_{t_1}^t(1+t')^{-1}(1-\delta_1\tau')^{-a-1/2}dt'\\
&\leqslant C\cdot\frac{C_q(t_1)}{a\delta_1}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)
\end{aligned}
\tag{14.302}
$$

在最后一步我们用到了 (8.312).

现在, 我们有

$$C_q(t_1) = \sup_{\tau' \geqslant \tau_1} (e^{-\tau'}(1+\tau')^q) \quad \tau_1 = \log(1+t_1)$$

函数

$$f(x) = e^{-x}x^q \quad 在\ [1,\infty)\ 上$$

当 $x \geqslant q$ 时是 x 的减函数. 所以如果 $\tau_1 = 1/2a\delta_1 \geqslant q$, 即 $aq\delta_0$ 足够小时, 我们有

$$C_q(t_1) = e^{-\tau_1}(1+\tau_1)^q = e^{-\frac{1}{2a\delta_1}}(1+\frac{1}{2a\delta_1})^q \tag{14.303}$$

从而由 (14.302) 有

$$\begin{aligned} J'_{a,q}(t) - J'_{a,q}(t_1) &\leqslant \frac{C}{2a\delta_1}(1+\frac{1}{2a\delta_1})^q e^{-\frac{1}{2a\delta_1}} \bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t) \\ &\leqslant C\varphi'_{q+1}(2a\delta_1)\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t) \leqslant C\varphi'_{q+1}(Ca\delta_0)\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t) \end{aligned} \tag{14.304}$$

我们得出一般情形下,

$$J'_{a,q}(t) \leqslant C_q + C\varphi'_{q+1}(Ca\delta_0)\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t) \tag{14.305}$$

代入 (14.297) 得到 (14.295) 中对 $k=1$ 的结果, 则我们有

$$\begin{aligned} &C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} (1+t)|T\psi_\alpha|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(1)}|\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}} \\ &\leqslant C\delta_0^2\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)(C_q\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t) + C\varphi'_{q+1}(Ca\delta_0)\bar{\mu}_m^{-2a}(t))(1+\log(1+t))^q \end{aligned} \tag{14.306}$$

接下来我们考虑来自于 ${}^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(2)}$ 的贡献. 对 $k=2$, 我们有 (14.245); 对 $\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(2)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$, 我们有 (14.235). 这里我们只需考虑来自于 (14.235) 右端主部的贡献, 即来自于 $C_l(1+t)^{-2}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q$ 的贡献. 这一项对 (14.245) 的贡献为

$$C_l\int_0^t (1+t')^{-1}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q(t')dt' \tag{14.307}$$

由引理 5.1, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\{l\}}^Q(t') &\leqslant C\epsilon_0\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')} \\ &\leqslant C\epsilon_0\bar{\mu}_m^{-a}(t')(1+\log(1+t'))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}} \end{aligned} \tag{14.308}$$

所以 (14.307) 被

$$C_l\epsilon_0(1+\log(1+t))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-a}(t')dt' \tag{14.309}$$

界定. 最后一个积分与 $J_{a-1/2,-1}(t)$ 相同 (见 (14.147)), 所以由 (14.153) 它被

$$C(1+\log(1+t))\bar{\mu}_m^{-a+1}(t)$$

界定. 从而 (14.309), 以及 (14.307) 被

$$C_l\epsilon_0(1+\log(1+t))^{p+1}\bar{\mu}_m^{-a+1}(t)\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \tag{14.310}$$

界定. 我们得出在 $k=2$ 时对 (14.295) 的贡献被

$$C_l\epsilon_0\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a+1/2}(t)(1+\log(1+t))^{p+q+1}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.311}$$

界定.

最后我们考虑来自于超曲面 H_1 上积分的贡献, 它由 (14.212) 给出. 我们有

$$|H_1|\leqslant C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)^2|R_{i_{l+1}}T\psi_\alpha||R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not g} \tag{14.312}$$

由

$$\max_\alpha\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|R_{i_{l+1}}T\psi_\alpha|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{14.313}$$

我们有

$$\begin{aligned}|H_1|&\leqslant C\delta_0\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not g}\\&\leqslant C\delta_0(1+t)\|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C\delta_0(1+t)^2\|(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\mathcal{W}_{\{l+1\}}(t)\end{aligned} \tag{14.314}$$

现在由 (14.243), (14.245), 我们有

$$\begin{aligned}&(1+t)^2\|(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&\leqslant C(\|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}+\sum_{k=0}^2\|^{(i_1\cdots i_l)}A_l^{(k)}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)})\\&\leqslant C(\|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}+\sum_{k=0}^2\int_0^t(1+t')\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(k)}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt')\end{aligned} \tag{14.315}$$

这里我们只需考虑主部的贡献, 即来自于 $\|^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}$ 的贡献. 这个对 (14.315) 的贡献被

$$\begin{aligned}
&C|\ell|\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')dt'}\\
&\leqslant C|\ell|\sqrt{\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'(t)}\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^q dt' \quad (14.316)
\end{aligned}$$

界定. 最后一个积分与 $J_{a,q-1}$ 相同 (见 (14.147)), 从而由 (14.153), 它被

$$C(1+\log(1+t))^{q+1}\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)$$

界定. 所以对 (14.315) 的主要贡献被

$$C|\ell|\bar{\mu}_m^{-a+1/2}(t)(1+\log(1+t))^{q+1}\sqrt{\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'(t)} \tag{14.317}$$

界定. 另一方面, 像 (14.308) 中那样, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\{l+1\}}&\leqslant C\epsilon_0\sqrt{\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t)}\\
&\leqslant C\epsilon_0\bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}
\end{aligned} \tag{14.318}$$

将 (14.317) 和 (14.318) 代入 (14.314), 我们得出对 H_1 的主要贡献被

$$C|\ell|\epsilon_0\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a+1/2}(t)(1+\log(1+t))^{p+q+1}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'(t)} \tag{14.319}$$

界定, 这个界形式上与 (14.311) 相同.

我们转向 (14.207) 中的时空积分, 即

$$\int_{W_u^t}(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'))dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.320}$$

这里我们将用到 $(L+\nu)T\psi_\alpha$ 比 $(1+t)^{-2}$ 衰减得更快这个事实. 为建立这个事实, 我们考虑 ψ_α 满足的波方程. 与 (8.180) 和 (8.181) 类似, 对 $\alpha=0,1,2,3$, 我们有

$$(L+\nu)\underline{L}\psi_\alpha=\rho_\alpha \tag{14.321}$$

其中

$$\rho_\alpha=\mu\not{\Delta}\psi_\alpha-\underline{\nu}L\psi_\alpha-2\zeta\cdot\not{d}\psi_\alpha+\mu\frac{d\log\Omega}{dh}\not{d}h\cdot\not{d}\psi_\alpha \tag{14.322}$$

在引理 8.10 的假设下, 我们能得到一个类似于 (8.182) 的估计对每个 $\alpha = 0, 1, 2, 3$ 成立, 即我们有

$$\max_{\alpha} |\rho_\alpha| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{14.323}$$

由于 $2T\psi_\alpha = \underline{L}\psi_\alpha - \eta^{-1}\kappa L\psi_\alpha$, (14.321) 意味着

$$(L+\nu)T\psi_\alpha = \tau_\alpha \tag{14.324}$$

其中

$$2\tau_\alpha = \rho_\alpha - (L+\nu)(\eta^{-1}\kappa L\psi_\alpha) \tag{14.325}$$

现在我们有

$$(L+\nu)(\eta^{-1}\kappa L\psi_\alpha) = \eta^{-1}\kappa(L)^2\psi_\alpha + ((L+\nu)(\eta^{-1}\kappa))L\psi_\alpha$$

运用关于 $L\mu$ 的界以及连续性假设 $\mathbf{E}^{QQ}_{\{0\}}, \mathbf{E}^{Q}_{\{0\}}$, 我们推出

$$\max_{\alpha} |(L+\nu)(\eta^{-1}\kappa L\psi_\alpha)| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{14.326}$$

将 (14.323) 和 (14.326) 结合起来, 我们得到

$$\max_{\alpha} |\tau_\alpha| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{14.327}$$

这个估计实际上只依赖于命题 12.6. 由直接计算, 在命题 12.9 的假设 $(l=1)$ 以及命题 12.10 的假设 $(m=l=0)$ 下, 我们推出

$$\max_{\alpha} \|\tau_\alpha\|_{\infty,[1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{14.328}$$

接下来我们考虑因子 ω/ν. 设

$$\nu' = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi' + L\log\Omega) \tag{14.329}$$

我们有

$$\nu = \frac{1}{1-u+t} + \nu' \tag{14.330}$$

回忆 $\omega = 2(1+t)$, 我们得到

$$(L-2\nu)(\omega/\nu) = \gamma\nu^{-2}\omega \tag{14.331}$$

其中

$$\gamma = \frac{-u}{(1+t)(1-u+t)^2} + (\frac{1}{1+t} - \frac{4}{1-u+t})\nu' - 2\nu'^2 - L\nu' \tag{14.332}$$

命题 12.9 ($l=1$) 意味着

$$\|\gamma\|_{\infty,[1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{14.333}$$

这里我们同样用到了 (14.217) 和 (14.219).

由 (14.324) 和 (14.331), 我们有

$$\begin{aligned}&(L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'))\\=&(\omega/\nu)((T\psi_\alpha)(L+2\nu)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi') + \tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'))\end{aligned} \tag{14.334}$$

其中

$$\tilde{\tau}_\alpha = \tau_\alpha + \gamma\nu^{-1}T\psi_\alpha \tag{14.335}$$

由 (14.328) 和 (14.333) 以及由命题 12.9 ($l=1$) 得出的关于 ν' 的估计, 我们有

$$\max_\alpha \|\tilde{\tau}_\alpha\|_{\infty,[1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t)) \tag{14.336}$$

将 (14.334) 代入 (14.320), 我们可以估计如下时空积分:

$$\begin{aligned}&\int_{W_u^t}(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(\omega/\nu)\\&\cdot((T\psi_\alpha)(L+2\nu)(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi') + \tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'))dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\end{aligned} \tag{14.337}$$

我们有

$$\begin{aligned}&(L+2\nu)R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\\=&R_{i_{l+1}}(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\\&+{}^{(R_{i_{l+1}})}ZR_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' - 2(R_{i_{l+1}}\nu)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')\end{aligned} \tag{14.338}$$

用 (14.209) 在 $S_{t,u}$ 上分部积分, 首先取 $X = R_{i_{l+1}}$ 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(T\psi_\alpha)R_{i_{l+1}}((L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
=&-\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)(R_{i_{l+1}}T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{S_{t,u}} (T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}(\omega/\nu) + \frac{1}{2}(\omega/\nu)\mathrm{tr}^{(R_{i_{l+1}})}\tilde{\not{\pi}}) \\
&\cdot(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' d\mu_{\tilde{\not{g}}}
\end{aligned} \tag{14.339}$$

然后取 $X = {}^{(R_{i_{l+1}})}Z$ 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)^{(R_{i_{l+1}})}Z(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
=&-\int_{S_{t,u}} ({}^{(R_{i_{l+1}})}Z \cdot \not{d}R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)({}^{(R_{i_{l+1}})}Z \cdot \not{d}T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{S_{t,u}} (T\psi_\alpha)({}^{(R_{i_{l+1}})}Z \cdot \not{d}(\omega/\nu) + (\omega/\nu)\tilde{\not{\mathrm{div}}}\,{}^{(R_{i_{l+1}})}Z) \\
&\cdot(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}}
\end{aligned} \tag{14.340}$$

同样, 再次取 $X = R_{i_{l+1}}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{t,u}} (R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(\omega/\nu)\tilde{\tau}_\alpha R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
=&-\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)\tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l+1}}R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{S_{t,u}} (\omega/\nu)(R_{i_{l+1}}\tilde{\tau}_\alpha)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{S_{t,u}} \tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}(\omega/\nu) + \frac{1}{2}(\omega/\nu)\mathrm{tr}^{(R_{i_{l+1}})}\tilde{\not{\pi}})(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')d\mu_{\tilde{\not{g}}}
\end{aligned} \tag{14.341}$$

由 (14.339)—(14.341), 时空积分 (14.337) 变为

$$-V_0 - V_1 - V_2 - V_3 \tag{14.342}$$

其中

$$V_0 = V_{0,0} + V_{0,1} \tag{14.343}$$

$$V_{0,0} = \int_{W_u^t} (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}} R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.344}$$

$$V_{0,1} = \int_{W_u^t} (\omega/\nu)(\tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l+1}} R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha) \\ +(T\psi_\alpha)^{(R_{i_{l+1}})} Z \cdot \not d R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha) R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.345}$$

$$V_1 = V_{1,0} + V_{1,1} \tag{14.346}$$

$$V_{1,0} = \int_{W_u^t} (\omega/\nu)(R_{i_{l+1}} T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.347}$$

$$V_{1,1} = \int_{W_u^t} (\omega/\nu)(R_{i_{l+1}}\tilde{\tau}_\alpha + {}^{(R_{i_{l+1}})}Z \cdot \not d T\psi_\alpha) \\ \cdot(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha) R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.348}$$

$$V_2 = V_{2,0} + V_{2,1} \tag{14.349}$$

$$V_{2,0} = \int_{W_u^t} (T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}(\omega/\nu) + \frac{1}{2}(\omega/\nu)\mathrm{tr}^{(R_{i_{l+1}})}\tilde{\not\pi}) \\ \cdot(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(L+2\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi' dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.350}$$

$$V_{2,1} = \int_{W_u^t} (R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi') \\ \cdot(\tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l+1}}(\omega/\nu) + \frac{1}{2}(\omega/\nu)\mathrm{tr}^{(R_{i_{l+1}})}\tilde{\not\pi}) \\ +(T\psi_\alpha)({}^{(R_{i_{l+1}})}Z \cdot \not d(\omega/\nu) + (\omega/\nu)\tilde{\not{\mathrm{d}}}\mathrm{iv}^{(R_{i_{l+1}})}Z)) dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.351}$$

以及

$$V_3 = \int_{W_u^t} 2(\omega/\nu)(R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l+1}}\nu)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi') dt' du' d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.352}$$

最后一个积分是低阶项, 我们可以很容易得到它的估计.

接下来我们将注意力集中在两个主部积分 $V_{0,0}$ 和 $V_{1,0}$ 上, 其他积分都包含相对于这两个积分的衰减因子. 事实上用 (14.336) 和推论 10.1.i 的估计

$$\max_j \|{}^{(R_j)}Z\|_{\infty,[1],\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{14.353}$$

来比较 $V_{0,0}$ 和 $V_{0,1}$ 以及 $V_{1,0}$ 和 $V_{1,1}$, 我们可以看到 $V_{0,1}$ 和 $V_{1,1}$ 分别相对于 $V_{0,0}$ 和 $V_{1,0}$ 包含一个形如 $\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 的衰减因子.

首先考虑 $V_{0,0}$. 我们有

$$|V_{0,0}| \leqslant C \int_{W^t_{\epsilon_0}} (1+t')^3 |T\psi_\alpha||\not{d} R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha||(L+2\nu) R_{i_l} \cdots R_{i_1} \mathrm{tr}\chi'| dt' du d\mu_{\not{g}} \tag{14.354}$$

由传输方程 (14.219), 我们有

$$(L+2\nu) R_{i_l} \cdots R_{i_1} \mathrm{tr}\chi' = {}^{(i_1 \cdots i_l)}\tilde{\rho}_l \tag{14.355}$$

其中

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}\tilde{\rho}_l = {}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l + 2\nu' R_{i_l} \cdots R_{i_1} \mathrm{tr}\chi' \tag{14.356}$$

现在我们可以看到 $V_{0,1}$ 和 $V_{1,1}$ 与上式右端第二项对 $V_{0,1}$ 和 $V_{1,0}$ 的贡献的界一样.

像 (14.229) 那样, 我们有

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}\tilde{\rho}_l = {}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(0)} + {}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(1)} + {}^{(i_1 \cdots i_l)}\tilde{\rho}_l^{(2)} \tag{14.357}$$

其中

$${}^{(i_1 \cdots i_l)}\tilde{\rho}_l^{(2)} = {}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(2)} + 2\nu' R_{i_l} \cdots R_{i_1} \mathrm{tr}\chi' \tag{14.358}$$

由于

$$|\nu'| \leqslant C\delta_0 (1+t)^{-2} (1+\log(1+t))$$

${}^{(i_1 \cdots i_l)}\tilde{\rho}_l^{(2)}$ 与 ${}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(2)}$ 有相同的界. 对 (14.354) 的临界贡献来自于 ${}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(0)}$. 这个贡献是如下临界积分:

$$\begin{aligned}
&C \int_{W^t_u} (1+t')^3 |T\psi_\alpha||\not{d} R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha||{}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(0)}| dt' du d\mu_{\not{g}} \\
&\leqslant C \int_0^t (1+t')^3 \sup_{\Sigma^{\epsilon_0}_{t'}} (\mu^{-1}|T\psi_\alpha|) \\
&\quad \cdot \|\mu^{1/2} \not{d} R_{i_{l+1}} \cdots R_{i_1} \psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_{t'})} \|\mu^{1/2} {}^{(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_{t'})} dt'
\end{aligned} \tag{14.359}$$

这里我们对 $\sup_{\Sigma^{\epsilon_0}_{t'}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)$ 代入 (14.89), 对 $\|\mu^{1/2\,(i_1 \cdots i_l)}\rho_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_{t'})}$ 代入 (14.240). 因子 $|\ell|$ 抵消. 现在 (14.89) 右端第二项的贡献实际上不是临界的. 我稍后将在估

计 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}$ 的贡献时看到如何估计这一类型的积分. 现在我们将注意力集中在如下临界积分上:

$$\begin{aligned}
&C\int_0^t \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)\sqrt{\mathcal{E}_1'[R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')}\sqrt{\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')}dt'\\
\leqslant\ &C\int_0^t \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')dt'\\
\leqslant\ &C\int_0^t \sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2q(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'(t')dt' \qquad (14.360)
\end{aligned}$$

这与 (14.97) 形式相同, 只不过用 q 替代了 p 以及 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'$ 替代了 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}$. 所以由 (14.102) 和 (14.107), 我们得到 (14.360) 被

$$C\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2q}\right)\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'(t) \qquad (14.361)$$

界定.

我们接下来考虑 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}$ 对 (14.354) 的贡献. 为了估计这个以及所有剩下的贡献, 我们只需要用 (14.90). 用 (14.241), 我们得到相应的贡献被

$$\begin{aligned}
&C\int_{W_{\epsilon_0}^t}(1+t')^3|T\psi_\alpha||\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha||{}^{(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}|dt'dud\mu_{\not{g}}\\
\leqslant\ &C\delta_0\int_0^t(1+t')^2\bar{\mu}_m^{-1}(t')\|\mu^{1/2}\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}\|\mu^{1/2(i_1\cdots i_l)}\rho_l^{(1)}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'\\
\leqslant\ &C\delta_0^2\int_0^t(1+t')^{-2}\bar{\mu}_m^{-1}(t')\mathcal{E}_{1,[l+2]}'(t')dt'\\
\leqslant\ &C\delta_0^2\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2q}\bar{\mu}_m^{-1-2a}(t')\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'(t')dt' \qquad (14.362)
\end{aligned}$$

界定. 最后一个积分与 (14.115) 类似. 所以 (14.362) 被

$$\begin{aligned}
&C\delta_0^2\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}\\
&\cdot\left(\varphi_1(Ca\delta_0)\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'(t)+\int_0^t(1+t')^{-2}\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'(t')dt'\right) \qquad (14.363)
\end{aligned}$$

界定.

我们接下来考虑关于 $\|{}^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{\rho}_l^{(2)}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 的估计中的主部 $C_l(1+t)^{-2}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q$ 对

(14.354) 的贡献. 这个贡献被

$$C_l\delta_0\int_0^t \bar{\mu}_m^{-1/2}(t')\|\mu^{1/2}\not{d}R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}\mathcal{W}_{\{l\}}^Q(t')dt'$$
$$\leqslant C_l\epsilon_0\delta_0\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-2a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^{p+q}$$
$$\cdot\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')}dt'$$
$$\leqslant C_l\epsilon_0\delta_0 J_{2a,p+q-1}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \tag{14.364}$$

界定, 其中 $J_{a,q}(t)$ 是积分 (14.147). 由 (14.153), 我们有

$$J_{2a,p+q-1}(t)\leqslant C(1+\log(1+t))^{p+q+1}\bar{\mu}_m^{-2a+1/2}(t) \tag{14.365}$$

所以 (14.364) 被

$$C_l\epsilon_0\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a+1/2}(t)(1+\log(1+t))^{p+q+1}\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \tag{14.366}$$

界定.

最后我们考虑由 (14.347) 给出的积分 $V_{1,0}$. 由界 (14.213), 我们有

$$|V_{1,0}|\leqslant C\delta_0\int_{W_u^t}(1+t')|R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha||^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{\rho}_l|dt'dud\mu_{\not{g}}$$
$$\leqslant C\delta_0\int_0^t(1+t')\mathcal{W}_{\{l+1\}}(t')\|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{\rho}_l\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt' \tag{14.367}$$

这里我们只需考虑主部贡献, 即来自于 $\|^{(i_1\cdots i_l)}\tilde{\rho}_l^{(0)}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}$ 的贡献. 由 (14.240) 和 (14.318) 这个贡献被

$$C\epsilon_0\delta_0\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-2a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^{p+q}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \tag{14.368}$$

界定. 这与 (14.364) 相同, 它已经被 (14.366) 界定. 这就完成了对时空积分 V_0, V_1, V_2 的估计. 所以 (14.56) 对 (14.59) 的贡献的估计就完成了.

14.5.2 关于 (14.57) 的贡献的估计

我们现在考虑 (14.57) 对 (14.59) 的贡献. 回忆这个与变分 (14.54) 相关, 相应的贡献为

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu)(L+\nu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.369}$$

我们用与处理 (14.202) 相同的方法处理这个积分. 即, 我们将被积函数写成

$$
\begin{aligned}
&-(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu)((L+\nu)R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)\\
=&-(L+2\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha))\\
&+(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)(L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu))
\end{aligned}
$$

由 (14.206), 将函数 f 取为

$$
(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)
$$

我们得出 (14.369) 等于

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not g}}\\
&+\int_{\Sigma_0^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not g}}\\
&+\int_{W_u^t}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)(L+\nu)\\
&\cdot((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu))dt'du'd\mu_{\tilde{\not g}}
\end{aligned}
\tag{14.370}
$$

我们首先考虑超曲面上的积分

$$
-\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not g}} \tag{14.371}
$$

定义 $S_{t,u}$ 上的切向量场

$$
{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}=(\not d R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu)\cdot(\not g^{-1}) \tag{14.372}
$$

设

$$
{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}r_{m,l-m}=R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu-\not\Delta R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu \tag{14.373}
$$

考虑到由于 $\tilde{\not g}=\Omega\not g$, 对 $S_{t,u}$ 上的切向量场 X 有

$$
\tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}}X=\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}X+X\cdot\not d\log\Omega, \tag{14.374}
$$

我们有

$$
R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not\Delta\mu=\tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}}\,{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}+{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m} \tag{14.375}
$$

其中

$$^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m} = {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}r_{m,l-m} - {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} \cdot \not{d}\log\Omega \tag{14.376}$$

与 (11.323)—(11.325) 类似, 我们推出

$$\begin{aligned}
&^{(i_1\cdots i_{l-m})}r_{m,l-m}\\
&= \mathrm{tr}({}^{(i_1\cdots i_{l-m})}c_{m,l-m}[\not{d}\mu]) \cdot (\not{g}^{-1})\\
&\quad +\mathrm{tr}(\not{\mathcal{L}}_{R_{i_{l-m}}} \cdots \not{\mathcal{L}}_{R_{i_1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}((\not{\mathcal{L}}_T)^k(\not{g}^{-1})) \cdot (\not{\mathcal{L}}_T)^{m-k}\not{D}^2\mu)\\
&\quad +\mathrm{tr}(\sum_{|s_1|+|s_2|=l-m,|s_1|>0}((\not{\mathcal{L}}_R)^{s_1}(\not{g}^{-1})) \cdot (\not{\mathcal{L}}_R)^{s_2}(\not{\mathcal{L}}_T)^m\not{D}^2\mu)
\end{aligned} \tag{14.377}$$

用推论 10.1.d, 10.2.d, 11.1.c, 11.2.c, 11.2.g, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}r_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\
&+\delta_0(\mathcal{Y}_0 + (1+t)\mathcal{A}'_{[l]} + \mathcal{W}_{\{l+1\}} + (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}}))
\end{aligned} \tag{14.378}$$

进一步, 由于

$$\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]} \tag{14.379}$$

而

$$\|\not{d}\log\Omega\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{14.380}$$

$^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m}$ 与 $^{(i_1\cdots i_{l-m})}r_{m,l-m}$ 有相同的界.

将 (14.375) 代入 (14.371), 超曲面积分变为

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)\tilde{\not{d}\mathrm{iv}}\,{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\\
&-\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}
\end{aligned} \tag{14.381}$$

如果 f 是定义在 $S_{t,u}$ 上的任意一个函数, X 是与 $S_{t,u}$ 相切的任意一个向量场, 我们有

$$\int_{S_{t,u}} f\tilde{\not{d}\mathrm{iv}}X d\mu_{\tilde{\not{g}}} = -\int_{S_{t,u}} X \cdot \not{d}f d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.382}$$

将 (14.382) 代入 (14.381) 中的第一式, 取 $X={}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}$ 以及

$$f=(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)$$

我们得到 (14.381) 等于

$$H_0'+H_1'+H_2' \tag{14.383}$$

其中

$$H_0'=\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot \not{d}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.384}$$

$$H_1'=\int_{\Sigma_t^u}(\omega/\nu)(\not{d}T\psi_\alpha)\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.385}$$

$$\begin{aligned}H_2'=\int_{\Sigma_t^u}&(T\psi_\alpha)(\not{d}(\omega/\nu)\cdot{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\\&-(\omega/\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m})(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\end{aligned} \tag{14.386}$$

现在由 (14.378) 和 (14.379) (同样见 (14.214)) 有

$$\begin{aligned}&\|(\nu/\omega)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot\not{d}(\omega/\nu)-{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}\\&\quad+\delta_0(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]}+\mathcal{W}_{\{l+1\}}+(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2\mathcal{W}^Q_{\{l\}}))\end{aligned} \tag{14.387}$$

一方面比较 (14.386) 和 (14.385), 另一方面比较 (14.387) 和 (14.379), 我们看到 H_2' 相对于 H_1' 有一个形如 $(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))$ 的衰减因子. 所以我们将注意力集中在 H_0' 和 H_1'.

我们首先考虑积分 H_0'. 回忆定义 (14.372), 我们有

$$\begin{aligned}|H_0'|&\leqslant C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)^2|T\psi_\alpha||\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu||\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\&\leqslant C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|T\psi_\alpha|(\sum_j|R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu|)|\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\end{aligned} \tag{14.388}$$

设 $j=i_{l-m+1}$.

这里我们需要一个关于 $R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu$ 的比命题 12.12 更精确的估计. 设

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\mu_{m,l-m+1}=R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu\quad(m=0,\cdots,l) \tag{14.389}$$

我们有传输方程 (12.229) ($m=0$) 和 (12.252) ($m\geqslant 1$), 可以将它们写成统一的形式

$$L^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\mu_{m,l-m+1}={}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'_{m,l-m+1} \tag{14.390}$$

其中

$$\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'_{m,l-m+1}\\
&=e^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\mu_{m,l-m+1}+R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m m\\
&\quad+\mu R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m e+{}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r''_{m,l-m+1}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{m-1}R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^k\Lambda(T)^{m-1-k}\mu\\
&\quad+\sum_{k=0}^{l-m}R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_{l-m-k+2}}{}^{(R_{i_{l-m-k+1}})}ZR_{i_{l-m-k}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu
\end{aligned} \tag{14.391}$$

这里我们定义函数

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r''_{m,l-m+1}={}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r'_{m,l-m+1}-(R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m e)\mu \tag{14.392}$$

其中 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r'_{m,l-m+1}$ 由 (12.251) 给出. 函数 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r''_{m,l-m+1}$ 是 $l+1$ 阶的并且包含 μ 的至多 l 阶空间导数, 其中至多 m 阶是沿 T- 方向的导数. 具体来说, 对 $m=0$ 有

$${}^{(i_1\cdots i_{l+1})}r''_{0,l+1}=\sum_{|s_1|+|s_2|=l+1,|s_1|,|s_2|>0}((R)^{s_1}e)((R)^{s_2}\mu) \tag{14.393}$$

以及对 $m\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r''_{m,l-m+1}\\
&=\sum_{|s_1|+|s_2|=l-m+1,|s_1|>0}((R)^{s_1}e)((R)^{s_2}(T)^m\mu)\\
&\quad+\sum_{|s_1|+|s_2|=l-m+1,|s_2|>0}((R)^{s_1}(T)^m e)((R)^{s_2}\mu)\\
&\quad+R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k)!}((T)^k e)((T)^{m-k}\mu)\Big)
\end{aligned} \tag{14.394}$$

像第十章中那样, 我们设

$$m=m_T^\alpha(T\psi_\alpha) \tag{14.395}$$

并且

$$R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m m = m_T^\alpha R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(0)}_{m,l-m+1} \tag{14.396}$$

其中

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(0)}_{m,l-m+1}\\ =&\sum_{|s_1|+|s_2|=l-m+1,|s_1|>0}((R)^{s_1}m_T^\alpha)((R)^{s_2}(T)^{m+1}\psi_\alpha)\\ &+R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(\sum_{k=1}^m\frac{m!}{k!(m-k)!}((T)^k m_T^\alpha)((T)^{m-k+1}\psi_\alpha))\end{aligned} \tag{14.397}$$

同样我们有

$$e = e_L^\alpha(L\psi_\alpha) \tag{14.398}$$

其中

$$\begin{aligned}e_L^0 &= \frac{1}{2\eta^2}(\eta^2)'\\ e_L^i &= \eta^{-1}\hat{T}^i - \frac{1}{2\eta^2}(\eta^2)'\psi_i\end{aligned} \tag{14.399}$$

显然,

$$|e_L^\alpha| \leqslant C \tag{14.400}$$

我们有

$$R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m e = e_L^\alpha R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m L\psi_\alpha + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(1)}_{m,l-m+1} \tag{14.401}$$

其中

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(1)}_{m,l-m+1}\\ =&\sum_{|s_1|+|s_2|=l-m+1,|s_1|>0}((R)^{s_1}e_L^\alpha)((R)^{s_2}(T)^m L\psi_\alpha)\\ &+R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(\sum_{k=1}^m\frac{m!}{k!(m-k)!}((T)^k e_L^\alpha)((T)^{m-k}L\psi_\alpha))\end{aligned} \tag{14.402}$$

定义

$$^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(0)}_{m,l-m+1} = \frac{1}{2}\ell R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_0 \tag{14.403}$$

以及

$$\begin{aligned}
&^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(1)}_{m,l-m+1} \\
&= (m_T^0 - \frac{1}{2}\ell)R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_0 \\
&\quad + m_T^i R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_i \\
&\quad + (1+t)^{-1}\mu e_L^\alpha R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m Q\psi_\alpha
\end{aligned} \tag{14.404}$$

然后我们有

$$\begin{aligned}
&R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m m + \mu R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^m e \\
&= {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m+1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(1)}_{m,l-m+1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'_{m,l-m+1}
\end{aligned} \tag{14.405}$$

其中

$$^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'_{m,l-m+1} = {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(0)}_{m,l-m+1} + \mu^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(1)}_{m,l-m+1} \tag{14.406}$$

并且 (14.391) 有如下形式:

$$\begin{aligned}
&^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'_{m,l-m+1} \\
&= {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(0)}_{m,l-m+1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(1)}_{m,l-m+1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(2)}_{m,l-m+1}
\end{aligned} \tag{14.407}$$

其中

$$\begin{aligned}
&^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(2)}_{m,l-m+1} \\
&= e^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\mu_{m,l-m+1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'_{m,l-m+1} + {}^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}r''_{m,l-m+1} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m-1} R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_1}(T)^k\Lambda(T)^{m-1-k}\mu \\
&\quad + \sum_{k=0}^{l-m} R_{i_{l-m+1}}\cdots R_{i_{l-m-k+2}}{}^{(R_{i_{l-m-k+1}})}Z R_{i_{l-m-k}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu
\end{aligned} \tag{14.408}$$

我们将得到一个关于 $^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\rho'^{(2)}_{m,l-m+1}$ 的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数的估计. (14.408) 右端第一项的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数被

$$C\delta_0(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[m,l+1]} \tag{14.409}$$

界定. 由 (14.397), 我们推出

$$\|^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(0)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}\mathcal{W}_{\{l+1\}} \tag{14.410}$$

由推论 11.2.b, 我们推出 $\|^{(i_1\cdots i_{l-m+1})}\tilde{n}'^{(1)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}$ 被

$$C_l\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l\}}+\delta_0(1+t)^{-1}((1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m-1,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]})) \tag{14.411}$$

界定. 转向 (14.408) 右端第三项. 由推论 11.2.b, 我们推出通过 (14.393), (14.394) 有

$$\begin{aligned}
&\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}r''_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C\delta_0((1+\log(1+t))(1+t)^{-1}(\mathcal{W}^Q_{\{l\}}+\delta_0(1+t)^{-1}(\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l-1]}+\mathcal{W}_{\{l\}}))\\
&+(1+t)^{-2}\mathcal{B}_{[m,l]})
\end{aligned} \tag{14.412}$$

最后 (14.408) 两项和式的 $L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数已经在 (12.357) 和 (12.359) 中估计过了. 所以我们得出

$$\begin{aligned}
&\sum_j\|^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(2)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C_l\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\\
&\cdot(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l\}}+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]})
\end{aligned} \tag{14.413}$$

进一步, 由 (14.403) 和 (14.404), 和以前类似, 我们有

$$\sum_j\|^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(0)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C|\ell|\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_0](t)} \tag{14.414}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_j\|^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(1)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
\leqslant\ & C\delta_0(1+t)^{-1}\bar{\mu}_m^{-1/2}\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)}\\
&+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m}Q\psi_\alpha](t)}
\end{aligned} \tag{14.415}$$

以及

$$\sum_j \|\mu^{1/2(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(0)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C|\ell|\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)} \tag{14.416}$$

$$\begin{aligned}&\sum_j \|\mu^{1/2(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(1)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\ \leqslant& C\delta_0(1+t)^{-1}\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)}\\ &+C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m}Q\psi_\alpha](t)}\end{aligned} \tag{14.417}$$

现在我们对传输方程 (14.390) 沿着 L 的积分曲线从 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 开始积分得到

$$\begin{aligned}&\sum_j |^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\mu_{m,l-m+1}(t,u,\vartheta)|\\ \leqslant& C(\sum_j |^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\mu_{m,l-m+1}(0,u,\vartheta)| + \sum_{k=0}^2 {}^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}A'^{(k)}_{m,l-m}(t,u,\vartheta))\end{aligned} \tag{14.418}$$

其中

$${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}(t,u,\vartheta) = \int_0^t \sum_j |^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(k)}_{m,l-m+1}|(t',u,\vartheta)dt' \tag{14.419}$$

对 $k=0,1,2$ 成立.

由 (8.333), 我们有

$$\begin{aligned}&\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\ \leqslant& \int_0^t \sum_j \|^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(k)}_{m,l-m+1}(t')\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}dt'\\ \leqslant& \int_0^t (1+t')^{-1}\sum_j \|^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(k)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'\end{aligned} \tag{14.420}$$

我们现在将 (14.418) 代入 (14.388), 注意到

$$\sum_j |R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu| = \sum_j |^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\mu_{m,l-m+1}|$$

临界贡献来自于 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(0)}_{m,l-m}$. 它是如下临界积分:

$$C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|T\psi_\alpha|^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(0)}_{m,l-m}|\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}} \tag{14.421}$$

这与 (14.246) 类似, 并且可以用相同的方法估计. 定义 (见 (14.257))

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'_{1,m,l+2;a,q}(t)\\&=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t'))\end{aligned} \tag{14.422}$$

则类似地, 我们得到 (见 (14.266), (14.293)) 临界积分 (14.421) 被

$$C(\frac{1}{a-1/2}+\frac{1}{q+1/2})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q\,(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'_{1,m,l+2;a,q}(t) \tag{14.423}$$

界定.

剩下的对 (14.388) 的贡献可以用与估计相对应的对 (14.215) 的贡献相同的方法来估计. 由 (14.294) 这些贡献可以被

$$\begin{aligned}&C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|T\psi_\alpha|^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}|\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\&\leqslant C\delta_0\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}|\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\&\leqslant C\delta_0\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C\delta_0\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t)}\end{aligned} \tag{14.424}$$

界定 $(k=1,2)$, 这与 (14.297) 类似. 这里我们只需考虑来自于 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(1)}_{m,l-m}$ 的贡献, 因为不仅 ${}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(2)}_{m,l-m}$ 是低阶项, 并且它不包含主部, 这只需比较 (14.413) 和 (14.237) 就能看出来. 由 (14.415) 有

$$\begin{aligned}&\sum_j\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(1)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{1/2}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t)\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t)}\end{aligned} \tag{14.425}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\|{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(1)}_{m,l-m}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&\leqslant C\delta_0\int_0^t\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{1/2}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')}dt'\\&\leqslant C\delta_0 J'_{a,q+1/2}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\end{aligned} \tag{14.426}$$

其中 $J'_{a,q}(t)$ 是积分 (14.298). 将 (14.305) 代入 (q 被 $q+1/2$ 替代) 得到

$$C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|T\psi_\alpha|^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(1)}_{m,l-m}|\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}$$
$$\leqslant C\delta_0^2\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)(C_q\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t)+C\varphi'_{q+3/2}(Ca\delta_0)\bar{\mu}_m^{-2a}(t))(1+\log(1+t))^q \tag{14.427}$$

最后我们考虑超曲面积分 H'_1, 它由 (14.387) 给出. 我们有

$$|H'_1|\leqslant C\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)|\not{d}T\psi_\alpha|\sum_j|R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu||R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}} \tag{14.428}$$

由

$$\max_\alpha\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|\not{d}T\psi_\alpha|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2} \tag{14.429}$$

我们有

$$\begin{aligned}|H'_1|&\leqslant C\delta_0\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}(1+t)^{-1}\sum_j|R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu||R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dud\mu_{\not{g}}\\&\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}\sum_j\|R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\&\leqslant C\delta_0\sum_j\|(R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu)(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\mathcal{W}_{\{l+1\}}(t)\end{aligned} \tag{14.430}$$

由 (14.418) 和 (14.420) 有

$$\begin{aligned}&\sum_j\|(R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu)(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)}\\&\leqslant C(\sum_j\|R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\&\quad+\sum_{k=0}^2\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}A'^{(k)}_{m,l-m}(t)\|_{L^2([0,\epsilon_0]\times S^2)})\\&\leqslant C(\sum_j\|R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\&\quad+\sum_{k=0}^2\int_0^t(1+t')^{-1}\sum_j\|^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(k)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt')\end{aligned} \tag{14.431}$$

这里我们只需要考虑来自于主部的贡献, 即来自于

$$\sum_j\|^{(i_1\cdots i_{l-m}j)}\rho'^{(0)}_{m,l-m+1}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}$$

的贡献. 这个对 (14.431) 的贡献被 (见 (14.414))

$$\begin{aligned} & C|\ell|\int_0^t (1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-1/2}(t')\sqrt{\sum_\alpha \mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t')}dt' \\ & \leqslant C|\ell|\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\int_0^t (1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^q dt' \\ & = C|\ell| J_{a,q-1}(t)\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \end{aligned} \tag{14.432}$$

界定. 代入 (14.153) (q 被 $q-1$ 替代) 和关于 $\mathcal{W}_{\{l+1\}}$ 的估计 (14.318), 我们得到对 H_1' 的主要贡献被

$$C\epsilon_0\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a+1/2}(t)(1+\log(1+t))^{p+q+1}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)} \tag{14.433}$$

界定, 形式上与 (14.319) 相同.

转向 (14.370) 中的时空积分, 即

$$\int_{W_u^t}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)(L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not{\Delta}\mu))dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.434}$$

像 (14.334) 中那样, 对于 (14.434) 中的被积函数, 我们有

$$\begin{aligned} & (L+\nu)((\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not{\Delta}\mu)) \\ & = (\omega/\nu)((T\psi_\alpha)(L+2\nu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not{\Delta}\mu) + \tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not{\Delta}\mu)) \end{aligned} \tag{14.435}$$

我们在右边代入 $R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m \not{\Delta}\mu$ 的表达式 (14.375). 这里我们运用如下性质: 设 X 是 $S_{t,u}$ 上的任意一个切向量场, 则我们有

$$(L+2\nu)\tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}}X = \tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}}(\not{\mathcal{L}}_L X + 2\nu X) \tag{14.436}$$

为了建立这个, 我们在声学坐标 $(t,u,\vartheta^A,\ A=1,2)$ 下计算. 从而我们有

$$\begin{aligned} & X = X^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A} \\ & \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}X = \frac{1}{\sqrt{\det\not{g}}}\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}(\sqrt{\det\not{g}}X^A) = \frac{\partial X^A}{\partial\vartheta^A} + X^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\log\sqrt{\det\not{g}} \end{aligned} \tag{14.437}$$

和

$$\begin{aligned} L\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}X & = \frac{\partial}{\partial t}\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}X \\ & = \frac{\partial^2 X^A}{\partial t\partial\vartheta^A} + \frac{\partial X^A}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\log\sqrt{\det\not{g}} + X^A\frac{\partial^2}{\partial t\partial\vartheta^A}\log\sqrt{\det\not{g}} \end{aligned} \tag{14.438}$$

现在有

$$\not{\mathcal{L}}_L X = [L, X] = \frac{\partial X^A}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \vartheta^A} \tag{14.439}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \sqrt{\det \not{g}} = \mathrm{tr}\chi \tag{14.440}$$

所以我们得到

$$L \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv} X = \not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}(\not{\mathcal{L}}_L X) + X \cdot \not{d}\mathrm{tr}\chi \tag{14.441}$$

由 (14.374) 和 ν 的定义, 这个等价于

$$L \tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}} X = \tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}}(\not{\mathcal{L}}_L X) + 2X \cdot \not{d}\nu \tag{14.442}$$

它与 (14.436) 等价.

我们将运用 (14.436), 在将 (14.375) 代入 (14.437) 之后取 $X = {}^{(i_1 \cdots i_{l-m})} Y_{m,l-m}$. 然后将这些结果代入 (14.434) 并且在 $S_{t,u}$ 上分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{W_u^t} (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)(L+2\nu)\tilde{\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} dt' du' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
= &-\int_{W_u^t} (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)((\not{\mathcal{L}}_L + 2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}) \cdot \not{d}R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha dt' du' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{W_u^t} (\omega/\nu)(R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)((\not{\mathcal{L}}_L + 2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}) \cdot \not{d}T\psi_\alpha dt' du' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \\
&-\int_{W_u^t} (T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha) \\
&\cdot((\not{\mathcal{L}}_L + 2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}) \cdot \not{d}(\omega/\nu) dt' du' d\mu_{\tilde{\not{g}}}
\end{aligned} \tag{14.443}$$

然后我们只剩下

$$\int_{W_u^t} (\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)(L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m} dt' du' d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{14.444}$$

我们同样在 $S_{t,u}$ 上分部积分:

$$
\begin{aligned}
&\int_{W_u^t}(\omega/\nu)\tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)\tilde{\mathrm{d}\!\!/\mathrm{iv}}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\\
=&-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)\tilde{\tau}_\alpha{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot\not{d}(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\\
&-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot\not{d}\tilde{\tau}_\alpha dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\\
&-\int_{W_u^t}\tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot\not{d}(\omega/\nu)dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \qquad (14.445)
\end{aligned}
$$

然后我们就剩下了

$$
\int_{W_u^t}(\omega/\nu)\tilde{\tau}_\alpha(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m}dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \qquad (14.446)
$$

由 (14.443)—(14.446), 时空积分 (14.434) 变为

$$
-V_0'-V_1'-V_2' \qquad (14.447)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
V_0'&=V_{0,0}'+V_{0,1}' \qquad (14.448)\\
V_{0,0}'&=\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)((\not{\mathcal{L}}_L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m})\\
&\quad\cdot\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \qquad (14.449)\\
V_{0,1}'&=\int_{W_u^t}(\omega/\nu)\tilde{\tau}_\alpha{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \qquad (14.450)\\
V_1'&=V_{1,0}'+V_{1,1}' \qquad (14.451)\\
V_{1,0}'&=\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)\\
&\quad\cdot((\not{\mathcal{L}}_L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m})\cdot\not{d}T\psi_\alpha dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \qquad (14.452)\\
V_{1,1}'&=\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\cdot\not{d}\tilde{\tau}_\alpha dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \qquad (14.453)
\end{aligned}
$$

以及

$$V_2' = V_{2,0}' + V_{2,1}' \tag{14.454}$$

$$\begin{aligned}V_{2,0}' = &\int_{W_u^t} (T\psi_\alpha)(R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha) \\ &\cdot(((\not{\mathcal{L}}_L + 2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}) \cdot \not{d}(\omega/\nu) \\ &-(\omega/\nu)(L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m})dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\end{aligned} \tag{14.455}$$

$$\begin{aligned}V_{2,1}' = &\int_{W_u^t} (R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)\tilde{\tau}_\alpha \\ &\cdot(^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} \cdot (\not{d}(\omega/\nu)) - (\omega/\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}\tilde{r}_{m,l-m})dt'du'd\mu_{\tilde{\not{g}}}\end{aligned} \tag{14.456}$$

接下来我们估计 $V_{0,0}'$ 和 $V_{1,0}'$, 因为其他项都是低阶项.

我们有

$$\begin{aligned}|V_{0,0}'| \leqslant C &\int_{W_{\epsilon_0}^t} (1+t')^2 |T\psi_\alpha||\not{d}R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha| \\ &|(\not{\mathcal{L}}_L + 2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}|dt'dud\mu_{\not{g}}\end{aligned} \tag{14.457}$$

由 (14.372) 有

$$\not{d}R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^m\mu = \not{g} \cdot {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} \tag{14.458}$$

以及 $\not{\mathcal{L}}_L\not{g} = 2\chi$, 我们有

$$\begin{aligned}\not{d}LR_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^m\mu &= \not{\mathcal{L}}_L\not{d}R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^m\mu \\ &= 2\chi \cdot {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} + \not{g} \cdot \not{\mathcal{L}}_L{}^{(i_1\cdots i_l)}Y_{m,l-m}\end{aligned} \tag{14.459}$$

由于

$$\chi = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi\not{g} + \hat{\chi} = (\nu - \frac{1}{2}L\log\Omega)\not{g} + \hat{\chi}'$$

定义

$$\tilde{\chi}' = \hat{\chi}' - \frac{1}{2}(L\log\Omega)\not{g} \tag{14.460}$$

然后我们得到

$$\not{g} \cdot (\not{\mathcal{L}}_L + 2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} = \not{d}LR_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^m\mu - 2\tilde{\chi}' \cdot {}^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m} \tag{14.461}$$

在 $LR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu$ 的表达式中代入 (14.390) ($l+1$ 被 l 替代), 然后我们得到

$$\not{d}\cdot(\not{\mathcal{L}}_L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}=\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'_{m,l-m}-2\tilde{\chi}'\cdot\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu \tag{14.462}$$

这意味着

$$|(\not{\mathcal{L}}_L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}|\leqslant\sum_{k=0}^{2}|\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(k)}_{m,l-m}|+2|\tilde{\chi}'||\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu| \tag{14.463}$$

现在由 (14.403) ($l+1$ 被 l 替代) 有

$$\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}=\frac{1}{2}\ell\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_0 \tag{14.464}$$

所以

$$\|\mu^{1/2}\not{d}^{(i_1\cdots i_l)}\rho'^{(0)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\leqslant C|\ell|(1+t)^{-1}\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)} \tag{14.465}$$

同样由 (14.404) ($l+1$ 被 l 替代) 有

$$\begin{aligned}\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(1)}_{m,l-m}=&(m_T^0-\frac{1}{2}\ell)\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_0+m_T^i\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_i\\&+(1+t)^{-1}\mu e_L^\alpha\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^mQ\psi_\alpha\\&+(\not{d}m_T^\alpha)(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)\\&+(1+t)^{-1}(\not{d}(\mu e_L^\alpha))(R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^mQ\psi_\alpha)\end{aligned} \tag{14.466}$$

所以由

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|\not{d}m_T^\alpha|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2},\quad\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|\not{d}e_L^\alpha|\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1} \tag{14.467}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\|\mu^{1/2}\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(1)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\\leqslant&C\delta_0(1+t)^{-2}\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)}\\&+C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^mQ\psi_\alpha](t)}\end{aligned} \tag{14.468}$$

注意到 (14.465) 和 (14.468) 分别与 (14.416) 和 (14.417) 相容, 再由 (14.413), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\||\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(2)}_{m,l-m}|+2|\tilde{\chi}'||\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\mu|\|_{L^2(\Sigma_t^{\epsilon_0})}\\
&\leqslant C_l\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\mathcal{W}_{\{l+1\}}+\mathcal{W}^Q_{\{l\}}\\
&+(1+t)^{-1}\mathcal{B}_{[m,l+1]}+\mathcal{Y}_0+(1+t)\mathcal{A}'_{[l]})
\end{aligned}\tag{14.469}
$$

对 (14.457) 的临界贡献来自于 $\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}$. 它是如下临界积分:

$$
\begin{aligned}
&C\int_{W_u^t}(1+t')^2|T\psi_\alpha||\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha||\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}|dt'dud\mu_{\not{g}}\\
&\leqslant C\int_0^t(1+t')^2\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)\|\mu^{1/2}\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}\\
&\cdot\|\mu^{1/2}\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}dt'
\end{aligned}\tag{14.470}
$$

这里我们对 $\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)$ 代入 (14.89), 对 $\|\mu^{1/2}\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}$ 代入 (14.465). 因子 $|\ell|$ 相互抵消. (14.89) 右端第二项的贡献实际上不是临界的. 实际的临界贡献是

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^t\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|L\mu|)\sqrt{\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t')}\\
&\cdot\sqrt{\sum_\alpha\mathcal{E}'_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t')}dt'\\
&\leqslant C(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2q})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'_{1,m,l+2;a,q}(t)
\end{aligned}\tag{14.471}
$$

(与 (14.360) 和 (14.361) 类似).

接下来我们考虑来自于 $\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(1)}_{m,l-m}$ 对 (14.457) 的贡献. 这里我们只需要用关于 $\sup_{\Sigma_{t'}^{\epsilon_0}}(\mu^{-1}|T\psi_\alpha|)$ 的估计 (14.90). 同样对 $\|\mu^{1/2}\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(1)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma_{t'}^{\epsilon_0})}$ 代入 (14.468), 我们得出相应的贡献被

$$
\begin{aligned}
& C\int_{W^t_{\epsilon_0}}(1+t')^2|T\psi_\alpha||\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha||\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(1)}_{m,l-m}|dt'dud\mu_{\not{g}}\\
\leqslant & C\delta_0\int_0^t(1+t')\bar{\mu}_m^{-1}(t')\|\mu^{1/2}\not{d}R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_{t'})}\\
& \cdot\|\mu^{1/2}\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(1)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_{t'})}dt'\\
\leqslant & C\delta_0^2\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}\\
& \cdot(\varphi_2(Ca\delta_0)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')dt') \quad (14.472)
\end{aligned}
$$

界定 (类似于 (14.362)).

接下来我们考虑 $V'_{1,0}$, 它由 (14.452) 给出. 由 (14.429), 我们有

$$
\begin{aligned}
|V'_{1,0}| & \leqslant C\delta_0\int_{W^t_{\epsilon_0}}|R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha||(\not{\mathcal{L}}_L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}|dt'dud\mu_{\not{g}}\\
& \leqslant C\delta_0\int_0^t\mathcal{W}_{\{l+1\}}(t')\|(\not{\mathcal{L}}_L+2\nu)^{(i_1\cdots i_{l-m})}Y_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_{t'})}dt'dud\mu_{\not{g}} \quad (14.473)
\end{aligned}
$$

这里我们只需考虑来自于 $\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}$ 的贡献. 由 (14.464) 有

$$
\|\not{d}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\rho'^{(0)}_{m,l-m}\|_{L^2(\Sigma^{\epsilon_0}_t)}\leqslant C\bar{\mu}_m^{-1/2}(1+t)^{-1}\sqrt{\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t)} \quad (14.474)
$$

所以由 (14.318), 相应的贡献被

$$
C\epsilon_0\delta_0\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_m^{-2a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^{p+q}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')}dt' \quad (14.475)
$$

界定. 这与 (14.364) 类似, 它已经由 (14.366) 估计. 这就完成了对时空积分 V'_0, V'_1, V'_2 的估计. 所以 (14.57) 对 (14.59) 的贡献的估计就完成了.

第十五章　最高阶能量估计

在这一章中我们考虑最高阶即 $l+2$ 阶的能量估计. 在这当中最困难的是与变分 (14.52) 和 (14.54) 相对应的能量估计, 与它们相对应的是临界误差积分.

15.1　与 K_1 相关的估计

对于每个变分, 我们首先考虑与 K_1 相关的积分等式, 然后再考虑与 K_0 相关的积分等式. 对任意阶的一个变分 ψ, 有一个与 K_1 相关的临界积分, 它从 $Q_{1,3}[\psi]$ 而来 (见 (5.114), (5.190)—(5.194)). 这是积分 $L(t,\epsilon_0)[\psi]$, 它由 (5.257) 定义:

$$L(t,\epsilon_0)[\psi]=\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mathcal{E}_1'[\psi](t')dt' \tag{15.1}$$

现在考虑与变分 (14.52) 以及向量场 K_1 相关的积分等式. 在每个等式中我们有临界超曲面积分 (14.248), 它被 (14.268) 和 (14.295) 界定:

$$C(\frac{1}{a-1/2}+\frac{1}{q+1/2})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'(t) \tag{15.2}$$

我们同样有临界时空积分 (14.361), 它被 (14.363) 界定:

$$C(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2q})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'(t) \tag{15.3}$$

余下的积分在 (14.308) 的情形时被

$$C_q\delta_0^2(1+\log(1+t))^{2q}\bar{\mu}_m^{-2a}(t)\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q} \tag{15.4}$$

界定; 在 (14.313) 的情形时被

$$C_l\epsilon_0\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}(\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)+\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)) \tag{15.5}$$

界定, 这里我们设

$$q \geqslant p+1 \tag{15.6}$$

并且 (14.321) 与 (14.313) 相同. (14.365) 有一个形如

$$C\delta_0^2\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t) \tag{15.7}$$

的界, 在 (14.368) 的情形有一个形如

$$C_l\epsilon_0\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}(\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)) \tag{15.8}$$

的界, 前提是假设 (15.6) 成立. 最后 (14.370) 与 (14.368) 相同. 将这些组合起来, 剩下的那些与 (14.52) 和与 K_1 相关的并包含声学量最高阶空间导数的积分被

$$\begin{aligned}&C_{q,l}\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)}\\&\cdot(\delta_0\mathcal{Y}_0(0)+\mathcal{A}'_{[l]}(0)+\mathcal{B}_{[l+1]}(0)+\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)})\end{aligned} \tag{15.9}$$

界定. 这里我们忽略了低阶项和在初始超曲面上的积分.

现在考虑那些与最高阶变分以及与 K_1 和 K_0 相关的只包含声学量低阶空间导数的误差积分, 这些来自于求和式 (14.14) 中剩下的那些项. 考虑这个和式中的任意与某个 $k\in\{0,\cdots,l\}$ 相对应的一项:

$$(Y_{I_{l+1}}+{}^{(Y_{I_{l+1}})}\delta)\cdots(Y_{I_{l+2-k}}+{}^{(Y_{I_{l+2-k}})}\delta)^{(Y_{I_{l+1-k}};I_1\cdots I_{l-k})}\sigma_{l+1-k} \tag{15.10}$$

这里总共有 k 阶关于交换向量场的导数作用在 ${}^{(Y)}\sigma_{l+1-k}$ 上. 考虑到 ${}^{(Y)}\sigma_{l+1-k}$ 有着形如 (14.15) 后面那一段所描述的结构, 在考虑来自于 ${}^{(Y)}\sigma_{1,l+1-k}$ 的贡献时, 如果与 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 相关的因子上有多于 $(l+1)_*$ 阶交换向量场的导数, 则与 ψ_{l+1-k} 的二阶

导数相关的因子最多只有 $k-(l+1)_*-1$ 阶交换向量场的导数, 所以这个因子中落在一阶变分 ψ_α 上的交换向量场的导数至多只有

$$k-(l+1)_*+1+l-k=l_*+1$$

阶, 所以我们可以用连续性假设估计这个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 同样, 在考虑来自于 ${}^{(Y)}\sigma_{2,l+1-k}$ 的贡献时, 如果 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的一阶导数上有多于 $(l+1)_*-1$ 阶的关于交换向量场的导数, 则 ψ_{l+1-k} 的一阶导数上至多只有 $k-(l+1)_*$ 阶的交换向量场的导数, 所以这个因子中落在一阶变分 ψ_α 上的交换向量场的导数至多只有

$$k-(l+1)_*+1+l-k=l_*+1$$

阶, 所以我们可以用连续性假设估计这个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 对于 ${}^{(Y)}\sigma_{3,l+1-k}$ 我们也用相同的方法考虑. 我们得出对于 (14.14) 求和式中那些在因子 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 有多于 $(l+1)_*$ 阶导数的项, 在它们相应的 ψ_α 因子上至多只有 l_*+1 阶的导数, 并且我们可以用连续性假设估计这个因子的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 在这些项中我们已经估计了声学量的最高阶空间导数的贡献. 余下的那些项可以用命题 12.11 和命题 12.12 估计. 这样我们估计好了这些项对与 K_1 和最高阶变分有关的误差积分的贡献 (回忆 (14.59)):

$$\begin{aligned}
&C_l\delta_0\bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^q\\
&\cdot(\delta_0\mathcal{Y}_0(0)+\mathcal{A}'_{[l]}(0)+\mathcal{B}_{[l+1]}(0)+\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)})\\
&\cdot(\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_{1,[l+2]}(u')du')^{1/2}\\
&+C_l\delta_0\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_{1,[l+2]}(u')du'+C_l\delta_0(\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_{1,[l+2]}(u')du')^{1/2}(K_{[l+2]}(t,\epsilon_0))^{1/2}
\end{aligned}\tag{15.11}$$

最后两项来自于 (14.14) 中包含声学量最高阶导数的那些项, 但是其中至少有一个导数是沿 L 方向的 (所以可以用 ψ_α 的最高阶导数表示).

这里我们定义了

$$\mathcal{F}'^t_{1,[n]}(u)=\sum_{m=1}^{n}\mathcal{F}'^t_{1,m}(u)\tag{15.12}$$

其中 $\mathcal{F}'^t_{1,n}(u)$ 表示与 K_1 和 n 阶变分相关的侧面能量的和.

另一方面, 在和式 (14.14) 中, 还有一些项包含至多 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的 $(l+1)_*$ 阶空间导数, 从而是 χ' 的至多 $(l+1)_*$ 阶空间导数和 μ 的至多 $(l+1)_*+1$ 阶空间导数. 用

命题 12.9 和命题 12.10 以及连续性假设我们可以估计这些项的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 所以我们可以用引理 7.6 来估计这些项:

$$
\begin{aligned}
&C_l\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_{1,[l+2]}(u')du'+C_l(\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_{1,[l+2]}(u')du')^{1/2}(K_{[l+1]}(t,\epsilon_0))^{1/2}\\
&+C_l(\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_{1,[l+2]}(u')du')^{1/2}\\
&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(t')+\epsilon_0^2\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t'))dt')^{1/2}
\end{aligned}\tag{15.13}
$$

这里我们定义了

$$
K_{[n]}(t,u)=\sum_{m=1}^{n}K_m(t,u)\tag{15.14}
$$

其中 $K_n(t,u)$ 表示如下关于 n 阶变分的积分:

$$
K[\psi](t,u)=-\int_{W_u^t}\frac{\Omega}{2}\omega\nu^{-1}\mu^{-1}(L\mu)_-|\not{d}\psi|^2d\mu_g\tag{15.15}
$$

最后对每个变分 ψ, 我们有如下来自于基本能量估计的误差积分:

$$
\int_{W_{\epsilon_0}^t}\sum_{k=1}^{7}Q_{0,k}[\psi]d\mu_g,\quad\int_{W_{\epsilon_0}^t}\sum_{k=1}^{8}Q_{1,k}[\psi]d\mu_g\tag{15.16}
$$

由 (5.260), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{W_{\epsilon_0}^t}\sum_{k=1}^{8}Q_{1,k}[\psi]d\mu_g\\
\leqslant&-\frac{1}{2}K[\psi](t,\epsilon_0)+CM[\psi](t,\epsilon_0)+\frac{3}{2}L[\psi](t,\epsilon_0)+\int_0^t\tilde{A}(t')\mathcal{E}'_1[\psi](t')dt'
\end{aligned}\tag{15.17}
$$

这里 $M[\psi](t,\epsilon_0)$ 由 (5.257) 给出:

$$
M[\psi](t,\epsilon_0)=\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t)(1+\log(1+t))^4+\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}'^t_1[\psi](u')du'\tag{15.18}
$$

像第五章中那样, 我们把 $-(1/2)K[\psi](t,\epsilon_0)$ 拿到与 ψ 和 K_1 相关的不等式的左端.

对任意变分 ψ, 类似于 (14.109) 和 (14.111), 定义

$$
\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\mathcal{E}_0[\psi](t'))\tag{15.19}
$$

$$
\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}_m^{2a}(t')\mathcal{E}'_1[\psi](t'))\tag{15.20}
$$

注意到 $\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t)$ 和 $\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t)$ 是关于 t 的非减函数.

回忆第八章中关于 $\bar{\mu}_m$ 的定义:

$$\bar{\mu}_m(t) = \min\{\mu_m(t), 1\}, \quad \mu_m(t) = \min_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} \mu = \min_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2} \mu(t, u, \vartheta) \tag{15.21}$$

类似地, 将 $[0, \epsilon_0] \times S^2$ 换成 $[0, u] \times S^2$, 以及 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 换成 Σ_t^u 有

$$\bar{\mu}_{m,u}(t) = \min\{\mu_{m,u}(t), 1\}, \quad \mu_{m,u}(t) = \min_{\Sigma_t^u} \mu = \min_{(u',\vartheta)\in[0,u]\times S^2} \mu(t, u', \vartheta) \tag{15.22}$$

注意到 $\bar{\mu}_{m,u}(t)$ 在每个固定的 t 是 u 的非减函数. 然后我们定义

$$\mathcal{H}'^t_{1;a,q}[\psi](u) = \sup_{t'\in[0,t]} ((1 + \log(1 + t'))^{-2q} \bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t') \mathcal{F}'^{t'}_1[\psi](u)) \tag{15.23}$$

$$V'_{1;a,q}[\psi](t, u) = \int_0^u \mathcal{H}'_{1;a,q}[\psi](u') du' \tag{15.24}$$

注意到在每个固定的 u, $\mathcal{H}'^t_{1;a,q}[\psi](u)$ 是 t 的非减函数, 在每个固定的 t, $V'_{1;a,q}[\psi](t, u)$ 是 u 的非减函数, 并且在每个固定的 u, 它也是 t 的非减函数, 所以对每个 $u \in [0, \epsilon_0]$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^u \mathcal{F}'^t_1[\psi](u') du' &\leqslant \int_0^u \bar{\mu}^{-2a}_{m,u'}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q} \mathcal{H}'^t_{1;a,q}[\psi](u') du' \\ &\leqslant \bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q} V'_{1;a,q}[\psi](t, u)\end{aligned} \tag{15.25}$$

同样定义

$$\mathcal{H}'^t_{1,[n];a,q}(u) = \sup_{t'\in[0,t]} ((1 + \log(1 + t'))^{-2q} \bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t') \mathcal{F}'^{t'}_{1,[n]}(u)) \tag{15.26}$$

$$V'_{1,[n];a,q}(t, u) = \int_0^u \mathcal{H}'^t_{1,[n];a,q}(u') du' \tag{15.27}$$

则在每个固定的 u, $\mathcal{H}'^t_{1,[n];a,q}(u)$ 是 t 的非减函数, 在每个固定的 t, $V'_{1,[n];a,q}(t, u)$ 是 u 的非减函数, 并且在每个固定的 u, 它也是 t 的非减函数, 所以对每个 $u \in [0, \epsilon_0]$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,[n]}(u') du' &\leqslant \int_0^u \bar{\mu}^{-2a}_{m,u'}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q} \mathcal{H}'^t_{1,[n];a,q}(u') du' \\ &\leqslant \bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q} V'_{1,[n];a,q}(t, u)\end{aligned} \tag{15.28}$$

回到 (15.18), 对于右端的第一项有

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t) = \sup_{t'\in[0,t]} \mathcal{E}_0[\psi](t') &\leqslant \sup_{t'\in[0,t]} (\bar{\mu}^{-2a}_m(t')(1 + \log(1 + t'))^{2p} \mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t')) \\ &\leqslant C(1 + \log(1 + t))^{2p} \bar{\mu}^{-2a}_m(t) \mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t)\end{aligned} \tag{15.29}$$

(引理 8.11 的推论 2). 这里我们设

$$q = p + 2 \tag{15.30}$$

这与 (15.6) 相容. 从而由 (15.29) 可以推出 (15.18) 右端的第一项被

$$C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q}\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t) \tag{15.31}$$

界定. 在 (15.25) 中取 $u = \epsilon_0$, 我们可以界定 (15.18) 右端的第二项, 所以有

$$\begin{aligned} M[\psi](t, \epsilon_0) &\leqslant \bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q}(C\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t) + V'_{1;a,q}[\psi](t, \epsilon_0)) \\ &\leqslant \bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q}(C\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t) + V'_{1,[l+2];a,q}(t, \epsilon_0)) \end{aligned} \tag{15.32}$$

对于所有不超过 $l + 2$ 阶的变分都成立.

对于 (15.17) 右端的第三项, 它与临界积分 (15.1) 有关, 所以由引理 8.11 的推论 2 有

$$\begin{aligned} L[\psi](t, \epsilon_0) &\leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t)\int_0^t (1 + t')^{-1}(1 + \log(1 + t'))^{2q-1}dt' \\ &\leqslant \frac{C}{2q}\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q}\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t) \end{aligned} \tag{15.33}$$

最后对于 (15.17) 中的最后一项, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{E}'_1[\psi](t')dt' &\leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(1 + \log(1 + t))^{2q}\int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t')dt' \\ &\leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q}\int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')dt' \end{aligned} \tag{15.34}$$

对所有不超过 $l + 2$ 阶的变分都成立.

回忆与 ψ 和 K_1 相关的积分恒等式 (5.73) ($u = \epsilon_0$), 当中的超曲面积分可以像 (5.267) 那样估计:

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\Sigma_t^{\epsilon_0}} (1/2)\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2 - \int_{\Sigma_0^{\epsilon_0}} (1/2)\Omega(\underline{L}\omega + \underline{\nu}\omega)\psi^2\right| \\ &\leqslant C\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t)(1 + \log(1 + t))^4 \\ &\leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1 + \log(1 + t))^{2q}\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t) \end{aligned} \tag{15.35}$$

这里我们也用到了 (15.29) 和 (15.30).

转向 (15.13). 定义

$$I_{[n];a,q}(t,u)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t')K_{[n]}(t',u)) \tag{15.36}$$

在每个 u, 这是一个关于 t 非减函数. 然后在 (15.28) 中取 $u=\epsilon_0$, 我们可以按如下估计 (15.13):

$$\begin{aligned}&C_l\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}\\&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')+\mathcal{G}'_{1;[l+2];a,q}(t'))dt'\\&+V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+I_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)^{1/2}V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)^{1/2})\end{aligned} \tag{15.37}$$

括号中的最后一项按如下估计:

$$\frac{\delta}{2}I_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+\frac{1}{2\delta}V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0) \tag{15.38}$$

其中 δ 是任意一个正常数, 在后面我们将看到它的选取方式.

最后 (15.11) 被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q}((\mathcal{Y}_0(0)+\mathcal{A}'_{[l]}(0)+\mathcal{B}_{[l+1]}(0))^2\\&+\delta(\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t))+\delta I_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+(1+\frac{1}{\delta})V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0))\end{aligned} \tag{15.39}$$

界定.

我们现在考虑与 K_1 相关的积分等式 (5.73) (取 $u=\epsilon_0$). 它对应于变分 (14.52): $R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha$, $j=1,2,3$, $\alpha=0,1,2,3$, 其中 $(i_1\cdots i_l)$ 是多重指标. 对 j 和 α 求和, 我们由关于临界积分的 (15.2), (15.3), (15.33), 以及关于剩下那些项的 (15.9), (15.32), (15.34), (15.35), (15.37), (15.39) 得到如下估计:

$$\begin{aligned}&(\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}'_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)+\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}_1'^{t}[R_jR_{i_1}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](\epsilon_0)\\&+\frac{1}{2}\sum_{j,\alpha}K[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t,\epsilon_0))\bar{\mu}_m^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\\leqslant\ &C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,q}(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)\\&+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\end{aligned} \tag{15.40}$$

这里,

$$R_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)=\mathcal{D}_{[l+2]}+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)+(1+\frac{1}{\delta})V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+\delta I_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0) \tag{15.41}$$

$\mathcal{D}_{[l+2]}$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{[l+2]}&=\mathcal{E}_{0,[l+2]}(0)+\mathcal{E}'_{1,[l+2]}(0)+(\mathcal{P}_{[l+2]})^2\\ \mathcal{P}_{[l+2]}&=\mathcal{Y}_0(0)+\mathcal{A}'_{[l]}(0)+\mathcal{B}_{\{l+1\}}(0)\\ &\quad+\sum_{i_1\cdots i_l}\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}+\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}}\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\end{aligned} \tag{15.42}$$

同样

$$\bar{A}(t)=\tilde{A}(t)+C_l(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^2 \tag{15.43}$$

这里关键之处是 (15.40) 右端第一项前面的常数 C 不依赖于 a,q,l.

现在我们得到的所有估计都依赖于连续性假设和 **J**, 以及命题 12.6, 12.9, 12.10 中在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上关于初值的假设, 还有 $\epsilon_0\leqslant 1/2$. 如果将 ϵ_0 换成 $u\in(0,\epsilon_0]$, 则所有的估计对 $u\in(0,\epsilon_0]$ 仍然成立. 此时我们将 $\bar{\mu}_m(t)$ 换成 $\bar{\mu}_{m,u}(t)$, 对任意变分 ψ, 将 $\mathcal{E}_0[\psi](t)$ 和 $\mathcal{E}'_1[\psi](t)$ 分别换成 $\mathcal{E}_0^u[\psi](t)$ 和 $\mathcal{E}_1'^u[\psi](t)$. 所以 $\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t)$ 和 $\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t)$ 换成

$$\mathcal{G}^u_{0;a,p}[\psi](t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\mathcal{E}^u_0[\psi](t')) \tag{15.44}$$

$$\mathcal{G}'^u_{1;a,q}[\psi](t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\mathcal{E}'^u_1[\psi](t')) \tag{15.45}$$

并且 ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t)$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,l+2;a,p}(t)$, ${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'_{1,m,l+2;a,p}(t)$ 分别换成

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}^u_{0,l+2;a,p}(t)\\ =&\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}^u_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t'))\end{aligned} \tag{15.46}$$

$$\begin{aligned}&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}^u_{0,m,l+2;a,p}(t)\\ =&\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\sum_{\alpha}\mathcal{E}^u_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t'))\end{aligned} \tag{15.47}$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'^u_{1,l+2;a,q}(t)\\
&= \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}'^u_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t')) \qquad (15.48)\\
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'^u_{1,m,l+2;a,q}(t)\\
&= \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\sum_{\alpha}\mathcal{E}'^u_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t')) \qquad (15.49)
\end{aligned}
$$

同样 $\mathcal{G}_{0,[n];a,p}$, $\mathcal{G}'_{1,[n];a,q}$ 分别换成

$$
\mathcal{G}^u_{0,[n];a,p}(t) = \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\mathcal{E}^u_{0,[n]}(t')) \qquad (15.50)
$$

$$
\mathcal{G}'^u_{1,[n];a,q}(t) = \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2q}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\mathcal{E}'^u_{1,[n]}(t')) \qquad (15.51)
$$

进一步, $\mathcal{D}_{[l+2]}$ 换成 $\mathcal{D}^u_{[l+2]}$. 所以与 (15.40) 类似地, 我们得到, 对 $u\in[0,\epsilon_0]$ 和 $t\in[0,s]$ 有

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}'^u_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)+\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}'^t_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](u)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j,\alpha}K[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t,u))\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant\ & C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'^u_{1,l+2;a,q}(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\\
&+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt' \qquad (15.52)
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
R_{[l+2];a,q}(t,u) = &\ \mathcal{D}^u_{[l+2]}+\mathcal{G}^u_{0,[l+2];a,p}(t)\\
&+(1+\frac{1}{\delta})V'_{1,[l+2];a,q}(t,u)+\delta I_{[l+2];a,q}(t,u) \qquad (15.53)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^u_{[l+2]} &= \mathcal{E}^u_{0,[l+2]}(0)+\mathcal{E}'^u_{1,[l+2]}(0)+(\mathcal{P}^u_{[l+2]})^2\\
\mathcal{P}^u_{[l+2]} &= \mathcal{Y}^u_0(0)+\mathcal{A}'^u_{[l]}(0)+\mathcal{B}^u_{\{l+1\}}(0) \qquad (15.54)\\
&+\sum_{i_1\cdots i_l}\|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma^u_0)}+\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}}\|^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma^u_0)}
\end{aligned}
$$

在 (15.52) 的左边只保留

$$
\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}'^u_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)
$$

我们有

$$\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_1'^u[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)$$
$$\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'^u(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t)$$
$$+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t')dt' \tag{15.55}$$

把 t 换成 $t'\in[0,t]$ 上式仍然成立. 现在在每个 u, (15.55) 的右端是 t 的非减函数. 对关于 t' 的不等式我们可以在右端把 t' 换成 t, 则不等式仍然成立. 在左边对 $t'\in[0,t]$ 取上确界, 由 (15.48) 得到

$${}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t)\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'^u(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t)$$
$$+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t')dt' \tag{15.56}$$

如果将 a 和 q 取得足够大以至于

$$C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})\leqslant\frac{1}{2} \tag{15.57}$$

则 (15.56) 意味着

$$\frac{1}{2}{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{1,l+2;a,q}'^u(t)$$
$$\leqslant C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t)+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}_{1,[l+2];a,q}'^u(t')dt' \tag{15.58}$$

a 和 q 的具体取法将在后面看到.

现在考虑与变分 (14.54) 和 K_1 相关的积分等式. 在每个等式中我们有临界超曲面积分 (14.421), 它被 (14.423) 界定:

$$C(\frac{1}{a-1/2}+\frac{1}{q+1/2})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{1,m,l+2;a,q}'(t) \tag{15.59}$$

我们同样有临界时空积分 (14.470) 被 (14.471) 界定:

$$C(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2q})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2q(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{1,m,l+2;a,q}'(t) \tag{15.60}$$

我们同样要考虑余下的积分项: (14.429) 被 (15.4) 界定, (14.435) 被 (15.5) 界定, (14.474) 被 (15.7) 界定, 以及 (14.476) 被 (15.8) 界定. 将这些组合起来, 我们看到

与变分 (14.54) 和 K_1 相关的最高阶声学量被 (15.9) 界定. 另一方面, 由 (15.9) 和 (15.13) 后面的讨论, 与 (14.54) 和 K_1 相关的, 来自于 (14.14) 中其他项的贡献被 (15.11) 和 (15.13) 界定. 最后我们只剩下了 (15.16), 它可以用与前面相似的方法估计. 所以我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)+\sum_{\alpha}\mathcal{F}_1'^t[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](\epsilon_0)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j,\alpha}K[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t,\epsilon_0))\bar{\mu}_m^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant& C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'_{1,m,l+2;a,q}(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)\\
&+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')dt'
\end{aligned}\tag{15.61}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'^u[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)+\sum_{\alpha}\mathcal{F}_1'^t[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](u)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j,\alpha}K[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t,u))\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant& C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'^u_{1,m,l+2;a,q}(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\\
&+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'
\end{aligned}\tag{15.62}
$$

在 (15.62) 的左端只保留

$$
\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'^u[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\sum_{\alpha}\mathcal{E}_1'^u[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)\\
\leqslant& C(\frac{1}{a}+\frac{1}{q})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'^u_{1,m,l+2;a,q}(t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\\
&+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'
\end{aligned}
$$

由与推出 (15.55)—(15.58) 相同的依据, 我们可以推出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'^u_{1,m,l+2;a,q}(t)\\
\leqslant& C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'
\end{aligned}\tag{15.63}
$$

最后考虑其他直到 $l+2$ 阶的、与 K_1 相关的变分 ψ. 这时我们只有一个临界积分 (15.1), 它被 (15.33) 界定. 由于其他所有的积分都被

$$C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt' \tag{15.64}$$

界定, 所以对每个变分 ψ, 我们都有

$$\begin{aligned}&(\mathcal{E}'^u_1[\psi](t)+\mathcal{F}'^t_1[\psi](u)+\frac{1}{2}K[\psi](t,u))\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\ \leqslant&\frac{C}{2q}\mathcal{G}'^u_{1;a,q}[\psi](t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\\ &+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\end{aligned} \tag{15.65}$$

类似地, 在左端只保留

$$\mathcal{E}'^u_1[\psi](t)$$

并且注意到由 (15.57), 右端第一项的系数 $C/2q$ 不超过 $1/2$, 我们有

$$\begin{aligned}&\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\mathcal{E}'^u_1[\psi](t)\\ \leqslant&\frac{1}{2}\mathcal{G}'^u_{1;a,q}[\psi](t)+C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\\ &+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\end{aligned}$$

将 t 换成 $t'\in[0,t]$, 上述不等式也成立. 在每个 u, 上式右端是关于 t 的非减函数, 如果我们在右端把 t' 换成 t, 则不等式仍然成立. 在左端对 $t'\in[0,t]$ 取上确界, 则由 (15.45), 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathcal{G}'^u_{1;a,q}[\psi](t)\\ \leqslant&C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\end{aligned} \tag{15.66}$$

现在由 $\mathcal{E}'^u_{1,[l+2]}(t)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'^u_{1,[l+2]}(t)=&\sum_{i_1\cdots i_l}(\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}'^u_1[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t))\\ &+\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}}(\sum_{\alpha}\mathcal{E}'^u_1[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t))+\sum_{\psi}\mathcal{E}'^u_1[\psi](t)\end{aligned} \tag{15.67}$$

其中最后一个求和是针对所有直到 $l+2$ 阶的变分 ψ. 注意到对非负函数 $x_1(t),\cdots,$ $x_N(t)$, 我们有

$$\sup_{t'\in[0,t]}\sum_{n=1}^{N}x_n(t')\leqslant\sum_{n=1}^{N}\sup_{t'\in[0,t]}x_n(t') \tag{15.68}$$

所以由 (15.45), (15.48), (15.49), (15.51), 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\leqslant&\sum_{i_1\cdots i_l}{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}'^u_{1,l+2;a,q}(t)\\&+\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}'^u_{1,m,l+2;a,q}(t)+\sum_{\psi}\mathcal{G}'^u_{1;a,q}[\psi](t)\end{aligned}$$

对 (15.58) 关于 $i_1\cdots i_l$ 求和, 对 (15.63) 关于 $i_1\cdots i_{l-m}$ 和 $m=0,\cdots,l$ 求和, 以及对 (15.66) 关于所有直到 $l+2$ 阶的变分 ψ 求和, 然后再将这三个结果相加, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\\&\leqslant C_{q,l}\delta_0\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)+C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C_l\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\end{aligned} \tag{15.69}$$

对常数 C_l 和 $C_{q,l}$ 成立. 我们要求 δ_0 满足

$$C_{q,l}\delta_0\leqslant\frac{1}{4} \tag{15.70}$$

(15.69) 意味着

$$\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\leqslant C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)+C_l\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt' \tag{15.71}$$

由 (15.43), (5.258) 以及命题 13.1, 我们有

$$\int_0^s\bar{A}(t)dt\leqslant C_l\quad\text{不依赖于}\quad s \tag{15.72}$$

由于 $R_{[l+2];a,q}(t,u)$ 在每个固定的 u 是 t 的非减函数, (15.71) 意味着

$$\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)\leqslant C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.73}$$

所以

$$\int_0^t\bar{A}(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\leqslant C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.74}$$

对某个新常数 $C_{q,l}$ 成立.

将 (15.73), (15.74) 代入 (15.52), (15.62) 和 (15.65) 的右端, 忽略左端括号中的第一项, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}_1'^t[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](u)+\frac{1}{2}\sum_{j,\alpha}K[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t,u))\\
&\cdot\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant\ & C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u) \qquad (15.75)\\
&(\sum_{\alpha}\mathcal{F}_1'^t[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](u)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha}K[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t,u))\\
&\cdot\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant\ & C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u) \qquad (15.76)\\
&(\mathcal{F}_1'^t[\psi](u)+\frac{1}{2}K[\psi](t,u))\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant\ & C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u) \qquad (15.77)
\end{aligned}
$$

像 (15.67) 那样求和, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}_{1,[l+2]}'^t(u)+\frac{1}{2}K_{[l+2]}(t,u))\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\\
\leqslant\ & C_{q,l}R_{[l+2];a,q}(t,u)
\end{aligned}
\tag{15.78}
$$

对某个新常数 $C_{q,l}$ 成立. 现在关于 $R_{[l+2];a,q}(t,u)$ 的定义 (15.53) 为

$$
R_{[l+2];a,q}(t,u)=\delta I_{[l+2];a,q}(t,u)+N_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.79}
$$

其中

$$
N_{[l+2];a,q}(t,u)=\mathcal{D}_{[l+2]}^u+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}^u(t)+(1+\frac{1}{\delta})V_{1,[l+2];a,q}'(t,u) \tag{15.80}
$$

在 (15.78) 的左端只保留 $(1/2)K_{[l+2]}(t,u)$, 我们有

$$
\frac{1}{2}\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}K_{[l+2]}(t,u)\leqslant C_{q,l}\delta I_{[l+2];a,q}(t,u)+C_{q,l}N_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.81}
$$

将 t 换为 $t'\in[0,t]$, 上式仍然成立. 在每个 u, 上式右端是 t 的非减函数, 如果在右端把 t' 换成 t, 不等式仍然成立. 在左端对 $t'\in[0,t]$ 取上确界, 则由 (15.36), 我们

得到

$$\frac{1}{2}I_{[l+2];a,q}(t,u)\leqslant C_{q,l}\delta I_{[l+2];a,q}(t,u)+C_{q,l}N_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.82}$$

取 δ 满足

$$C_{q,l}\delta=\frac{1}{4} \tag{15.83}$$

则 (15.82) 意味着

$$I_{[l+2];a,q}(t,u)\leqslant C_{q,l}N_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.84}$$

将 (15.84) 代入 (15.79) 从而得到 (15.78) 中的结果, 并且在 (15.78) 的左端只保留 $\mathcal{F}'^{t}_{1,[l+2]}(u)$, 我们得到

$$\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\mathcal{F}'^{t}_{1,[l+2]}(u)\leqslant C_{q,l}(Q_{[l+2];a,p}(t,u)+V'_{1,[l+2];a,q}(t,u)) \tag{15.85}$$

对某个新常数 $C_{q,l}$ 成立, 其中

$$Q_{[l+2];a,p}(t,u)=\mathcal{D}^{u}_{[l+2]}+\mathcal{G}^{u}_{0,[l+2];a,p}(t) \tag{15.86}$$

注意到在每个 u, (15.85) 的右端是关于 t 的非减函数, 像前面一样, 我们得出

$$\mathcal{H}'^{t}_{1,[l+2];a,q}(u)\leqslant C_{q,l}(Q_{[l+2];a,p}(t,u)+V'_{1,[l+2];a,q}(t,u)) \tag{15.87}$$

由 $V'_{1,[l+2];a,q}(t,u)$ 的定义有

$$\mathcal{H}'^{t}_{1,[l+2];a,q}(u)\leqslant C_{q,l}Q_{[l+2];a,p}(t,u)+C_{q,l}\int_{0}^{u}\mathcal{H}'^{t}_{1,[l+2];a,q}(u')du' \tag{15.88}$$

定义函数

$$\bar{\mathcal{G}}^{u}_{0,[n];a,p}(t)=\sup_{u'\in[0,u]}\mathcal{G}^{u'}_{0,[n];a,p}(t) \tag{15.89}$$

在每个 t 它是 u 的非减函数, 而且在每个 u 它是 t 的非减函数, 在 (15.88) 的右端我们可以将 $Q_{[l+2];a,p}(t,u)$ 替换为

$$\bar{Q}_{[l+2];a,p}(t,u)=\mathcal{D}^{u}_{[l+2]}+\bar{\mathcal{G}}^{u}_{0,[l+2];a,p}(t) \tag{15.90}$$

同样在每个 t 它是 u 的非减函数, 在每个 u 它是 t 的非减函数. 注意到 $[0,\epsilon_0]$ 是一个有界区间, 则由 (15.88) 可以推出

$$\mathcal{H}'^{t}_{1,[l+2];a,q}(u) \leqslant C_{q,l}\bar{Q}_{[l+2];a,p}(t,u) \tag{15.91}$$

对某个新常数 $C_{q,l}$ 成立. 所以有

$$V'_{1,[l+2];a,q}(t,u) \leqslant C_{q,l}\epsilon_0\bar{Q}_{[l+2];a,p}(t,u) \tag{15.92}$$

将这个代入 (15.80) 得到 (15.84) 的结果, 我们有

$$I_{[l+2];a,q}(t,u) \leqslant C_{q,l}\bar{Q}_{[l+2];a,p}(t,u) \tag{15.93}$$

对某个新常数 $C_{q,l}$ 成立. 最后将这个代入 (15.79) 得到 (15.73), 我们有

$$\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+2];a,q}(t) \leqslant C_{q,l}\bar{Q}_{[l+2];a,p}(t,u) \tag{15.94}$$

对某个新常数 $C_{q,l}$ 成立.

15.2 与 K_0 相关的估计

现在考虑与变分 (14.52) 和向量场 K_0 相关的积分等式. 在每个等式中, 我们有临界积分 (14.97), 它被 (14.102) 和 (14.107) 界定:

$$C(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2p})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t) \tag{15.95}$$

我们同样要考虑剩下的那些积分: (14.115) 被 (14.132) 界定, 所以被

$$C_q\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}(\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)+\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)) \tag{15.96}$$

界定, (14.157) 被 (14.158) 界定, 所以同样被 (15.96) 界定. 同样 (14.161) 被 (14.162) 界定, 从而被

$$C_p\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\mathcal{P}_{[l+2]}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)} \tag{15.97}$$

界定. 将这些组合起来, 我们看到, 与变分 (14.52) 和 K_0 相关的最高阶声学量被

$$\begin{aligned}&C_{p,l}\delta_0\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)+\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)}\\&\cdot(\mathcal{P}_{[l+2]}+\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)+\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)})\end{aligned} \tag{15.98}$$

界定.

由 (15.9) 后面的讨论, 来自于 (14.14) 的贡献中, 那些 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 有多余 $(l+1)_*$ 阶导数、但是不包含最高阶声学量的项可以用命题 12.11 和命题 12.12 以及连续性假设界定. 我们得到相关的与 K_0 有关的对误差积分的贡献被

$$\begin{aligned}
&C_l\delta_0\bar{\mu}_m^{-a}(t)(1+\log(1+t))^p(\mathcal{P}_{[l+2]}+\sqrt{\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)})\\
&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')dt'+\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}^t_{0,[l+2]}(u')du')^{1/2}\\
&+C_l\delta_0\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')dt'+C_l\delta_0\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}^t_{0,[l+2]}(u')du'\\
&+C_l(\bar{\mathcal{F}}'^t_{1,[l+2]}(u')du'+\bar{K}_{[l+2]}(t,\epsilon_0))^{1/2}\\
&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')dt'+\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}^t_{0,[l+2]}(u')du')^{1/2}
\end{aligned}\tag{15.99}$$

界定. 最后三项来自于 (14.14) 中最高阶声学量但至少有一个导数是 L 的项 (所以它们可以用 ψ_α 的最高阶导数表示). 这里

$$\mathcal{F}^t_{0,[n]}(u)=\sum_{m=1}^n\mathcal{F}^t_{0,m}(u)\tag{15.100}$$

其中 $\mathcal{F}^t_{0,n}(u)$ 表示与 K_0 相关的 n 阶变分的侧面能量的和. 同样有

$$\bar{\mathcal{F}}'^t_{1,[n]}(u)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-4}\mathcal{F}'^{t'}_{1,[n]}(u))\tag{15.101}$$

$$\bar{K}_{[n]}(t,u)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-4}K_{[n]}(t',u))\tag{15.102}$$

另一方面, 对 (14.14) 中那些 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 至多只有 $(l+1)_*$ 阶导数的项, 即 χ' 至多只有 $(l+1)_*$ 阶空间导数、μ 至多只有 $(l+1)_*+1$ 阶空间导数的项, 我们可以用命题 12.9 和命题 12.10 以及连续性假设来估计它们的 $L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})$ 范数. 这些项的贡献可以用引理 7.6 来估计:

$$\begin{aligned}
&C_l\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')dt'+C_l\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}^t_{0,[l+2]}(u')du'\\
&+C_l(\int_0^{\epsilon_0}\bar{\mathcal{F}}'^t_{1,[l+2]}(u')du'+\bar{K}_{[l+2]}(t,\epsilon_0))^{1/2}\\
&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+2]}(t')dt'+\int_0^{\epsilon_0}\mathcal{F}^t_{0,[l+2]}(u')du')^{1/2}
\end{aligned}\tag{15.103}$$

由 (15.26), (15.36) 以及 (15.30), 我们有, 对 $t' \in [0,t]$,

$$(1+\log(1+t'))^{-4}\mathcal{F}'^{t'}_{1,[n]}(u) \leqslant \bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t')(1+\log(1+t'))^{2p}\mathcal{H}'^{t}_{1,[n];a,q}(u) \tag{15.104}$$

$$(1+\log(1+t'))^{-4}K_{[n]}(t',u) \leqslant \bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t')(1+\log(1+t'))^{2p}I_{[l+2];a,q}(t,u) \tag{15.105}$$

对 $t' \in [0,t]$ 取上确界, 由引理 8.11 的推论 2, 我们得到

$$\bar{\mathcal{F}}'^{t}_{1,[n]}(u) \leqslant C\bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\mathcal{H}'^{t}_{1,[n];a,q}(u) \tag{15.106}$$

$$\bar{K}_{[n]}(t,u) \leqslant C\bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{2p}I_{[n];a,q}(t,u) \tag{15.107}$$

由 (15.27) 以及 $\bar{\mu}_{m,u}(t)$ 在每个 t 是 u 非减函数, 我们有

$$\int_0^u \bar{\mathcal{F}}'^{t}_{1,[n]}(u')du' \leqslant C\bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{2p}V'_{1,[n];a,q}(t,u) \tag{15.108}$$

同样定义

$$\mathcal{H}^{t}_{0,[n];a,p}(u) = \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t')\mathcal{F}^{t'}_{0,[n]}(u)) \tag{15.109}$$

$$V_{0,[n];a,p}(t,u) = \int_0^u \mathcal{H}^{t}_{0,[n];a,p}(u')du' \tag{15.110}$$

则 $\mathcal{H}^{t}_{0,[n];a,p}(u)$ 在每个 u 是 t 的非减函数, $V_{0,[n];a,p}(t,u)$ 在每个 t 是 u 的非减函数, 同时在每个 u 也是 t 的非减函数, 并且对 $u \in [0,\epsilon_0]$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^u \mathcal{F}^{t}_{0,[n]}(u')du' &\leqslant \int_0^u \bar{\mu}^{-2a}_{m,u'}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\mathcal{H}^{t}_{0,[n];a,p}(u')du' \\ &\leqslant \bar{\mu}^{-2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{2p}V_{0,[n];a,p}(t,u)\end{aligned} \tag{15.111}$$

所以我们可以按如下界定 (15.99) 和 (15.103):

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0\bar{\mu}^{-2a}_{m}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\cdot((\mathcal{P}_{[l+2]})^2+\delta'(\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t)+\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)) \\ &+(1+\frac{1}{\delta'})(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,\epsilon_0)) \\ &+\delta'(V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+I_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)))\end{aligned} \tag{15.112}$$

其中 δ' 是待定的正常数.

最后我们要处理 (15.16) 的第一项. 由 (5.282), 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{W^t_{\epsilon_0}} \sum_{k=1}^{7} Q_0[\psi] d\mu_g \\
\leqslant & \int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^4 B_s(t') \bar{\mathcal{E}}'_1[\psi](t') dt' \\
&+ C\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}(\bar{\mathcal{E}}'_1[\psi](t') + \bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t'))dt' + CV_0[\psi](t,\epsilon_0) \\
&+ C(V_0[\psi](t,\epsilon_0) + \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t')dt')^{1/2}(V'_1[\psi](t,\epsilon_0))^{1/2} \\
&+ C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 V'_1[\psi](t',\epsilon_0)dt' \\
&+ C\bar{K}[\psi](t,\epsilon_0)^{1/2}(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t')dt')^{1/2} \\
&+ C\bar{K}[\psi](t,\epsilon_0)^{1/2}(V_0[\psi](t,\epsilon_0))^{1/2}
\end{aligned} \tag{15.113}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_{W^t_{\epsilon_0}} \sum_{k=1}^{7} Q_0[\psi] d\mu_g \\
\leqslant & \int_0^t \tilde{B}_s(t') \bar{\mathcal{E}}'_1[\psi](t') dt' \\
&+ C(1+\frac{1}{\delta'})(\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t')dt' \\
&+ V_0[\psi](t,\epsilon_0)) + \delta' V'_1[\psi](t,\epsilon_0) \\
&+ C\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 V'_1[\psi](t',\epsilon_0)dt' + \delta'\bar{K}[\psi](t,\epsilon_0)
\end{aligned} \tag{15.114}$$

其中

$$\tilde{B}_s(t) = (1+t)^{-2}(1+\log(1+t))^4 B_s(t) + C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-2} \tag{15.115}$$

由于

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{E}}'_1[\psi](t) &= \sup_{t'\in[0,t]} ((1+\log(1+t'))^{-4}\mathcal{E}'_1[\psi](t')) \\
&\leqslant \sup_{t'\in[0,t]} (\bar{\mu}_m^{-2a}(t')(1+\log(1+t'))^{2p}\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t')) \\
&\leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t)
\end{aligned} \tag{15.116}$$

(15.114) 右端第一项被

$$C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\int_0^t \tilde{B}_s(t')\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t')dt' \tag{15.117}$$

界定. 考虑 (15.114) 右端第二项, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\bar{\mathcal{E}}_0[\psi](t')dt' \\ \leqslant\, & C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t')dt' \end{aligned}\tag{15.118}$$

进一步, 定义

$$\mathcal{H}_{0;a,p}^t[\psi](u) = \sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-2p}\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t')\mathcal{F}_0^{t'}[\psi](u)) \tag{15.119}$$

$$V_{0;a,p}[\psi](t,u) = \int_0^u \mathcal{H}_{0;a,p}^t[\psi](u')du' \tag{15.120}$$

与 (15.111) 类似, 我们有

$$V_0[\psi](t,u) = \int_0^u \mathcal{F}_0^t(u')du' \leqslant \bar{\mu}_{m,u}^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}V_{0;a,p}[\psi](t,u) \tag{15.121}$$

考虑到 (15.114) 右端的第三项和第四项, 并且回忆第五章, 我们有

$$V_1'[\psi](t,u) = \int_0^u \bar{\mathcal{F}}_1'^t[\psi](u')du' \tag{15.122}$$

用类似于 (15.106) 的不等式有

$$V_1'[\psi](t,u) \leqslant C\bar{\mu}_{m,u}^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}V'_{1;a,q}[\psi](t,u) \tag{15.123}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 V_1'[\psi](t',\epsilon_0)dt' \\ \leqslant\, & C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2 V'_{1;a,q}[\psi](t',\epsilon_0)dt' \end{aligned}\tag{15.124}$$

考虑最后一项, 与 (15.107) 类似有

$$\bar{K}[\psi](t,\epsilon_0) \leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}I_{a,q}[\psi](t,\epsilon_0) \tag{15.125}$$

其中

$$I_{a,q}[\psi](t,u)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t))^{-2q}\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t')K[\psi](t',u)) \tag{15.126}$$

将上式代入 (15.114), 我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{W_{\epsilon_0}^t}\sum_{k=1}^{7}Q_0[\psi]d\mu_g\\&\leqslant C\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}(\int_0^t\tilde{B}_s(t')\mathcal{G}'_{1;a,q}[\psi](t')dt'+(1+\frac{1}{\delta'})\\&\cdot(\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{G}_{0;a,p}[\psi](t')dt'+V_{0;a,p}[\psi](t,\epsilon_0))\\&+\delta'V'_{1;a,q}[\psi](t,\epsilon_0)+\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2V'_{1;a,q}[\psi](t',\epsilon_0)dt'\\&+\delta'I_{a,q}[\psi](t,\epsilon_0))\end{aligned} \tag{15.127}$$

我们现在考虑与 K_0 相关的积分等式 ((5.74) 中取 $u=\epsilon_0$), 它与变分 (14.52) $R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha$ 相关, $j=1,2,3$, $\alpha=0,1,2,3$, 其中 $(i_1\cdots i_l)$ 是多重指标.

对 j 和 α 求和我们由 (15.95), (15.98), (15.112) 和 (15.127) 得出

$$\begin{aligned}&(\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)+\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}_0^t[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](\epsilon_0))\bar{\mu}_m^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\\&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)+C_{p,l}\mathcal{D}_{[l+2]}\\&+C_{p,l}\delta_0(\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t)+\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t))\\&+C\int_0^t\tilde{B}_s(t')\mathcal{G}'_{1,[l+2];a,q}(t')dt'\\&+C\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2V'_{1,[l+2];a,q}(t',\epsilon_0)dt'\\&+C_l(1+\frac{1}{\delta'})(\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,\epsilon_0))\\&+C_l\delta'(V'_{1,[l+2];a,q}(t,\epsilon_0)+I_{[l+2];a,q}(t,\epsilon_0))\end{aligned} \tag{15.128}$$

代入 (15.92)—(15.94) 得到

$$\begin{aligned}&(\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t)+\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}_0^t[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](\epsilon_0))\bar{\mu}_m^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\\&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}(t)+C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}(t)\\&+C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,\epsilon_0))\end{aligned} \tag{15.129}$$

这里我们用到了命题 13.2:

$$\int_0^s \tilde{B}_s(t)dt \leqslant C \quad \text{不依赖于 } s \tag{15.130}$$

这里关键之处是 (15.129) 右端第一项前面的 C 不依赖于 a, p, l. 并且如果将 ϵ_0 换成 $u \in (0, \epsilon_0]$, (15.129) 仍然成立, 即对 $u \in (0, \epsilon_0]$ 和 $t \in [0, s]$ 有

$$\begin{aligned}
&(\sum_{j,\alpha} \mathcal{E}_0^u[R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t) + \sum_{j,\alpha} \mathcal{F}_0^t[R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha](u))\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p} \\
&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}^u(t) + C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t) \\
&\quad + C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}^u + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.131}$$

在 (15.131) 的左端只保留

$$\sum_{j,\alpha} \mathcal{E}_0^u[R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha] \tag{15.132}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\sum_{j,\alpha} \mathcal{E}_0^u[R_j R_{i_l} \cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t) \\
&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}^u(t) + C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t) \\
&\quad + C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}^u + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.133}$$

把 t 换成 $t' \in [0, t]$, 上式仍然成立. 现在在每个 u, (15.132) 右端是 t 的非减函数. 在右端把 t' 换为 t, 则对应于 t' 的不等式仍然成立. 在左端对 $t' \in [0, t]$ 取上确界, 由 (15.46), 我们得到

$$\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}^u(t) \\
&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}^u(t) + C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t) \\
&\quad + C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}^u + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.134}$$

如果我们取 a 和 p 足够大使得

$$C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p}) \leqslant \frac{1}{2} \tag{15.135}$$

则 (15.133) 意味着

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}^u_{0,l+2;a,p}(t)\\
&\leqslant C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t)\\
&\quad +C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]}+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned}\tag{15.136}
$$

现在考虑与变分 (14.54) 和 K_0 相关的积分等式. 我们有临界积分 (14.178), 被 (14.179) 界定:

$$
C(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2p})\bar{\mu}_m^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p\,(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}(t)\tag{15.137}
$$

我们同样需要考虑剩下的积分: (14.185) 被 (15.96) 界定, (14.198) 被 (14.158) 和 (14.199) 界定, 所以同样被 (15.96) 界定. 我们同样有 (14.199) 被 (14.200) 界定, 从而被 (15.97) 界定. 组合起来我们看到, 所有与 (14.54) 和 K_0 相关的最高阶声学量被 (15.98) 界定. 另一方面, 与 (14.54) 相关的, 来自于 (14.14) 中的其他贡献被 (15.99) 和 (15.103) 界定, 从而被 (15.112) 界定. 最后来自于 (15.16) 第一项的贡献被 (15.127) 界定.

所以我们考虑的积分等式意味着

$$
\begin{aligned}
&(\sum_\alpha\mathcal{E}_0[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)+\sum_\alpha\mathcal{F}_0^t[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](\epsilon_0))\\
&\cdot\bar{\mu}_m^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\\
\leqslant\ & C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,[l+2];a,p}(t)+C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}(t)\\
&+C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,\epsilon_0))
\end{aligned}\tag{15.138}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&(\sum_\alpha\mathcal{E}_0^u[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t)+\sum_\alpha\mathcal{F}_\alpha^t[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](u))\\
&\cdot\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\\
\leqslant\ & C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}^u_{0,m,[l+2];a,p}(t)+C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t)\\
&+C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]}+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned}\tag{15.139}
$$

在 (15.139) 左端只保留

$$\sum_{\alpha} \mathcal{E}_0^u[R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha]$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p} \sum_{\alpha} \mathcal{E}_0^u[R_{i_{l-m}} \cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t) \\
&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}^u_{0,m,l+2;a,p}(t) + C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \\
&\quad C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.140}$$

由于在每个 u, (15.140) 的右端是一个关于 t 的非减函数, 像前面一样, 我们推出

$$\begin{aligned}
&{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}^u_{0,m,l+2;a,p}(t) \\
&\leqslant C(\frac{1}{a}+\frac{1}{p})^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}^u_{0,m,l+2;a,p}(t) + C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \\
&\quad C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.141}$$

取 a 和 p 足够大使得 (15.135) 成立, 这意味着

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}^u_{0,m,l+2;a,p}(t) \\
&\leqslant C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \\
&\quad +C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.142}$$

最后考虑与其他直到 $l+2$ 的变分 ψ 和 K_0 相关的积分等式. 这些等式不包含临界积分, 并且其误差积分被

$$\begin{aligned}
&C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \\
&+C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.143}$$

界定. 所以对每个这样的变分 ψ, 我们有

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_0^u[\psi](t) + \mathcal{F}_0^t[\psi](u))\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p} \\
&\leqslant C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \\
&\quad +C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u))
\end{aligned} \tag{15.144}$$

在 (15.144) 左端只保留

$$\mathcal{E}_0^u[\psi]$$

像前面一样我们可以推出

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}_{0;a,p}^u[\psi](t)\\ \leqslant\ & C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t)\\ &+C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}^u+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,u))\end{aligned}\tag{15.145}$$

由 $\mathcal{E}_{0,[l+2]}^u(t)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{0,[l+2]}^u(t)=&\sum_{i_1\cdots i_l}(\sum_{j,\alpha}\mathcal{E}_0^u[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](t))\\ &+\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}}(\sum_{\alpha}\mathcal{E}_0^u[R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](t))+\sum_{\alpha}\mathcal{E}_0^u[\psi](t)\end{aligned}\tag{15.146}$$

其中最后一项的求和式是针对所有其他直到 $l+2$ 的变分 ψ. 由 (15.68), 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}^u(t)\leqslant&\sum_{i_1\cdots i_l}{}^{(i_1\cdots i_l)}\mathcal{G}_{0,l+2;a,p}^u(t)+\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}}{}^{(i_1\cdots i_{l-m})}\mathcal{G}_{0,m,l+2;a,p}^u(t)\\ &+\sum_{\psi}\mathcal{G}_{0;a,p}^u[\psi](t)\end{aligned}\tag{15.147}$$

所以对 (15.135) 关于 $i_1\cdots i_l$ 求和, 对 (15.142) 关于 $i_1\cdots i_{l-m}$ 和 $m=0,\cdots,l$ 求和, 以及对 (15.145) 关于所有直到 $l+2$ 阶的变分 ψ 求和, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}^u(t)\\ \leqslant\ & C_{p,l}(\delta_0+\delta')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t)\\ &+C_{p,l}(1+\frac{1}{\delta'})(\mathcal{D}_{[l+2]}^u+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,u))\end{aligned}\tag{15.148}$$

对一个新常数 $C_{p,l}$ 成立. 现在要求 δ_0 和 δ' 分别满足

$$C_{p,l}\delta_0\leqslant\frac{1}{8},\quad C_{p,l}\delta'=\frac{1}{8}\tag{15.149}$$

(15.148) 意味着

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathcal{G}_{0,[l+2];a,p}^u(t)\\ \leqslant\ &\frac{1}{4}\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t)+C_{p,l}(\mathcal{D}_{[l+2]}^u+\int_0^t\tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+2];a,p}^u(t')dt'+V_{0,[l+2];a,p}(t,u))\end{aligned}\tag{15.150}$$

对新常数 $C_{p,l}$ 成立. 把 u 换成 $u' \in [0,u]$ 同样成立. 在每个 t, (15.150) 右端是 u 的非减函数. 在右端把 u' 换为 u, 则关于 u' 的不等式仍然成立. 在左端对 $u' \in [0,u]$ 取上确界, 我们由 (15.89) 得到

$$\frac{1}{4}\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + \int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.151}$$

由 (15.130), 以及在每个 u, $V_{0,[l+2];a,p}(t,u)$ 是 t 的非减函数, (15.151) 意味着

$$\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.152}$$

所以

$$\int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t')dt' \leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.153}$$

将 (15.152) 和 (15.153) 代入 (15.131), (15.138) 和 (15.144) 右端, 忽略左端括号中的第一项, 我们得到

$$\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}^t_0[R_jR_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha](u)$$
$$\leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.154}$$
$$\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}^t_0[R_jR_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha](u)$$
$$\leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.155}$$
$$\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\sum_{j,\alpha}\mathcal{F}^t_0[\psi](u)$$
$$\leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.156}$$

像 (15.146) 那样求和:

$$\bar{\mu}^{2a}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\mathcal{F}^t_{0,[l+2]}(u) \leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.157}$$

把 t 换为 $t' \in [0,t]$, 不等式仍然成立, 并且在每个 u, 右端是 t 的非减函数, 在右端把 t' 换为 t, 则关于 t' 的不等式仍然成立. 在左端对 $t' \in [0,t]$ 取上确界, 由定义 (15.109) 有

$$\mathcal{H}^t_{0,[l+2];a,p}(u) \leqslant C_{p,l}(\mathcal{D}^u_{[l+2]} + V_{0,[l+2];a,p}(t,u)) \tag{15.158}$$

回忆 $V_{0,[l+2];a,p}(t,u)$ 的定义,

$$\mathcal{H}^t_{0,[l+2];a,p}(u) \leqslant C_{p,l}\mathcal{D}^u_{[l+2]} + C_{p,l}\int_0^u \mathcal{H}^t_{0,[l+2];a,p}(u')du' \tag{15.159}$$

由于 $[0,\epsilon_0]$ 是一个有界区间, 而 $\mathcal{D}^u_{[l+2]}$ 是一个关于 u 的非减函数, (15.159) 意味着

$$\mathcal{H}^t_{0,[l+2];a,p} \leqslant C_{p,l}\mathcal{D}^u_{[l+2]} \tag{15.160}$$

所以

$$V_{0,[l+2];a,p}(t,u) \leqslant C_{p,l}\epsilon_0\mathcal{D}^u_{[l+2]} \tag{15.161}$$

将这个代入 (15.152), 我们得到

$$\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+2];a,p}(t) \leqslant C_{p,l}\mathcal{D}^u_{[l+2]} \tag{15.162}$$

最后将 (15.161) 代入 (15.90), 得出 (15.91), (15.93), (15.94) 的结果, 我们有

$$\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t), \quad \mathcal{H}'^t_{1,[l+2];a,q}(u), \quad I_{[l+2];a,q}(t,u) \leqslant C_{p,l}\mathcal{D}^u_{[l+2]} \tag{15.163}$$

这就完成了最高阶能量估计.

这时我们可以具体地选择 a 和 p (回忆 (15.30): $q=p+2$). 我们将 a 取成如下形式:

$$a = [a] + \frac{3}{4} \tag{15.164}$$

其中 $[a]$ 表示 a 的整数部分. 我们取 $[a]$ 是满足如下不等式的最小整数:

$$\frac{C}{a} \leqslant \frac{3}{8} \tag{15.165}$$

其中 C 是 (15.57) 和 (15.134) 中较大的那个常数. 然后我们取 p 对同一个 C 满足

$$\frac{C}{p} = \frac{1}{8} \tag{15.166}$$

这样 (15.57) 和 (15.134) 同时成立. 这样 a,p 和 q 就都固定好了. 然后我们取 l 使得

$$l_* \geqslant [a] + 4 \tag{15.167}$$

我们将在后面看到这样取的原因, 所以 l 也被固定住了. 往后我们不再写出对 a,p,q,l 的依赖. 事实上所有的常数只依赖于 H. 我们仍然要求 δ_0 相对于这些常数足够小.

第十六章　递减格式

我们现在考虑分别与 K_0 和 K_1 相对应的能量 $\mathcal{E}_{0,[l+1]}$ 和 $\mathcal{E}'_{1,[l+1]}$. 我们将用刚得到的最高阶的能量估计来推出低一阶能量的估计. 我们将看到比最高阶低一阶的能量满足类似于 (15.160), (15.162) 和 (15.163) 的估计, 但是要把 a 换成

$$b = a - 1 \tag{16.1}$$

p 换成 0, 以及相对应地, q 换成 2.

首先考虑与 $l+1$ 阶变分和 K_1 以及最高阶声学量相关的误差积分. 其主要贡献为:

1) (14.56) ($l+1$ 被 l 替代) 对相应积分 (14.59) 的贡献, 即积分 (14.202) (l 被 $l-1$ 替代):

$$-\int_{W_u^t}(\omega/\nu)(R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi')(T\psi_\alpha)((L+\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha)dt'du'd\mu_{\tilde{\not g}} \tag{16.2}$$

2) (14.57) (l 被 $l-1$ 替代) 对相应积分 (14.59) 的贡献, 即积分 (14.369) (l 被 $l-1$ 替代):

$$\begin{aligned}-\int_{W_u^t}&(\omega/\nu)(T\psi_\alpha)(R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not\Delta\mu)((L+\nu)\\&R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha)dt'du'd\mu_{\tilde{\not g}}\end{aligned} \tag{16.3}$$

其中 $m=0,\cdots,l-1$.

由 (14.294), 积分 (16.2) 被

$$
\begin{aligned}
& C\delta_0 \int_{W_u^t} (1+t')|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||(L+\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dt'du'd\mu_{\not g} \\
\leqslant & C\delta_0 (\int_{W_u^t} |R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'|^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2} \\
& \cdot (\int_{W_u^t} (1+t')^2 |(L+\nu)R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|^2 dt'du'd\mu_{\not g})^{1/2}
\end{aligned}
\tag{16.4}
$$

界定. 最后一个因子被

$$
C(\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,[l+1]}(u')du')^{1/2} \tag{16.5}
$$

界定, 而第一个因子是

$$
(\int_0^t \|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|^2_{L^2(\Sigma^u_{t'})}dt')^{1/2} \tag{16.6}
$$

它用

$$
(\int_0^t (\mathcal{A}'^u_{[l]}(t'))^2 dt')^{1/2} \tag{16.7}
$$

界定. 这里 $\mathcal{A}'^u_{[l]}(t)$ 的定义是在 $\mathcal{A}'_{[l]}(t)$ 的定义中将 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上面的 L^2 范数换成 Σ_t^u 上面的 L^2 范数. 我们在运用命题 12.11 时将 ϵ_0 换成 u, 从而 $\mathcal{A}'^u_{[l]}(t)$ 被

$$
C(1+t)^{-1}\int_0^t (1+t')^{-1}(\mathcal{W}^u_{[l+2]}(t')+\mathcal{W}^{Qu}_{[l+1]}(t'))dt' \tag{16.8}
$$

界定. 现在我们有

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{W}^u_{[l+2]}(t)+\mathcal{W}^{Qu}_{[l+1]}(t) \leqslant C\bar{\mu}_{m,u}^{-1/2}\sqrt{\mathcal{E}'^u_{1,[l+2]}(t)} \\
\leqslant & C\bar{\mu}_{m,u}^{-a-1/2}(t)(1+\log(1+t))^q\sqrt{\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)}
\end{aligned}
\tag{16.9}
$$

所以 (16.8) 被

$$
\begin{aligned}
& C(1+t)^{-1}\sqrt{\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)}\int_0^t (1+t')^{-1}\bar{\mu}_{m,u}^{-a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^q dt' \\
\leqslant & C(1+t)^{-1}\sqrt{\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)}J^u_{a,q-1}(t) \\
\leqslant & C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{q+1}\bar{\mu}_{m,u}^{-a+1/2}(t)\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}
\end{aligned}
\tag{16.10}
$$

界定. 这里 $J^u_{a,q}(t)$ 是在 (14.147) 中将 ϵ_0 换成 u, 并且我们用到了 (14.153) (ϵ_0 换成 u) 以及 (15.163). 所以 (16.8) 对 (16.7) 的贡献被

$$C\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\left(\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2q+2}\bar{\mu}^{-2a+1}_{m,u}(t')dt'\right)^{1/2} \tag{16.11}$$

界定, 最后一个积分可以用导出 (14.115) 的方法估计 (ϵ_0 被 u 替代). 在 (15.28) 中将 a 换成 b, q 换成 2, 我们有

$$\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,[l+1]}(u')du' \leqslant \bar{\mu}^{-2b}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^4 V'_{1,[l+1];b,2}(t,u) \tag{16.12}$$

我们得出 (16.4) 被

$$C\delta_0\bar{\mu}^{-2b}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^2\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\sqrt{V'_{1,[l+1];b,2}(t,u)} \tag{16.13}$$

界定, 其中 b 由 (16.1) 定义.

由 (14.294), (16.3) 被

$$\begin{aligned}
&C\delta_0\int_{W^t_u}(1+t')|R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu||(L+\nu)R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dt'du'd\mu_{\not{g}}\\
&\leqslant C\delta_0\left(\int_{W^t_u}|R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu|^2dt'du'd\mu_{\not{g}}\right)^{1/2}\\
&\cdot\left(\int_{W^t_u}(1+t')^2|(L+\nu)R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|^2dt'du'd\mu_{\not{g}}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{16.14}$$

界定. 最后一个因子被 (16.5) 界定, 而第一个因子为

$$\left(\int_0^t \|R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu\|^2_{L^2(\Sigma^u_{t'})}dt'\right)^{1/2} \tag{16.15}$$

它被

$$\left(\int_0^t (1+t')^{-4}(\mathcal{B}^u_{[m,l+1]}(t'))^2dt'\right)^{1/2} \tag{16.16}$$

界定. 这里 $\mathcal{B}^u_{[m,l+1]}(t)$ 的定义是在 $\mathcal{B}_{[m,l+1]}(t)$ 的定义中将 $\Sigma^{\epsilon_0}_t$ 上面的 L^2 范数换成 Σ^u_t 上面的 L^2 范数. 在运用命题 12.12 时将 ϵ_0 换成 u, 从而 $\mathcal{B}^u_{[m,l+1]}(t)$ 被

$$C(1+t)\int_0^t (1+t')^{-1}(\mathcal{W}^u_{\{l+2\}}(t')+\mathcal{W}^{Qu}_{\{l+1\}}(t'))dt' \tag{16.17}$$

界定. 现在我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}^u_{\{l+2\}}(t)+\mathcal{W}^{Qu}_{\{l+1\}}(t)\\
&\leqslant C\bar{\mu}^{-1/2}_{m,u}\left(\sqrt{\mathcal{E}'^u_{1,[l+2]}(t)}+\sqrt{\mathcal{E}^u_{0,[l+2]}(t)}\right)\\
&\leqslant C\bar{\mu}^{-a-1/2}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^q\left(\sqrt{\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)}+\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+2];a,p}(t)}\right)
\end{aligned} \tag{16.18}$$

所以 (16.17) 被

$$\begin{aligned}
&C(1+t)(\sqrt{\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)}+\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+2];a,p}(t)})\\
&\cdot\int_0^t(1+t')^{-1}\bar{\mu}_{m,u}^{-a-1/2}(t')(1+\log(1+t'))^q dt'\\
\leqslant\ &C(1+t)(\sqrt{\mathcal{G}'^u_{1,[l+2];a,q}(t)}+\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+2];a,p}(t)})J^u_{a,q-1}\\
\leqslant\ &C(1+t)(1+\log(1+t))^{q+1}\bar{\mu}_{m,u}^{-a+1/2}(t)\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}
\end{aligned}\tag{16.19}$$

界定, 其中我们用到了 (15.162), (15.163). 从而 (16.17) 对 (16.16) 贡献被

$$C\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2q+2}\bar{\mu}_{m,u}^{-2a+1}(t')dt')^{1/2}\leqslant\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\bar{\mu}_{m,u}^{-a+1}(t)\tag{16.20}$$

界定. 由 (16.12), (16.14) 被

$$C\delta_0\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)(1+\log(1+t))^2\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\sqrt{V'_{1,[l+1];b,2}(t,u)}\tag{16.21}$$

界定, 其中 b 由 (16.1) 定义.

我们接下来考虑与 $l+1$ 阶变分和 K_0 以及最高阶声学量相关的误差积分. 其主要贡献为:

1) (14.56) ($l+1$ 被 l 替代) 对相应积分 (14.62) 的贡献, 即 (14.63) 左端的积分 ($l+1$ 被 l 替代, 以及 ϵ_0 被 u 替代):

$$\int_{W^t_u}|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||T\psi_\alpha||\underline{L}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dt'du'd\mu_{\tilde{\not g}}\tag{16.22}$$

2) (14.57) (l 被 $l-1$ 替代) 对相应积分 (14.62) 的贡献, 即积分 (14.162) (l 被 $l-1$ 替代):

$$\int_{W^t_u}|R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not\Delta\mu||T\psi_\alpha||\underline{L}R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dt'du'd\mu_{\tilde{\not g}}\tag{16.23}$$

由 (14.294), (16.22) 被

$$\begin{aligned}
&C\delta_0\int_{W^t_u}(1+t')^{-1}|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'||\underline{L}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha|dt'du'd\mu_{\not g}\\
\leqslant\ &C\delta_0\int_0^t(1+t')^{-1}\|R_{i_l}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma^u_{t'})}\|\underline{L}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma^u_{t'})}dt'
\end{aligned}\tag{16.24}$$

界定. 对右端被积函数的第一个因子代入 (16.10), 注意到关于 b 的定义 (16.1) 以及

$$\|\underline{L}R_{i_l}\cdots R_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_t^u)} \leqslant C\sqrt{\mathcal{E}^u_{0,[l+1]}(t)} \leqslant C\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t)\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)} \tag{16.25}$$

我们得出 (16.24) 被

$$\begin{aligned}&C\delta_0\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)}\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{q+1}\bar{\mu}^{-2b-1/2}_{m,u}(t')dt'\\ \leqslant\ &C\delta_0\bar{\mu}^{-2b+1/2}_{m,u}(t)\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)}\end{aligned} \tag{16.26}$$

界定, 最后一个积分可以用与 (14.115) 类似的方法估计.

由 (14.294), (15.23) 被

$$\begin{aligned}&C\delta_0\int_{W_u^t}(1+t')^{-1}|R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu||\underline{L}R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha|dt'du'd\mu_{\not{g}}\\ \leqslant\ &C\delta_0\int_0^t(1+t')^{-1}\|R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not{\Delta}\mu\|_{L^2(\Sigma_{t'}^u)}\\ &\cdot\|\underline{L}R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^u)}dt'\end{aligned} \tag{16.27}$$

界定. 对于被积函数中的第一个因子, 我们代入 (16.19) (乘以 $C(1+t)^{-2}$) 并且注意到定义 (16.1) 以及

$$\|\underline{L}R_{i_{l-1-m}}\cdots R_{i_1}(T)^{m+1}\psi_\alpha\|_{L^2(\Sigma_{t'}^u)} \leqslant C\sqrt{\mathcal{E}^u_{0,[l+1]}(t)} \leqslant C\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t)\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)} \tag{16.28}$$

我们得出 (16.27) 被

$$\begin{aligned}&C\delta_0\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)}\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{q+1}\bar{\mu}^{-2b-1/2}_{m,u}(t')dt'\\ \leqslant\ &C\delta_0\bar{\mu}^{-2b+1/2}_{m,u}(t)\sqrt{\mathcal{D}^u_{[l+2]}}\sqrt{\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)}\end{aligned} \tag{16.29}$$

界定, 这个界与 (16.26) 形式相同.

现在考虑与 $l+1$ 阶变分和 K_1, K_0 以及来自于 (14.14) 余下那些项中的误差积分 ($l+2$ 替换成 $l+1$). 由 (15.9) 后面的讨论, 在 K_1 的情形, 这些贡献当中, ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 包含多于 $(l+1)_*$ 阶导数的项可以用命题 12.11 和 12.12 以及连续性假设估计, 形式如 (15.11), 从而估计形如 (15.39) ((($[l+2];a,q$) 被 ($[l+1];b,2$) 替代; ϵ_0 被 u 替代), 所以被

$$\begin{aligned}&C_l\delta_0\bar{\mu}^{-2b}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^4(\mathcal{D}^u_{[l+2]}+\delta(\mathcal{G}'^u_{1,[l+1];b,2}(t)+\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t))\\ &+\delta I_{[l+1];b,2}(t,u)+(1+\frac{1}{\delta})V'_{1,[l+1];b,2}(t,u))\end{aligned} \tag{16.30}$$

界定, 而在 K_0 的情形, 估计形如 (15.99), 从而形如 (15.112) ((($[l+2]$; a,p) 被 ($[l+1]$; $b,0$) 替代; ϵ_0 被 u 替代), 所以被

$$C_l\delta_0\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)(\mathcal{D}_{[l+2]}^u+\delta'(\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}'^u(t)+\mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^u(t))$$
$$+(1+\frac{1}{\delta'})(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^u(t')dt'+V_{0,[l+1];b,0}(t,u))$$
$$+\delta'(V_{1,[l+1];b,2}'(t,u)+I_{[l+1];b,2}(t,u))) \tag{16.31}$$

界定. 在 (16.30), (16.31) 中正常数 δ, δ' 的取法将在后面看到. 事实上, (16.30) 和 (16.31) 同样可以界定分别与 K_1 和 K_0 以及直到 l 阶的变分相关的误差积分, 其中 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 上的导数多于 $(l+1)_*$.

另一方面, 在 K_1 的情形, 那些 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 上导数不足 $(l+1)_*$ 阶的贡献被 (15.13) ($[l+2]$ 被 $[l+1]$ 替代; ϵ_0 被 u 替代) 界定:

$$C\int_0^u\mathcal{F}_{1,[l+1]}'^t(u')du'+C(\int_0^u\mathcal{F}_{1,[l+1]}'^t(u')du')^{1/2}(K_{[l+1]}(t,u))^{1/2}$$
$$+C(\int_0^u\mathcal{F}_{1,[l+1]}'^t(u')du')^{1/2}$$
$$\cdot(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\mathcal{E}_{1,[l+1]}'^u(t')+u^2\mathcal{E}_{0,[l+1]}^u(t'))dt')^{1/2}$$
$$\leqslant C\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)(1+\log(1+t))^4(V_{1,[l+1];b,2}'+(V_{1,[l+1];b,2}'(t,u))^{1/2}(I_{[l+1];b,2}(t,u))^{1/2}$$
$$+(V_{1,[l+1];b,2}'(t,u))^{1/2}$$
$$\cdot(\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^2(\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}'^u(t')+\mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^u(t'))dt')^{1/2}) \tag{16.32}$$

在 K_0 的情形, 被 (15.103) 界定 ($[l+2]$ 被 $[l+1]$ 替代; ϵ_0 被 u 替代):

$$C\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+1]}^u(t')dt'+C\int_0^u\mathcal{F}_{0,[l+1]}^t(u')du'$$
$$+C(\int_0^u\bar{\mathcal{F}}_{1,[l+1]}'^t(u')du')^{1/2}(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+1]}^u(t')dt'+\int_0^u\mathcal{F}_{0,[l+1]}^t(u')du')^{1/2}$$
$$+C(\bar{K}_{[l+1]}(t,u))^{1/2}(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{E}_{0,[l+1]}^u(t')dt'+\int_0^u\mathcal{F}_{0,[l+1]}^t(u')du')^{1/2}$$
$$\leqslant C\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^u(t')dt'+V_{0,[l+1];b,0}(t,u)$$
$$+(V_{1,[l+1];b,2}'(t,u)+I_{[l+1];b,2}(t,u))^{1/2}$$
$$\cdot(\int_0^t(1+t')^{-3/2}\mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^u(t')dt'+V_{0,[l+1];b,0}(t,u))^{1/2}) \tag{16.33}$$

最终, 对每个直到 $l+1$ 阶的变分 ψ, 我们有误差积分 (15.16). 首先考虑与 K_1 相关的积分. 对 (15.17) 关于所有变分求和, 我们得到

$$\sum_{\psi}\int_{W_u^t}\sum_{k=1}^{8}Q_{1,k}[\psi]d\mu_g \leqslant -\frac{1}{2}K_{[l+1]}(t,u)+CM_{[l+1]}(t,u)+\frac{3}{2}L_{[l+1]}(t,u)$$
$$+\int_0^t \tilde{A}(t')\mathcal{E}'^u_{1,[l+1]}(t')dt' \tag{16.34}$$

这里

$$M_{[l+1]}(t,u)=\sum_{\psi}M[\psi](t,u), \quad L_{[l+1]}(t,u)=\sum_{\psi}L[\psi](t,u) \tag{16.35}$$

由 (15.18) 和 (15.29) ((a,p) 被 $(b,0)$ 替代), 注意到我们只有有限多个变分, 我们得到

$$M_{[l+1]}(t,u)\leqslant C(1+\log(1+t))^4\sup_{t'\in[0,t]}\mathcal{E}^u_{0,[l+1]}(t')+\int_0^u \mathcal{F}'^t_{1,[l+1]}(u')du'$$
$$\leqslant \bar{\mu}^{-2b}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^4(C\mathcal{G}^u_{0;b,0}(t)+V'_{1,[l+1];b,2}(t,u)) \tag{16.36}$$

同样由 (15.1) 有

$$L_{[l+1]}(t,u)=\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-1}\mathcal{E}'^u_{1,[l+1]}(t')dt' \tag{16.37}$$

为了恰当地估计这个临界积分, 我们要用下述这个引理 8.11 的推论 2 的变体:

推论 2 的变体 设 b 是一个正常数, k 是任意一个比 1 大的常数. 则如果 δ_0 足够小 (依赖于 b 的上界, 以及比 1 大的 k 的下界), 对 $t'\in[0,t]$, $t\in[1,s]$ 和 $u\in(0,\epsilon_0]$, 我们有

$$\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t')\leqslant k\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t)$$

证明 为了证明这个, 我们回到推论 2 的证明. 接下来在证明中我们将 a 取成一个足够大的常数, 与最高阶能量中的 a 没有关系. 在情形 1, (8.322) 成立, 所以

$$\frac{\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t')}{\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t)}\leqslant(1-C\delta_0)^{-b}\leqslant k \tag{16.38}$$

前提是 δ_0 足够小, 它依赖于 b 的上界和一个比 1 大的 k 的下界. 在子情形 2a, 下界 (8.273) (ϵ_0 被 u 替代) 对任意给定的 a 成立, 前提是 $a\delta_0$ 足够小, 所以

$$\frac{\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t')}{\bar{\mu}^{-b}_{m,u}(t)}\leqslant(1-\frac{2}{a})^{-b}\leqslant k \tag{16.39}$$

前提是 a 足够大 (依赖于 b 的上界和比 1 大的 k 的下界). 在子情形 2b, 下界 (8.303) 以及上界 (8.312) (ϵ_0 被 u 替代) 对任意给定的 a 成立, 前提是 $a\delta_0$ 足够小, 所以

$$\frac{\bar{\mu}_{m,u}^{-b}(t')}{\bar{\mu}_{m,u}^{-b}(t)} \leqslant \left(\frac{1-\frac{2}{a}}{1+\frac{2}{a}}\right)^{-b}\left(\frac{1-\delta_1\tau}{1-\delta_1\tau'}\right)^{b} \leqslant \left(\frac{1-\frac{2}{a}}{1+\frac{2}{a}}\right)^{-b} \leqslant k \tag{16.40}$$

前提是 a 足够大 (依赖于 b 的上界和比 1 大的 k 的下界). 所以我们就建立了推论 2 的变体. □

在上述推论 2 的变体中设

$$k = \sqrt{\frac{4}{3}} \tag{16.41}$$

然后我们接下来估计 $L_{[l+1]}(t,u)$. 由 (16.38) 和定义 (14.111) ((a,q) 被 $(b,2)$ 替代),

$$\begin{aligned} L_{[l+1]}(t,u) &\leqslant \int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3 \bar{\mu}_{m,u}^{-2b}\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}^{\prime u}(t')dt' \\ &\leqslant \frac{4}{3}\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}^{\prime u}(t)\int_0^t (1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^3 dt' \\ &\leqslant \frac{1}{3}\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)(1+\log(1+t))^4\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}^{\prime u}(t) \end{aligned} \tag{16.42}$$

现在考虑与 K_1 和直到 $l+1$ 的变分 ψ 有关的积分恒等式 (5.73). 在每个等式中我们有超曲面上的积分, 它按照 (15.35) ((a,p) 被 $(b,0)$ 替代; ϵ_0 被 u 替代) 的方式由

$$C\bar{\mu}_{m,u}^{-2b}(t)(1+\log(1+t))^4\mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^{u}(t) \tag{16.43}$$

界定. 对所有这些变分求和, 我们由 (16.42), 以及 (16.13), (16.21), (16.30), (16.32), (16.34), (16.36) 得到

$$\begin{aligned} &(\mathcal{E}_{1,[l+1]}^{\prime u}(t) + \mathcal{F}_{1,[l+1]}^{\prime t}(u) + \frac{1}{2}K_{[l+1]}(t,u))\bar{\mu}_{m,u}^{2b}(t)(1+\log(1+t))^{-4} \\ \leqslant & \frac{1}{2}\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}^{\prime u}(t) + C\delta_0\delta\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}^{\prime u}(t) \\ &+CR'_{[l+1];b,2}(t,u) + C\int_0^t \bar{A}(t')\mathcal{G}_{1,[l+1];b,2}^{\prime u}(t')dt' \end{aligned} \tag{16.44}$$

这里 δ 是任意一个正常数 (δ 的取法将在后面可以看到), 以及

$$R'_{[l+1];b,2} = \mathcal{D}_{[l+2]}^{u} + \mathcal{G}_{0,[l+1];b,0}^{u}(t) + (1+\frac{1}{\delta})V'_{1,[l+1];b,2}(t,u) + \delta I_{[l+1];b,2}(t,u) \tag{16.45}$$

在 (16.44) 左端的括号中只保留 $\mathcal{E}'^{u}_{1,[l+1]}(t)$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}^{2b}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{E}'^{u}_{1,[l+1]}(t)\\
\leqslant &\frac{1}{2}\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t)+C\delta_0\delta\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t)\\
&+CR'_{[l+1];b,2}(t,u)+C\int_0^t \bar{A}(t')\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t')dt'
\end{aligned}\tag{16.46}$$

由于上式右端是 t 的非减函数, 像上一章那样我们可以推出

$$\frac{1}{3}\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t)\leqslant CR'_{[l+1];b,2}(t,u)+C\int_0^t \bar{A}(t')\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t')dt'\tag{16.47}$$

前提是

$$C\delta_0\delta\leqslant\frac{1}{6}\tag{16.48}$$

我们像推出 (15.71) 到 (15.73), (15.74) 那样, 得到

$$\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t)\leqslant CR'_{[l+1];b,2}(t,u)\tag{16.49}$$

$$\int_0^t \bar{A}(t')\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t')dt'\leqslant CR'_{[l+1];b,2}(t,u)\tag{16.50}$$

将这些代入 (16.44) 的右端, 并且忽略左端括号中的第一项, 我们得到

$$(\mathcal{F}'^{t}_{1,[l+1]}(u)+\frac{1}{2}K_{[l+1]}(t,u))\bar{\mu}^{2b}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-4}\leqslant CR'_{[l+1];b,2}(t,u)\tag{16.51}$$

我们可以像推出 (15.78) 到 (15.91)—(15.94) 那样, 取 δ 满足

$$C\delta=\frac{1}{4}\tag{16.52}$$

用这种方法我们得到如下估计:

$$\mathcal{G}'^{u}_{1,[l+1];b,2}(t),\quad \mathcal{H}'^{t}_{1,[l+1];b,2}(u),\quad I_{[l+1];b,2}(t,u)\leqslant C\bar{Q}'_{[l+1];b,2}(t,u)\tag{16.53}$$

$$V'_{1,[l+1];b,2}(t,u)\leqslant C\epsilon_0\bar{Q}'_{[l+1];b,2}(t,u)\tag{16.54}$$

其中

$$\bar{Q}'_{[l+1];b,2}(t,u)=\mathcal{D}^{u}_{[l+2]}+\bar{\mathcal{G}}^{u}_{0,[l+1];b,0}(t)\tag{16.55}$$

最后考虑与 K_0 和直到 $l+1$ 的变分 ψ 有关的积分等式 (5.74). 在每个等式中我们有 (15.16) 的第一项. 对 (15.127) 关于所有这样的变分求和我们得到 (这里只有有限多个变分)

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{m,u}^{2b}(t)\sum_{\psi}\int_{W_u^t}\sum_{k=1}^{7}Q_0[\psi]d\mu_g \\
\leqslant\ & C\int_0^t \tilde{B}_s(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+1];b,2}(t')dt' \\
&+(1+\frac{1}{\delta'})(\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t')dt'+V_{0,[l+1];b,0}(t,u)) \\
&+C\delta' V'_{1,[l+1];b,2}(t,u)+C\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{-2}V'_{1,[l+1];b,2}(t',u)dt' \\
&+C\delta' I_{[l+1];b,2}(t,u)
\end{aligned}
\tag{16.56}
$$

这里, 像 (16.31) 那样, δ' 是任意一个正常数. 对所有这样的变分求和, 我们由 (16.26), (16.29), (16.31), (16.33), (16.56) 得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{E}^u_{0,[l+1]}(t)+\mathcal{F}^t_{0,[l+1]}(t))\bar{\mu}_{m,u}^{2b}(t) \\
\leqslant\ & C\delta_0\delta'(\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)+\mathcal{G}'^u_{1,[l+1];b,2}(t))+C(1+\frac{\delta_0}{\delta'})\mathcal{D}^u_{[l+2]} \\
&+C\int_0^t \tilde{B}_s(t')\mathcal{G}'^u_{1,[l+1];b,2}(t')dt' \\
&+C(1+\frac{1}{\delta'})\int_0^t(1+t')^{-1}(1+\log(1+t'))^{-2}\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t')dt' \\
&+C\delta' V'_{1,[l+1];b,2}(t,u)+C\int_0^t(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^{2}V'_{1,[l+1];b,2}(t',u)dt' \\
&+C(1+\frac{1}{\delta'})V_{0,[l+1];b,0}(t,u)+C\delta' I_{[l+1];b,2}(t,u)
\end{aligned}
\tag{16.57}
$$

在右端代入 (16.53)—(16.55) 得

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{E}^u_{0,[l+1]}(t)+\mathcal{F}^t_{0,[l+1]}(u))\bar{\mu}_{m,u}^{2b}(t) \\
\leqslant\ & C\delta'\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t)+C(1+\frac{\delta_0}{\delta'})\mathcal{D}^u_{[l+2]}+C(1+\frac{1}{\delta'})\int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t')dt' \\
&+C(1+\frac{1}{\delta'})V_{0,[l+1];b,0}(t,u)
\end{aligned}
\tag{16.58}
$$

在 (16.58) 左端的括号中只保留 $\mathcal{E}^u_{0,[l+1]}(t)$, 并注意到右端是关于 t 的非减函数 (在每个固定的 u), 我们可以在左端将 t 替换为 $t'\in[0,t]$ 而在右端保持 t 不动, 关于

$t' \in [0,t]$ 取上确界, 我们由 (15.50) 得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}^u_{0,[l+1];b,0}(t)\\
&\leqslant C\delta'\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t) + C(1+\frac{\delta_0}{\delta'})\mathcal{D}^u_{[l+2]}\\
&\quad + C(1+\frac{1}{\delta'})\int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t')dt' + C(1+\frac{1}{\delta'})V_{0,[l+1];b,0}(t,u)
\end{aligned} \tag{16.59}$$

现在取 δ' 使得

$$C\delta' = \frac{1}{2} \tag{16.60}$$

则由于 (16.59) 右端是 u 的非减函数, (16.59) 意味着

$$\frac{1}{2}\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t) \leqslant C\mathcal{D}^u_{[l+2]} + C\int_0^t \tilde{B}_s(t')\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t')dt' + CV_{0,[l+1];b,0}(t,u) \tag{16.61}$$

对新常数 C 成立. 我们可以像从 (15.151) 推出 (15.160)—(15.162) 那样得出如下估计:

$$\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1];b,0}(t), \quad \mathcal{H}^t_{0,[l+1];b,0}(u) \leqslant C\mathcal{D}^u_{[l+2]} \tag{16.62}$$

最终将 (16.62) 代入 (16.55) 得出 (16.53) 中的结果, 我们有

$$\mathcal{G}'^u_{1,[l+1];b,2}(t), \quad \mathcal{H}'^t_{1,[l+1];b,2}(u), \quad I_{[l+1];b,2}(t,u) \leqslant C\mathcal{D}^u_{[l+2]} \tag{16.63}$$

这样我们就得到关于直到 $l+1$ 阶变分的估计.

我们按如上方式继续, 在第 n 步时分别取

$$a_n = a - n \quad 和 \quad b_n = a_n - 1 = a - (n+1) = a_{n+1} \tag{16.64}$$

代替 a 和 b, 我们设从 (16.1) 那一段到 (16.62), (16.63) 那一段为第 0 步. 对 $n \geqslant 1$, 我们分别用 2 和 0 取代 q 和 p. 第 n 步和上述第 0 步相同, 只要 $b_n > 0$, 即 $n \leqslant [a]-1$. 在 (16.10) 和 (16.19) 中估计 $J^u_{a_n,1}$ 以及

$$\int_0^t (1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^6 \bar{\mu}_{m,u}^{-2a_n+1}(t')dt' \tag{16.65}$$

时 ($n \geqslant 1$), 我们将用类似于推导 (14.147)—(14.153) 的方法推导 $J^u_{a_n,1}$; 用推导 (14.115)—(14.131) 的方法估计 (16.65). 当我们用到引理 8.11 时, 我们是指在引理 8.11 中将 a 取成 4. 所以在情形 1, (14.116) 成立, 从而

$$\bar{\mu}_{m,u}^{-2a_n-1}(t) \leqslant C \tag{16.66}$$

对 $t \in [0,s]$ 成立, 因为 a_n 有一个固定的上界 a. 同样第二种情形的两种子情形按如下

$$t_1 = e^{\frac{1}{8\delta_1}} - 1 \tag{16.67}$$

划分, 在子情形 2a 我们有下界

$$\bar{\mu}_{m,u}(t') \geqslant \frac{1}{2} \tag{16.68}$$

取代 (14.121), 所以有

$$\bar{\mu}_{m,u}^{-2a_n-1}(t') \leqslant C \tag{16.69}$$

而在子情形 2b, 我们有下界

$$\bar{\mu}_{m,u} \geqslant \frac{1}{2}(1-\delta_1\tau'), \quad \tau' = \log(1+t') \tag{16.70}$$

取代 (14.124), 以及上界 (8.312)

$$\bar{\mu}_m(t) \leqslant \frac{7}{4}(1-\delta_1\tau) \tag{16.71}$$

在引理 8.11 的证明中将 a 设为 4, 这意味着

$$\bar{\mu}_{m,u}^{-2a_n} \geqslant \frac{1}{C}(1-\delta_1\tau)^{-2a_n} \quad \tau = \log(1+t) \tag{16.72}$$

注意到 a_n 有一个固定的上界. 所以在子情形 2b, 类似于 (14.151) 有

$$\begin{aligned} J_{a_n,1}^u(t) - J_{a_n,1}^u(t_1) &\leqslant C(1+\tau)^2 \int_{\tau_1}^{\tau} (1-\delta_1\tau')^{-a_n-1/2} d\tau' \\ &\leqslant \frac{C}{\delta_1} \frac{(1+\tau)^2}{(a_n-\frac{1}{2})} (1-\delta_1\tau)^{-a_n+1/2} \\ &\leqslant C\frac{(1+\log(1+t))^3}{(a_n-\frac{1}{2})} \bar{\mu}_{m,u}^{-a_n+1/2} \end{aligned} \tag{16.73}$$

这里 a_n 的作用与 a 略有不同.

由于对 $n \leqslant [a]$ 有

$$a_n - \frac{1}{2} \geqslant a_{[a]} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{16.74}$$

(16.74) 中的分母有一个正的下界 (对 $n=[a]$ 也成立), 所以将子情形 2a 和情形 1 的结论结合起来有

$$J_{a_n,1}^u(t) \leqslant C(1+\log(1+t))^3 \bar{\mu}_{m,u}^{-a_n+1/2} \tag{16.75}$$

对 $n=1,\cdots,[a]$ 成立.

同样对 $n \leqslant [a]-1$, 从而 $a_n \geqslant 7/4$, 我们在子情形 2b, 关于 (16.65) 有类似于 (14.126) 的结论:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t}(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^6(1-\delta_1\tau')^{-2a_n+1}dt' \\
\leqslant\ & C(1+t_1)^{-1}(1+\log(1+t_1))^6\int_{\tau_1}^{\tau}(1-\delta_1\tau')^{-2a_n+1}d\tau' \\
\leqslant\ & C(1+t_1)^{-1}\frac{(1+\log(1+t_1))^6}{\delta_1}\frac{(1-\delta_1\tau)^{-2a_n+2}}{2(a_n-1)} \\
\leqslant\ & C(1+t_1)^{-1}(1+\log(1+t_1))^7\frac{(1-\delta_1\tau)^{-2(a_n-1)}}{2(a_n-1)} \\
\leqslant\ & C\bar{\mu}_{m,u}^{-2(a_n-1)}
\end{aligned} \tag{16.76}$$

所以将这个与子情形 2a 和情形 1 (此时 (16.65) 有界) 的结果结合起来, 我们得出 (16.65) 被

$$C\bar{\mu}_{m,u}^{-2(a_n-1)} \tag{16.77}$$

界定, 其中 $n=1,\cdots,[a]-1$.

显然在 (16.26) 和 (16.29) 中, 我们可以将左端的积分用 (16.65) 替代, 并且在第 n 步得到

$$C\delta_0\bar{\mu}_{m,u}^{-2b_n}(t)\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}^u}\sqrt{\mathcal{G}_{0,[l+1-n];b_n,0}^u(t)} \tag{16.78}$$

用类似于第 0 步的方法, 我们得到在第 n 步, 对 $n=1,\cdots,[a]-1$, 有如下估计:

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{G}}_{0,[l+1-n];b_n,0}^u(t), \quad \mathcal{H}_{0,[l+1-n];b_n,0}^t(u) \leqslant C\mathcal{D}_{[l+2]}^u \\
&\mathcal{G}_{1,[l+1-n];b_n,2}^{\prime u}(t), \quad \mathcal{H}_{1,[l+1-n];b_n,2}^{\prime t}(u), \quad I_{[l+1-n];b_n,2}(t,u) \leqslant C\mathcal{D}_{[l+2]}^u
\end{aligned} \tag{16.79}$$

对 $(t,u)\in[0,s]\times[0,\epsilon_0]$ 成立. 这里常数 C 可能依赖于 n, 但 n 是有界的.

我们现在处理最后一步 $n=[a]$. 此时我们有 $a_n=a_{[a]}=\frac{3}{4}$ 并且 (16.75) 为

$$J^u_{3/4,1}(t)\leqslant C(1+\log(1+t))^3\bar{\mu}^{-1/4}_{m,u} \tag{16.80}$$

而对于 (16.65), 我们由 (16.76), 以及 $-2a_{[a]}+1=-1/2$, 在子情形 2b 有

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t}(1+t')^{-2}(1+\log(1+t'))^6(1-\delta_1\tau')^{-1/2}dt'\\&\leqslant C(1+t_1)^{-1}(1+\log(1+t_1))^6\int_{\tau_1}^{\tau}(1-\delta_1\tau')^{-1/2}d\tau'\\&\leqslant C(1+t_1)^{-1}\frac{(1+\log(1+t_1))^6}{\delta_1}\frac{(1-\delta_1\tau_1)^{1/2}}{1/2}\\&\leqslant C(1+t_1)^{-1}(1+\log(1+t_1))^7\frac{(7/8)^{1/2}}{1/2}\leqslant C\end{aligned} \tag{16.81}$$

所以将这些与子情形 2a 和情形 1 的结果结合起来 (其中 (16.65) 有界), 我们得出在 $n=[a]$ 时 (16.65) 被一个常数界定. 所以我们在最后一步可以设

$$b_n=b_{[a]}=0 \tag{16.82}$$

然后像前面几步那样推导. 所以我们得到了如下估计:

$$\begin{aligned}&\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1-[a]];0,0}(t),\quad \mathcal{H}^t_{0,[l+1-[a]];0,0}(u)\leqslant C\mathcal{D}^u_{[l+2]}\\&\mathcal{G}'^u_{1,[l+1-[a]];0,2}(t),\quad \mathcal{H}'^t_{1,[l+1-[a]];0,2}(u),\quad I_{[l+1-[a]];0,2}(t,u)\leqslant C\mathcal{D}^u_{[l+2]}\end{aligned} \tag{16.83}$$

对 $(t,u)\in[0,s]\times[0,\epsilon_0]$ 成立.

这些正是我们想要的估计. 因为由定义,

$$\bar{\mathcal{G}}^u_{0,[l+1-[a]];0,0}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}(\mathcal{E}^u_{0,[l+1-[a]]}(t')) \tag{16.84}$$

$$\mathcal{H}^t_{0,[l+1-[a]];0,0}(u)=\sup_{t'\in[0,t]}(\mathcal{F}^{t'}_{0,[l+1-[a]]}(u)) \tag{16.85}$$

$$\mathcal{G}'^u_{1,[l+1-[a]];0,2}(t)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t'))^{-4}\mathcal{E}'^u_{1,[l+1-[a]]}(t')) \tag{16.86}$$

$$\mathcal{H}'^t_{1,[l+1-[a]];0,2}(u)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{F}'^{t'}_{1,[l+1-[a]]}(u)) \tag{16.87}$$

$$I_{[l+1-[a]];0,2}(t,u)=\sup_{t'\in[0,t]}((1+\log(1+t))^{-4}K_{[l+1-[a]]}(t',u)) \tag{16.88}$$

并且权 $\bar{\mu}_{m,u}$ 消失了.

第十七章　等周不等式. 假设 J 的证明. 连续性假设的证明. 主要定理的证明

17.1　假设 J 的证明 —— 初步

我们现在在连续性假设的基础上建立假设 **J**. 我们考虑如下一阶变分:

$$
{}^{(\alpha)}\tilde{\psi}_1 = \begin{cases} S\phi, & \alpha = 0, \\ \mathring{R}_i\phi, & \alpha = i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{17.1}
$$

对这些变分运用定理 5.1, 我们有

$$
\mathcal{E}_0^u[{}^{(\alpha)}\tilde{\psi}_1](t) \leqslant C\mathcal{E}_0^u[{}^{(\alpha)}\tilde{\psi}_1](0) \tag{17.2}
$$

对所有 $(t, u) \in [0, s] \times [0, \epsilon_0]$ 成立.

我们同样考虑与一阶变分 ${}^{(\alpha)}\tilde{\psi}_1$ 相关的高阶变分

$$
{}^{(\alpha; I_1 \cdots I_{n-1})}\tilde{\psi}_n = Y_{I_{n-1}} \cdots Y_{I_1}{}^{(\alpha)}\tilde{\psi}_1 \tag{17.3}
$$

我们要求多重指标 $(I_1 \cdots I_{n-1})$ 形如 (14.4) 后面那个自然段所描述的, 并且有 (14.5) 那样的结论. 我们考虑所有这样直到四阶的变分. 记 $\tilde{\mathcal{E}}^u_{0,[4]}(t)$ 为与 K_0, Σ^u_t 以及所有这些直到四阶的变分相关的能量. 现在与 K_0 和 K_1 以及这些变分相关的积分等式包含 ${}^{(Y)}\tilde{\pi}$ 的直到三阶的导数, 由 (15.167), 可以用命题 12.9 和 12.10 以及连续性假设估计它们的 $L^\infty(\Sigma^{\epsilon_0}_t)$ 范数. 所以我们可以像第七章那样估计误差积分, 正如引理 7.6 后面的注记, 这些误差积分被吸收到基本能量估计的误差积分中去了. 从而定理 5.1 对这些变分成立, 特别地,

$$\tilde{\mathcal{E}}^u_{0,[4]}(t) \leqslant C\tilde{D}^u_{[4]} \tag{17.4}$$

对所有 $(t,u) \in [0,s] \times [0,\epsilon_0]$ 成立. 这里我们记

$$\tilde{D}^u_{[4]} = \tilde{\mathcal{E}}^u_{0,[4]}(0) \tag{17.5}$$

由引理 5.1, 我们得出

$$\tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u) \leqslant C\epsilon_0\tilde{D}^u_{[4]} \tag{17.6}$$

对 $(t,u) \in [0,s] \times [0,\epsilon_0]$ 成立. 这里我们记 $\tilde{\mathcal{S}}_{[4]}$ 为 $S_{t,u}$ 上 (相对于 $d\mu_{\not g}$) 我们所考虑的变分的平方积分和. 特别地, 我们有

$$\int_{S_{t,u}} (|S\phi|^2 + \sum_{j_1} |R_{j_1}S\phi|^2 + \sum_{j_1,j_2} |R_{j_2}R_{j_1}S\phi|^2) d\mu_{\not g} \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u) \tag{17.7}$$

$$\int_{S_{t,u}} (|\mathring{R}_i\phi|^2 + \sum_{j_1} |R_{j_1}\mathring{R}_i\phi|^2 + \sum_{j_1,j_2} |R_{j_2}R_{j_1}\mathring{R}_i\phi|^2) d\mu_{\not g} \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u), \quad i=1,2,3 \tag{17.8}$$

$$\int_{S_{t,u}} (|TS\phi|^2 + \sum_{j_1} |R_{j_1}TS\phi|^2 + \sum_{j_1,j_2} |R_{j_2}R_{j_1}TS\phi|^2) d\mu_{\not g} \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u) \tag{17.9}$$

$$\int_{S_{t,u}} (|T\mathring{R}_i\phi|^2 + \sum_{j_1} |R_{j_1}T\mathring{R}_i\phi|^2 + \sum_{j_1,j_2} |R_{j_2}R_{j_1}T\mathring{R}_i\phi|^2) d\mu_{\not g} \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u), \quad i=1,2,3 \tag{17.10}$$

我们现在将要运用如下引理:

引理 17.1 设 f 是 $S_{t,u}$ 上直到二阶导数平方可积的函数. 记

$$\mathcal{S}_{[2]}[f] = \int_{S_{t,u}} (|f|^2 + \sum_{j_1} |R_{j_1} f|^2 + \sum_{j_1,j_2} |R_{j_2} R_{j_1} f|^2) d\mu_{\not{g}}$$

则 $f \in L^\infty(S_{t,u})$ 并且存在一个正常数 C 使得

$$\sup_{S_{t,u}} |f| \leqslant C(1+t)^{-1} (\mathcal{S}_{[2]}[f])^{1/2}$$

证明 由 (8.332), 我们有

$$C^{-1}(1+t)^2 \leqslant A(t,u) \leqslant C(1+t)^2 \tag{17.11}$$

其中 $A(t,u)$ 是 $S_{t,u}$ 的面积 (由 (8.332)). 由推论 12.2.a, 我们有

$$\int_{S_{t,u}} (|f|^2 + \sum_i |R_i f|^2) d\mu_{\not{g}} + A(t,u) \int_{S_{t,u}} (|\not{d} f|^2 + \sum_i |\not{d} R_i f|^2) d\mu_{\not{g}} \leqslant C \mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.12}$$

为了继续引理的证明, 我们需要等周 *Sobolev* 不等式.

17.2 等周不等式

(见 [15], [2]) 设 g 是 $S_{t,u}$ 上任意一个自己和导数都可积的函数, 则 g 在 $S_{t,u}$ 上是平方可积的, 并且记 $\bar{g}$ 是 g 在 $S_{t,u}$ 上的平均:

$$\bar{g} = \frac{1}{A(t,u)} \int_{S_{t,u}} g d\mu_{\not{g}} \tag{17.13}$$

我们有

$$\int_{S_{t,u}} (g-\bar{g})^2 d\mu_{\not{g}} \leqslant I(t,u) (\int_{S_{t,u}} |\not{d} g| d\mu_{\not{g}})^2 \tag{17.14}$$

其中 $I(t,u)$ 是 $S_{t,u}$ 的等周常数:

$$I = \sup_U \frac{\min\{\text{Area}(U), \text{Area}(U^c)\}}{(\text{Perimeter}(\partial U))^2} \tag{17.15}$$

其中上确界是针对 $S_{t,u}$ 上所有具有 C^1 边界 ∂U 的区域 U 所取的, 而 $U^c = S_{t,u} \setminus U$ 为 U 在 $S_{t,u}$ 中的补集.

由于

$$\|\bar{g}\|_{L^2(S_{t,u})} = |\bar{g}|A^{1/2}, \quad |\bar{g}| \leqslant A^{-1}\|g\|_{L^1(S_{t,u})} \tag{17.16}$$

从而

$$\|g\|_{L^2(S_{t,u})} \leqslant \sqrt{I'}\|g\|_{W_1^1(S_{t,u})} \tag{17.17}$$

其中

$$\|g\|_{W_1^1(S_{t,u})} = \|\not{d}g\|_{L^1(S_{t,u})} + A^{-1/2}\|g\|_{L^1(S_{t,u})} \tag{17.18}$$

以及

$$I' = \max\{I, 1\} \tag{17.19}$$

我们有

$$\|f^2\|_{W_1^1(S_{t,u})} = \int_{S_{t,u}} |\not{d}(f^2)|d\mu_{\not{g}} + A^{-1/2}\int_{S_{t,u}} |f|^2 d\mu_{\not{g}} \tag{17.20}$$

并且由 $\not{d}(f^2) = 2f\not{d}f$ 和 (17.12) 有

$$\int_{S_{t,u}} |\not{d}(f^2)|d\mu_{\not{g}} \leqslant 2(\int_{S_{t,u}} |f|^2 d\mu_{\not{g}})^{1/2}(\int_{S_{t,u}} |\not{d}f|^2 d\mu_{\not{g}})^{1/2} \leqslant CA^{-1/2}\mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.21}$$

由于 (17.20) 有一个相似的界, 我们有

$$\|f^2\|_{W_1^1(S_{t,u})} \leqslant CA^{-1/2}\mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.22}$$

从而我们得到

$$\|\sum_i |R_i f|^2\|_{W_1^1(S_{t,u})} = \int_{S_{t,u}} |\not{d}(\sum_i |R_i f|^2)|^2 d\mu_{\not{g}} + A^{-1/2}\int_{S_{t,u}} \sum_i |R_i f|^2 d\mu_{\not{g}} \tag{17.23}$$

并且由 $\not{d}(\sum_i |R_i f|^2) = 2\sum_i (R_i f)\not{d}(R_i f)$ 和 (17.12), 我们有

$$\begin{aligned} &\int_{S_{t,u}} |\not{d}(\sum_i |R_i f|^2)|d\mu_{\not{g}} \\ &\leqslant 2(\int_{S_{t,u}} \sum_i |R_i f|^2 d\mu_{\not{g}})^{1/2}(\int_{S_{t,u}} \sum_i |\not{d}R_i f|^2 d\mu_{\not{g}})^{1/2} \leqslant CA^{-1/2}\mathcal{S}_{[2]}[f] \end{aligned} \tag{17.24}$$

由于 (17.23) 右端第二项有一个相似的界, 我们得到

$$\|\sum_i |R_i f|^2\|_{W_1^1(S_{t,u})} \leqslant CA^{-1/2}\mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.25}$$

我们现在运用 (17.17), 首先取 $g = f^2$ 然后取 $g = \sum_i |R_i f|^2$, 再由 (17.22) 和 (17.25) 有

$$\left(\int_{S_{t,u}} (|f|^4 + (\sum_i |R_i f|^2)^2) d\mu_{\not g}\right)^{1/2} \leqslant C\sqrt{I'}A^{-1/2}\mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.26}$$

从而由推论 12.2.a 有

$$\|f\|^2_{W_1^4(S_{t,u})} \leqslant C\sqrt{I'}A^{-3/2}\mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.27}$$

其中对 $S_{t,u}$ 上任意一个函数 f, 我们记

$$\|f\|_{W_1^4(S_{t,u})} = \|\not d f\|_{L^4(S_{t,u})} + A^{-1/2}\|f\|_{L^4(S_{t,u})} \tag{17.28}$$

我们现在将运用 [11] 中的一个方法. 我们把 $S_{t,u}$ 上的度量 $\not g$ 重新尺度化, 设

$$\hat{\not g} = A^{-1}\not g \quad 使得 \quad d\mu_{\hat{\not g}} = A^{-1}d\mu_{\not g} \tag{17.29}$$

从而 $S_{t,u}$ 相对于 $\hat{\not g}$ 的面积为 1. 考虑到相对于新度量有

$$|\not d f|^2_{\hat{\not g}} = (\hat{\not g}^{-1})^{BC}\partial_B f \partial_C f = A(\not g^{-1})^{BC}\partial_B f \partial_C f = A|\not d f|^2_{\not g} \tag{17.30}$$

我们得到

$$\|f\|_{W_1^4(S_{t,u},\not g)} = A^{-1/4}\|f\|_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.31}$$

其中

$$\|f\|_{W_1^p(S_{t,u},\hat{\not g})} = \|\not d f\|_{L^p(S_{t,u},\hat{\not g})} + \|f\|_{L^p(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.32}$$

所以 (17.27) 为

$$\|f\|^2_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant C\sqrt{I'}A^{-1}\mathcal{S}_{[2]}[f] \tag{17.33}$$

进一步由 (17.17), (17.18), 我们知道相对于 $\hat{\not g}$ 有

$$\|g\|_{L^2(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant \sqrt{I'}\|g\|_{W_1^1(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.34}$$

现在设

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{I'}} \frac{|f|}{\|f\|_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not g})}} \tag{17.35}$$

则 $\tilde{f} \geqslant 0$ 并且取 $g = \tilde{f}^k$, $k > 1$, 在 (17.34) 中我们得到

$$\|\tilde{f}^k\|_{L^2(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant \sqrt{I'} \|\tilde{f}^k\|_{W_1^1(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.36}$$

由于 $\not d(\tilde{f}^k) = k\tilde{f}^{k-1} \not d\tilde{f}$, 我们有

$$\|\not d(\tilde{f}^k)\|_{L^1(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant k\|\tilde{f}^{k-1}\|_{L^{4/3}(S_{t,u},\hat{\not g})} \|\not d\tilde{f}\|_{L^4(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.37}$$

和

$$\|\tilde{f}^k\|_{L^1(S_{t,u},\hat{\not g})} = \|\tilde{f}^{k-1}\tilde{f}\|_{L^1(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant \|\tilde{f}^{k-1}\|_{L^{4/3}(S_{t,u},\hat{\not g})} \|\tilde{f}\|_{L^4(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.38}$$

所以

$$\|\tilde{f}^k\|_{W_1^1(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant k\|\tilde{f}^{k-1}\|_{L^{4/3}(S_{t,u},\hat{\not g})} \|\tilde{f}\|_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.39}$$

现在由 (17.35), 我们有

$$\|\tilde{f}\|_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not g})} = \frac{1}{\sqrt{I'}} \tag{17.40}$$

代入 (17.39) 并且由 (17.36) 可知

$$\|\tilde{f}^k\|_{L^2(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant k\|\tilde{f}^{k-1}\|_{L^{4/3}(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.41}$$

这与

$$\|\tilde{f}\|_{L^{2k}(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant k^{1/k} \|\tilde{f}\|^{1-(1/k)}_{L^{(4/3)(k-1)}(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.42}$$

等价. 这意味着

$$\|\tilde{f}\|_{L^{2k}(S_{t,u},\hat{\not g})} \leqslant k^{1/k} \|\tilde{f}\|^{1-(1/k)}_{L^{(4/3)k}(S_{t,u},\hat{\not g})} \tag{17.43}$$

这是因为, 由 $S_{t,u}$ 相对于 $\hat{\not g}$ 的面积为 1, 所以对任意 g, 范数 $\|g\|_{L^p(S_{t,u},\hat{\not g})}$ 是 p 的非减函数. (17.43) 左右两边指标的比值为 3/2. 现在设

$$k = (\frac{3}{2})^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{17.44}$$

对 $n=1$, (17.43) 右端的指标是 2, 在 (17.34) 中取 $g=\tilde{f}$, 我们由 (17.35) 得到

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(S_{t,u},\hat{\not{g}})} \leqslant \sqrt{I'}\|\tilde{f}\|_{W_1^1(S_{t,u},\hat{\not{g}})} = \frac{\|\tilde{f}\|_{W_1^1(S_{t,u},\hat{\not{g}})}}{\|\tilde{f}\|_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not{g}})}} \leqslant 1 \tag{17.45}$$

则由 (17.45) 和关于 n 的归纳假设, 我们得到

$$\|\tilde{f}\|_{L^{2(3/2)^n}(S_{t,u},\hat{\not{g}})} \leqslant (\frac{3}{2})^{\sum_{m=1}^{n} m(3/2)^{-m}} \tag{17.46}$$

取极限 $n\to\infty$, 我们得到

$$\sup_{S_{t,u}} \tilde{f} \leqslant c \tag{17.47}$$

其中

$$c = (\frac{3}{2})^{\sum_{m=1}^{\infty} m(3/2)^{-m}} = (\frac{3}{2})^6$$

由 (17.35), (17.47) 等价于

$$\sup_{S_{t,u}} |f| \leqslant c\sqrt{I'}\|f\|_{W_1^4(S_{t,u},\hat{\not{g}})} \tag{17.48}$$

最终代入 (17.33) 得到

$$\sup_{S_{t,u}} |f| \leqslant cCI'^{3/4}A^{-1/2}(\mathcal{S}_{[2]}[f])^{1/2} \tag{17.49}$$

为了完成引理 17.1 的证明, 我们需要一个 $I(S_{t,u})$ 的上界, 它是 $S_{t,u}$ 的等周常数. 在给定 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上的 T 的积分曲线定义了一个从 $S_{t,0}$ 到 $S_{t,u}$ 的微分同胚, 其中 $u\in[0,\epsilon_0]$. 以 ∂U_u 为 C^1 边界的区域 $U_u\subset S_{t,u}$ 被该微分同胚的逆映到 $U_0\subset S_{t,0}$, 它的 C^1 边界为 ∂U_0. 在每个 $S_{t,u'}$ 上考虑 U_0 在该微分同胚的像 $U_{u'}$, 其中 $u'\in[0,u]$, 则由定义,

$$\not{\mathcal{L}}_T \not{g} = 2\kappa\theta$$

我们有

$$\frac{d}{du'}\text{Area}(U_{u'}) = \int_{U_{u'}} \kappa\text{tr}\theta d\mu_{\not{g}} \tag{17.50}$$

和

$$\frac{d}{du'}\mathrm{Perimeter}(\partial U_{u'}) = \int_{\partial U_{u'}} \kappa\theta(V,V)ds \tag{17.51}$$

其中 V 是单位切向量场, ds 是 $\partial U_{u'}$ 的弧长元. 这里 u 是 T 的积分曲线的参数. 由于由连续性假设有

$$\kappa|\theta| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \leqslant C \tag{17.52}$$

由 (17.50) 和 (17.51), 我们得到

$$|\frac{d}{du'}\mathrm{Area}(U_{u'})| \leqslant C\mathrm{Area}(U_{u'}) \tag{17.53}$$

$$|\frac{d}{du'}\mathrm{Perimeter}(\partial U_{u'})| \leqslant C\mathrm{Perimeter}(\partial U_{u'}) \tag{17.54}$$

所以对 u' 在 $[0,u]$ 积分得到

$$\begin{aligned} &C^{-1}\mathrm{Area}(U_0) \leqslant \mathrm{Area}(U_u) \leqslant C\mathrm{Area}(U_0) \\ &C^{-1}\mathrm{Perimeter}(\partial U_0) \leqslant \mathrm{Perimeter}(\partial U_u) \leqslant C\mathrm{Perimeter}(\partial U_0) \end{aligned} \tag{17.55}$$

对 $u \in [0,\epsilon_0]$ 成立.

从而

$$C^{-1}I(S_{t,0}) \leqslant I(S_{t,u}) \leqslant CI(S_{t,0}) \tag{17.56}$$

对 $u \in [0,\epsilon_0]$ 成立.

由于 $S_{t,0}$ 是 Euclid 空间中的球面, 我们有

$$I(S_{t,0}) = \frac{1}{2\pi}$$

所以我们得到 $I(S_{t,u})$ 的一个上界. 由 (17.11), (17.49), 引理得证. □

17.3 假设 J 的证明 —— 完成

注意到由 (17.7)—(17.10) 有

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{[2]}[S\phi] \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u), \quad \mathcal{S}_{[2]}[\mathring{R}_i\phi] \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u), \quad i=1,2,3 \\ &\mathcal{S}_{[2]}[TS\phi] \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u), \quad \mathcal{S}_{[2]}[T\mathring{R}_i\phi] \leqslant \tilde{\mathcal{S}}_{[4]}(t,u), \quad i=1,2,3 \end{aligned} \tag{17.57}$$

则由引理 17.1 和 (17.6), 我们有

$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|S\phi| \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\tilde{D}_{[4]}^u}, \quad \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|\mathring{R}_i\phi| \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\tilde{D}_{[4]}^u} \quad i=1,2,3$$
$$\sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|TS\phi| \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\tilde{D}_{[4]}^u}, \quad \sup_{\Sigma_t^{\epsilon_0}}|T\mathring{R}_i\phi| \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\tilde{D}_{[4]}^u}, \quad i=1,2,3 \tag{17.58}$$

从而如果

$$\sqrt{\tilde{D}_{[4]}^u} \leqslant C\delta_0 \tag{17.59}$$

则假设 **J** 在 $W_{\epsilon_0}^s$ 中成立. 所以我们完成了假设 **J** 的证明.

17.4 连续性假设的证明

现在我们可以最终证明连续性假设从而完成主要定理的证明. 记 $\mathcal{S}_{[n]}(t,u)$ 为 $S_{t,u}$ (相对于 $d\mu_{\not{g}}$) 上直到 n 阶变分 (14.4) 的平方和的积分. 由引理 5.1, 我们有

$$\mathcal{S}_{[l+1-[a]]}(t,u) \leqslant C\epsilon_0\mathcal{E}_{0,[l+1-[a]]}^u(t) \quad \text{对于} \quad (t,u)\in[0,s]\times[0,\epsilon_0] \tag{17.60}$$

所以由 (16.83) 和 (16.84) 有

$$\mathcal{S}_{[l+1-[a]]}(t,u) \leqslant C\epsilon_0\mathcal{D}_{[l+2]}^u \quad \text{对于} \quad (t,u)\in[0,s]\times[0,\epsilon_0] \tag{17.61}$$

现在对任意直到 $l-1-[a]$ 阶的变分 ψ, 我们有

$$\mathcal{S}_{[2]}[\psi] \leqslant \mathcal{S}_{[l+1-[a]]} \tag{17.62}$$

这是因为 $\psi, R_{j_1}\psi, j_1=1,2,3$; $R_{j_2}R_{j_1}\psi, j_1, j_2=1,2,3$ 自己本身就是变分并包含在 $\mathcal{S}_{[l+1-[a]]}$ 中. 则由引理 17.1 和 (17.61), (17.62), 我们得到

$$\sup_{S_{t,u}}|\psi| \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}^u}, \quad \text{对于} \quad (t,u)\in[0,s]\times[0,\epsilon_0] \tag{17.63}$$

即, 我们得到

$$\max_{\alpha}\max_{i_1\cdots i_n}\|R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m(Q)^{p(\alpha)}\psi_1\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}} \tag{17.64}$$

对所有 $p+m+n\leqslant l-2-[a]$ 和所有 $t\in[0,s]$ 成立.

由 (15.167), 我们有

$$l-2-[a] \geqslant (l+1)_* + 2$$

这是由于 $l = l_* + (l+1)_*$. 所以如果

$$C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}} < \delta_0 \tag{17.65}$$

则我们就证明了连续性假设 $\mathbf{E}_{\{\{(l+1)_*+2\}\}}$.

17.5 主要定理证明的完成

现在设 s_* 是 $[0, t_{*\epsilon_0}]$ 中使得连续性假设在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中成立的 s 的上确界. 回忆第二章 $t_{*\epsilon_0}$ 的定义为

$$t_{*\epsilon_0} = \inf_{u\in[0,\epsilon_0]} t_*(u) \tag{17.66}$$

其中 $t_*(u)$ 是最大解定义域中 C_u 生成子的参数 t 的上确界. 这里我们注意到 C_u 不包含割迹. 这是因为 $S_{t,u}$ 在 Σ_t 中的外法向 $-\hat{T}$ 与 Euclid 球面的外法向 N 之间的夹角不超过 δ_0 乘以一个常数, 就像估计 (12.19) 中那样. 由 χ —— $S_{t,u}$ 相对于 C_u 的第二基本形式 —— 的界, C_u 也不包含焦点 (即沿着 C_u 的生成子上与 $S_{0,u}$ 的共轭点). 不包含割迹和焦点意味着 C_u 的双特征生成子不会离开最大解依赖区域的边界, 这里所说的依赖区域是指 $S_{0,u}$ 在 Σ_0 中外部的依赖区域. (关于 Riemann 几何中割迹和共轭点的定义见 [3]. 关于 Lorentz 几何中相对应的定义见 [16].) 所以如果 $t_{*\epsilon_0} = \infty$ 不成立, 则在 $\Sigma^{\epsilon_0}_{t_{*\epsilon_0}}$ 上至少存在一个点在最大解定义域的边界上而不在区域中. 事实上在条件 (17.65) 下 s_* 与 $t_{*\epsilon_0}$ 相同. 否则如果 $s_* < t_{*\epsilon_0}$, 再由连续性, 连续性假设在 $W^{s_*}_{\epsilon_0}$ 中同样成立, 所以 (17.64) 成立 ($l-2-[a]$ 被 $(l+1)_*+2$ 替代; s 被 s_* 替代). 而由 (17.65) 和连续性, 连续性假设同样对某个 $s > s_*$ 成立, 与 s_* 的定义矛盾. 所以 $s_* = t_{*\epsilon_0}$ 和 (17.64) 对所有 $t \in [0, t_{*\epsilon_0})$ 成立. 所以在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中我们有关于直到 $(l+1)_*+2$ 阶的变分 ψ_α 的逐点估计. 命题 12.9 和 12.10 给出了 χ' 直到 $(l+1)_*$ 阶导数以及 μ 直到 $(l+1)_*+1$ 阶导数的逐点估计. 所以 ψ_α, χ' 和 μ 以及 κ 和诱导声学度量 $\not{g}$ 在声学坐标下光滑延拓到 $\Sigma^{\epsilon_0}_{t_{*\epsilon_0}}$ 和 $W^{t_{*\epsilon_0}}_{\epsilon_0}$. 同样, 声学度量的直角坐标分量 $g_{\mu\nu}$ 作为 ψ_α 的光滑函数也如上延拓. 并且由于连续性假设在 $W^*_{\epsilon_0}$ 中成立, 我们导出的所有估计, 特别是能量估计 (16.83), (16.79), (15.160)—(15.163),

以及命题 12.11 和命题 12.12 中声学量的 L^2 范数估计和最高阶的声学量估计对所有 $t \in [0, t_{*\epsilon_0})$ 成立. 那些不包含权 $\bar{\mu}_{m,u}$ 的估计, 例如 (16.83), 也延拓到 $t = t_{*\epsilon_0}$. 现在我们有

$$\bar{\mu}_m(t_{*\epsilon_0}) = 0 \tag{17.67}$$

否则从声学坐标到直角坐标变换的 Jacobi 行列式 Δ 在 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$ 上有一个正的最小值, 所以逆变换是正则的, 从而 ψ_α 在直角坐标中光滑延拓到 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$. 然而 ψ_α 在直角坐标下延拓到 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$ 后它也是 Sobolev 空间 H_3 中的函数, 再由局部存在性定理, 我们知道我们可以将解延拓到一个更大的包含所有特征曲面 C_u, $u \in [0, \epsilon_0]$ 的发展中, 其在时间区间上可以延拓到 $t = t_1$, 其中 $t_1 > t_*$, 这就与 $t_{*\epsilon_0}$ 的定义矛盾了. 所以在 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$ 上至少有一个点使得 $\mu = 0$. 用同样的方法我们知道对于在最大解定义域边界上的 $x_* \in \Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$ 有 $\mu(x_*) = 0$. 否则 μ 在 x_* 的某个邻域中有正的最小值, 从而解在 x_* 的附近可以局部延拓, 这与 x_* 是边界点矛盾.

现在由命题 8.6, 取 $t = s$, 我们有

$$\hat{\mu}_s(s, u, \vartheta) = 1 + \hat{E}_s(u, \vartheta)\log(1 + s) \tag{17.68}$$

并且回忆

$$\hat{\mu}_s(s, u, \vartheta) = \frac{\mu(s, u, \vartheta)}{\mu_{[1],s}(u, \vartheta)}, \quad \hat{E}_s(u, \vartheta) = \frac{E_s(u, \vartheta)}{\mu_{[1],s}(u, \vartheta)} \tag{17.69}$$

并且 $\mu_{[1],s}(u, \vartheta)$ 有下界 1/2. 同样回忆由 (8.226) 有

$$|E_s(u, \vartheta) - \frac{1}{4}\ell P_s(u, \vartheta)| \leqslant C\delta_0(1 + s)^{-1}(1 + \log(1 + s)) \tag{17.70}$$

其中由引理 8.10 有

$$P_s(u, \vartheta) = (1 + s)(\underline{L}\psi_0)(s, u, \vartheta) \tag{17.71}$$

现在由 (17.64), 我们有

$$|P_s(u, \vartheta)| \leqslant C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}} \tag{17.72}$$

所以我们得到

$$|E_s(u, \vartheta)| \leqslant C|\ell|\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}} + C\delta_0(1 + s)^{-1}(1 + \log(1 + s)) \tag{17.73}$$

由于

$$\frac{\log(1+s)(1+\log(1+s))}{1+s} \leqslant C$$

这意味着

$$\log(1+s)|E_s(u,\vartheta)| \leqslant C|\ell|\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}}\log(1+s) + C\delta_0 \tag{17.74}$$

代入 (17.68) 得到

$$\hat{\mu}_s(s,u,\vartheta) \geqslant 1 - C\delta_0 - C|\ell|\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}}\log(1+s) \tag{17.75}$$

从而

$$\log(1+t_{*\epsilon_0}) \geqslant \frac{1}{C|\ell|\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\mathcal{D}_{[l+2]}}} \tag{17.76}$$

(对某个新的常数 C 成立), 否则 μ 在 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$ 上面会有一个正的下界, 这与上一段中得到的结论矛盾.

现在我们要分析初值满足的条件. 回忆第二章关于 u 在 Σ_0 上的定义:

$$u = 1 - r \tag{17.77}$$

所以在直角坐标下在 Σ_0 上有

$$\partial_i u = -N^i, \quad N^i = \frac{x^i}{r} \tag{17.78}$$

其中 N 是 Euclid 球面的外法向. 由于 κ 的定义为

$$\kappa^{-2} = (\bar{g}^{-1})^{ij}\partial_i u \partial_j u \tag{17.79}$$

而 $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$, 所以在 Σ_0 上我们有

$$\kappa = 1 \tag{17.80}$$

以及

$$\mu = \eta \tag{17.81}$$

由 (2.27), 我们有

$$\hat{T}^i = \kappa\partial_i u \tag{17.82}$$

则在 Σ_0 上有

$$\hat{T}^i = -N^i = T^i \tag{17.83}$$

再由 (2.55), L 在 Σ_0 上由

$$L = \frac{\partial}{\partial x^0} + (\eta N^i - \psi_i)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{17.84}$$

给出. 在 Σ_0 上, $Q = L$. 接下来考虑 Σ_t 中关于 $\bar{g}$ 到 $S_{t,u}$ 的投影. 它在直角坐标中由

$$\Pi^a_b = \delta^a_b - \hat{T}^a\hat{T}^b \tag{17.85}$$

给出. Σ_0 中 u 的水平集 $S_{0,u}$ 是球心在原点的 Euclid 球面, 向量场 $\mathring{R}_i$ 与这些球面相切, 则交换向量场 R_i 在 Σ_0 与 $\mathring{R}_i$ 相同:

$$R_i = \Pi\mathring{R}_i = \mathring{R}_i = \epsilon_{ijk}x^j\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{17.86}$$

进一步, 由 (12.12) 定义的函数 λ_i 在 Σ_0 上为 0:

$$\lambda_i = -\kappa N^j\epsilon_{ijk}x^k = 0 \tag{17.87}$$

这里我们用了 (17.83).

由于 $S_{0,u}$ 是半径为 r 的 Euclid 球面, 其内单位法向为 $\hat{T}$, 所以我们有

$$\theta_{ab} = -\frac{1}{r}(\delta_{ab} - \hat{T}^a\hat{T}^b) \tag{17.88}$$

然后由 (3.27) 有

$$\chi_{ab} = -\eta(\theta_{ab} - \not{k}_{ab}) \tag{17.89}$$

其中

$$\not{k}_{ab} = -\eta^{-1}\Pi^i_a\Pi^j_b\partial_i\psi_j \tag{17.90}$$

现在考虑非线性波方程 (1.23) 的初值. 函数 ψ_α, $\alpha = 0,1,2,3$ 定义在以 $1-\epsilon_0$ 为半径、原点为球心的球面外并且满足 $\partial_i\psi_j = \partial_j\psi_i$. 在以原点为球心的球面外初

值与常状态 $\psi_\alpha = 0$, $\alpha = 0,1,2,3$ 相同. 假设 ψ_α, $\alpha = 0,1,2,3$ 在直角坐标下属于 Sobolev 空间 $H_{l+2}(\Sigma_0^{\epsilon_0})$ 并且在单位球面上的迹为 0. 设

$$D_{[l+2]} = \sum_{\alpha,i} \|\partial_i \psi_\alpha\|^2_{H_{l+1}(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \tag{17.91}$$

非线性波方程 (1.23) 有如下形式:

$$(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_\nu = 0, \quad \partial_\mu\psi_\nu = \partial_\nu\psi_\mu \tag{17.92}$$

这使得我们可以将 $\partial_0\psi_0$ 和 $\partial_0\psi_i$ 用 $\partial_i\psi_0$ 和 $\partial_i\psi_j$ 表示, 这是因为 $\partial_0\psi_i = \partial_i\psi_0$ 以及我们有

$$(g^{-1})^{00} = -\eta^{-2} \tag{17.93}$$

从而我们可以归纳地将 $\partial_0^k\psi_\alpha$, $\alpha = 0,1,2,3$, 其中 $k = 1,\cdots,l+2$, 用 $\partial_{i_k}\cdots\partial_{i_1}\psi_\alpha$, $\alpha = 0,1,2,3$; $i_1,\cdots,i_n = 1,2,3$ 表示. 由标准的 Sobolev 不等式有

$$\begin{aligned}&\max_\alpha \max_{i_1\cdots i_n} \|\partial_{i_n}\cdots\partial_{i_1}\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\ &\leqslant C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}} \quad 对于 \quad n = 1,\cdots,l-1\end{aligned} \tag{17.94}$$

所以同样有

$$\begin{aligned}&\max_\alpha \max_{i_1\cdots i_n} \|\partial_{i_n}\cdots\partial_{i_1}\partial_0^k\psi_j\|_{L^\infty(\Sigma_0^{\epsilon_0})}\\ &\leqslant C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}} \quad 对于 \quad n,k \geqslant 0, n+k \leqslant l-1\end{aligned} \tag{17.95}$$

这里常数 $\sqrt{\epsilon_0}$ 来自于引理 5.1.

由 (17.83), (17.85) 和 (17.87), T, L 和 R_i 的直角坐标分量是 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上关于直角坐标和 ψ_α 的光滑函数. 从而有

$$\mathcal{E}_{0,[l+2]}(0), \quad \mathcal{E}'_{1,[l+2]}(0) \leqslant CD_{[l+2]} \tag{17.96}$$

由 (17.94) 和 (17.95), 我们有

$$\|\chi'\|_{\infty,\{l-2\},\Sigma_0^{\epsilon_0}} \leqslant C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}} \tag{17.97}$$

这样我们就可以证明命题 12.3, 12.6, 12.9, 12.10 中关于初值的假设, 前提是

$$\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}} \leqslant C^{-1}\delta_0 \tag{17.98}$$

在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上我们有 $y^i = 0$, 所以我们有

$$\mathcal{Y}_0(0) = 0 \tag{17.99}$$

进一步有

$$\mathcal{B}_{\{l+1\}}(0) \leqslant C\sqrt{D_{[l+2]}} \tag{17.100}$$

$$\mathcal{A}_{[l]}(0) \leqslant C\sqrt{D_{[l+2]}} \tag{17.101}$$

以及由 (8.44) 和 (9.60), 我们有

$$\sum_{i_1\cdots i_l} \|^{(i_1\cdots i_l)}x_l(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant C\sqrt{D_{[l+2]}} \tag{17.102}$$

$$\sum_{m=0}^{l}\sum_{i_1\cdots i_{l-m}} \|^{(i_1\cdots i_{l-m})}x'_{m,l-m}(0)\|_{L^2(\Sigma_0^{\epsilon_0})} \leqslant C\sqrt{D_{[l+2]}} \tag{17.103}$$

将上述结果组合起来, 我们得到

$$\mathcal{D}_{[l+2]} \leqslant CD_{[l+2]} \tag{17.104}$$

我们将 ϵ_0 替换为任意的 $u \in (0, \epsilon_0]$ 从而得到

$$\mathcal{D}^u_{[l+2]} \leqslant CD^u_{[l+2]} \tag{17.105}$$

对 $u \in (0, \epsilon_0]$ 成立, 其中

$$D^u_{[l+2]} = \sum_{\alpha,i} \|\partial_i\psi_\alpha\|^2_{H_{l+1}(\Sigma_0^u)} \tag{17.106}$$

这样我们就证明了本书中的主要定理:

定理 17.1 设 $(p, s, v^i,\ i = 1,2,3)$ 是方程 (1.4), (1.10) 和 (1.12) 在 Σ_0 上的初值, 其在 Σ_0 中以原点为球心的单位球面外是常状态

$$p = p_0, \quad s = s_0, \quad v^i = 0, \quad i = 1,2,3$$

我们可以调整焓 h 的零点使得 $h_0 = 0$, 即在常状态焓为 0. 我们同样可以选取时间和长度的单位使得 $\eta_0 = 1$, 即在常状态声速为 1. 同样设初值在 Σ_0 中以 $1-\epsilon_0$, $0 < \epsilon_0 \leqslant 1/2$ 为半径、原点为球心的球面外是等熵无旋的. 则在 Σ_0 中以 $1-\epsilon_0$

为半径、原点为球心的球面外, 我们有非线性波方程 (1.23) 的初值 $(\phi, \partial_t\phi)$, 其中 $\partial_i\phi = -v^i$ 以及 $\partial_t\phi = h + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\partial_i\phi)^2$. 初值 $(\phi, \partial_t\phi)$ 在 Σ_0 中以原点为球心的球面外为 0. 考虑在 Σ_0 中由两个同心球面包围的环形区域 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$. 则存在一个正整数 $[a]$ 使得如下结论成立. 设 l 为正整数, 满足

$$l_* \geqslant [a] + 4$$

并且假设函数 $\psi_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3$ 是 $\Sigma_0^{\epsilon_0}$ 上关于直角坐标的、在 Sobolev 空间 $H_{l+2}(\Sigma_0^{\epsilon_0})$ 的函数, 并且在单位球面上迹为 0. 然后设

$$D_{[l+2]} = \sum_{\alpha,i} \|\partial_i\psi_\alpha\|^2_{H_{l+1}(\Sigma_0^{\epsilon_0})}$$

则存在一个足够小的正常数 $\bar{\delta}_0$ 和一个正常数 C, 使得对任意 $\delta_0 \in (0, \bar{\delta}_0]$, 如果

$$C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}} < \delta_0$$

则如下结论成立.

(i) 设 u 是定义在 Σ_0 上的函数 $1 - r$, $S_{0,u}$ 是以原点为球心、$1 - u$ 为半径的球面, 它也是 u 在 Σ_0 中的水平集. 我们在与给定初值相对应的最大解的定义域中考虑与 $\{S_{0,u},\ u \in [0, \epsilon_0]\}$ 相对应的外向特征曲面 $\{C_u,\ u \in [0, \epsilon_0]\}$:

$$C_u \bigcap \Sigma_0 = S_{0,u}, \quad \forall u \in [0, \epsilon_0]$$

C_u 的双特征生成子可以延拓到最大解的定义域, 只要它还在 $S_{0,u}$ 在 Σ_0 中外部的依赖区域的边界上. 则每个 C_u 的双特征生成子只在最大解定义域的边界上有未来的终点. 设 $t_*(u)$ 是 C_u 生成子参数 t 在最大解定义域中的上确界, 并且设

$$t_{*\epsilon_0} = \inf_{u \in [0, \epsilon_0]} t_*(u)$$

对 $(t, u) \in [0, t_{*\epsilon_0}) \times [0, \epsilon_0]$ 定义闭曲面

$$S_{t,u} = C_u \bigcap \Sigma_t$$

则要么 $t_{*\epsilon_0} = \infty$ 要么在 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}^{\epsilon_0}$ 上至少存在一个点属于最大解定义域的边界而不属于区域本身.

(ii) 我们有下界

$$\log(1+t_{*\epsilon_0}) \geqslant \frac{1}{C|\ell|\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}}}$$

其中 ℓ 为如下常数:

$$\ell = \frac{dH}{dh}(h_0)$$

特别地, 如果 $\ell = 0$ 我们有 $t_{*\epsilon_0} = \infty$.

(iii) 对所有 $t \in [0, t_{*\epsilon_0})$, 我们有 L^∞ 界

$$\max_{\alpha}\max_{i_1\cdots i_n} \|R_{i_n}\cdots R_{i_1}(T)^m(Q)^p\psi_\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t^{\epsilon_0})} \leqslant C(1+t)^{-1}\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}}$$
$$\text{对于 } p+m+n \leqslant l-2-[a]$$

并且由特征面族 $\{C_u,\ u\in[0,\epsilon_0]\}$ 定义的声学量 μ 和 χ 满足如下估计. 这里每个特征面 C_u, $u\in[0,\epsilon_0]$ 则是由曲面族 $\{S_{t,u},\ t\in[0,t_{*\epsilon_0})\}$ 定义的:

$$\|\mu-1\|_{\infty,\{l-3-[a]\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t))$$
$$\|\chi'\|_{\infty,\{l-4-[a]\},\Sigma_t^{\epsilon_0}} \leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))$$

其中

$$\chi' = \chi - \frac{\not{g}}{1-u+t}$$

并且 $\not{g}$ 是 $S_{t,u}$ 上的诱导度量.

(iv) ψ_α, μ, $\not{g}$ 和 χ; ψ_α 的直到 $l-2-[a]$ 阶导数; μ 和 $\not{g}$ 的直到 $l-3-[a]$ 阶导数以及 χ 的直到 $l-4-[a]$ 导数在声学坐标下都可以延拓到 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}$. 向量场 T 和 L 的直角坐标分量 $\hat{T}^i$ 和 L^i 以及它们的直到 $l-3-[a]$ 阶导数也在声学坐标下延拓到 $\Sigma_{t_{*\epsilon_0}}$, 所以声学度量 $g_{\mu\nu}$ 的直角坐标分量也可以这样延拓. 这样延拓后的函数 μ 在 $\Sigma_{t*\epsilon_0}^{\epsilon_0}$ 上的每个最大解定义域的边界点上为 0, 在其他地方都是正的. 从声学坐标到直角坐标变换的 Jacobi 行列式 Δ 同样在这些边界点为 0, 而在其他地方都是正的. $\hat{T}^i\partial_i\psi_\alpha$ 的一阶导数在这些点会爆破. 更准确地说, 会爆破的分量是 $\hat{T}^i\hat{T}^j\partial_i\psi_j$. 并且存在一个正常数 C 使得在 $W_{\epsilon_0}^*$ 的子区域 $\mathcal{U}$ 中有

$$L\mu \leqslant -C^{-1}(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1}$$

注意到区域 $\mathcal{U}$ 对应于 $\mu < 1/4$, 所以在边界点附近上式成立.

(v) 对任意 $u \in [0, \epsilon_0]$, 下述能量估计成立:

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0}]} (\mathcal{E}^u_{0,[l+1-[a]]}(t)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\mathcal{F}^{t_{*\epsilon_0}}_{0,[l+1-[a]]}(u) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0}]} ((1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{E}'^u_{1,[l+1-[a]]}(t)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0}]} ((1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{F}'^t_{1,[l+1-[a]]}(u)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0}]} ((1+\log(1+t))^{-4}K_{[l+1-[a]]}(t,u)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

其中

$$D^u_{[l+2]} = \sum_{\alpha,i} \|\partial_i\psi_\alpha\|^2_{H_{l+1}(\Sigma^u_t)}$$

Σ^u_0 是 Σ_0 中的环形区域, 它以 $S_{0,u}$ 和单位球面 $S_{0,0}$ 为边界. 进一步, 设

$$a = [a] + \frac{3}{4}$$

对每个 $n = 0, \cdots, [a]-1$ 以及 $u \in [0, \epsilon_0]$, 我们有如下估计:

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})} (\bar{\mu}^{2(a-n-1)}_{m,u}(t)\mathcal{E}^u_{0,[l+1-n]}(t)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})} (\bar{\mu}^{2(a-n-1)}_{m,u}(t)\mathcal{F}^t_{0,[l+1-n]}(u)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})} (\bar{\mu}^{2(a-n-1)}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{E}'^u_{1,[l+1-n]}(t)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})} (\bar{\mu}^{2(a-n-1)}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-4}\mathcal{F}'^t_{1,[l+1-n]}(u)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})} (\bar{\mu}^{2(a-n-1)}_{m,u}(t)(1+\log(1+t))^{-4}K_{[l+1-n]}(t,u)) \leqslant CD^u_{[l+2]}$$

并且存在一个正实数 p 使得对 $q=p+2$, 我们有如下最高阶能量估计:

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})}(\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\mathcal{E}_{0,[l+2]}^{u}(t))\leqslant CD_{[l+2]}^{u}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})}(\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2p}\mathcal{F}_{0,[l+2]}^{t}(u))\leqslant CD_{[l+2]}^{u}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})}(\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\mathcal{E}_{1,[l+2]}^{\prime u}(t))\leqslant CD_{[l+2]}^{u}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})}(\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}\mathcal{F}_{1,[l+2]}^{\prime t}(u))\leqslant CD_{[l+2]}^{u}$$

$$\sup_{t\in[0,t_{*\epsilon_0})}(\bar{\mu}_{m,u}^{2a}(t)(1+\log(1+t))^{-2q}K_{[l+2]}(t,u))\leqslant CD_{[l+2]}^{u}$$

(vi) 同样对所有 $u\in[0,\epsilon_0]$ 和所有 $t\in[0,t_{*\epsilon_0}]$, 我们有如下关于声学量的 L^2 范数估计:

$$\mathcal{A}'^{u}_{[l-[a]-1]}(t)\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^3\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

$$\mathcal{B}^{u}_{[l-[a]]}(t)\leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^3\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

进一步, 对每个 $n=1,\cdots,[a]$ 和所有的 $u\in[0,\epsilon_0]$ 以及所有的 $t\in[0,t_{*\epsilon_0})$, 我们有

$$\mathcal{A}'^{u}_{[l-n]}(t)\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^3\bar{\mu}_{m,u}^{-a+n+1/2}(t)\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

$$\mathcal{B}^{u}_{\{l-n+1\}}(t)\leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^3\bar{\mu}_{m,u}^{-a+n+1/2}(t)\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

对 $n=0$ 和所有 $u\in[0,\epsilon_0]$ 以及所有 $t\in[0,t_{*\epsilon_0})$ 有

$$\mathcal{A}'^{u}_{[l]}(t)\leqslant C(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{q+1}\bar{\mu}_{m,u}^{-a+1/2}(t)\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

$$\mathcal{B}^{u}_{\{l+1\}}(t)\leqslant C(1+t)(1+\log(1+t))^{q+1}\bar{\mu}_{m,u}^{-a+1/2}(t)\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

最后, 对所有 $u\in[0,\epsilon_0]$ 和所有的 $t\in[0,t_{*\epsilon_0})$, 我们有如下最高阶的声学量估计:

$$\max_{i_1\cdots i_{l+1}}\|\mu R_{i_{l+1}}\cdots R_{i_1}\mathrm{tr}\chi'\|_{L^2(\Sigma_t^u)}\leqslant C\bar{\mu}_{m,u}^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

$$\sum_{m=0}^{l}\max_{i_1\cdots i_{l-m}}\|\mu R_{i_{l-m}}\cdots R_{i_1}(T)^m\not\Delta\mu\|_{L^2(\Sigma_t^u)}\leqslant C\bar{\mu}_{m,u}^{-2a}(t)(1+\log(1+t))^{2p}\sqrt{D_{[l+2]}^{u}}$$

第十八章　初值上使得激波产生的充分条件

这一章中我们将给出一个加在初值上的充分条件使得激波产生. 这里我们只考虑等熵无旋的情形.

这里体系与定理 17.1 相同. 从这个定理出发我们必须找出一个加在初值上的条件使得对某个有限的 t, 函数 μ 在 $\Sigma_t^{\epsilon_0}$ 上产生零点. 而 t 的值则将是 $t_{*\epsilon_0}$. 我们将运用引理 8.10, 命题 8.5, 命题 8.6. 在命题 8.6 中取 $t = s$, 我们得到

$$\mu(s, u, \vartheta) = \mu_{[1],s}(u, \vartheta)\hat{\mu}_s(s, u, \vartheta) \tag{18.1}$$

其中 $\mu_{[1],s}(u, \vartheta)$ 满足

$$\frac{1}{2} \leqslant \mu_{[1],s}(u, \vartheta) \leqslant \frac{3}{2} \tag{18.2}$$

而 $\hat{\mu}_s(s, u, \vartheta)$ 由

$$\hat{\mu}_s(s, u, \vartheta) = 1 + \hat{E}_s(u, \vartheta) \log(1 + s) \tag{18.3}$$

给出, 这里

$$\hat{E}_s(u, \vartheta) = \frac{E_s(u, \vartheta)}{\mu_{[1],s}(u, \vartheta)} \tag{18.4}$$

再由 (8.226),

$$|E_s(u,\vartheta)-\frac{1}{4}\ell P_s(u,\vartheta)|\leqslant C\delta_0(1+s)^{-1}(1+\log(1+s)) \tag{18.5}$$

其中 $P_s(u,\vartheta)$ 是由引理 8.10 定义的函数:

$$P_s(u,\vartheta)=(1+s)(\underline{L}\psi_0)(s,u,\vartheta) \tag{18.6}$$

在 (18.5) 和所有接下来的推导中正常数 δ_0 将如同定理 17.1 中所取的那样. 由上所述, 为了使 μ 在某个 $\Sigma_s^{\epsilon_0}$ 上产生零点 (s 有限), 在 $\ell>0$ 时我们需要一个关于 $\min_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2}P_s(u,\vartheta)$ 的负的上界对所有足够大的 s 成立; 而在 $\ell<0$ 时我们需要一个关于 $\max_{(u,\vartheta)\in[0,\epsilon_0]\times S^2}P_s(u,\vartheta)$ 的正的下界对所有足够大的 s 成立. 如定理 17.1 所述, $\ell=0$ 时没有激波产生, 即 $t_{*\epsilon_0}=\infty$. 所以接下来我们假设 $\ell\neq 0$.

上面陈述的条件不是一个加在初值上的条件. 我们重新考虑引理 8.10 的证明中关于 ψ_0 的波方程 ((8.180) 和 (8.181)):

$$L(\underline{L}\psi_0)+\nu\underline{L}\psi_0+\underline{\nu}L\psi_0=\rho_0' \tag{18.7}$$

其中

$$\rho_0'=\mu\not{\Delta}\psi_0+\mu\not{g}^{-1}(\not{d}\log\Omega,\not{d}\psi_0)-2\not{g}^{-1}(\zeta,\not{d}\psi_0) \tag{18.8}$$

考虑函数

$$\underline{\tau}=(1-u+t)\underline{L}\psi_0-(\psi_0-h_0) \tag{18.9}$$

我们有

$$L\underline{\tau}=(1-u+t)L(\underline{L}\psi_0)-L\psi_0+\underline{L}\psi_0 \tag{18.10}$$

对 $L(\underline{L}\psi_0)$ 代入 (18.7), 我们有

$$L\underline{\tau}=\omega \tag{18.11}$$

其中

$$\omega=-((1-u+t)\nu-1)\underline{L}\psi_0-((1-u+t)\underline{\nu}+1)L\psi_0+(1-u+t)\rho_0' \tag{18.12}$$

由定理 17.1 的结论 (iii), 再回忆

$$\nu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi + L\log\Omega)$$
$$\underline{\nu} + \alpha^{-1}\kappa\nu = \frac{1}{2}\alpha^{-1}\kappa L\log\Omega + \frac{1}{2}\underline{L}\log\Omega + \kappa\mathrm{tr}\not{k}$$

我们有如下估计:

$$|(1-u+t)\nu - 1| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{18.13}$$

$$|(1-u+t)\underline{\nu} + 1| \leqslant C\delta_0(1+\log(1+t)) \tag{18.14}$$

设 f 是定义在 $W^s_{\epsilon_0}$ 中的任意一个函数. 记 $\bar{f}(t,u)$ 为 f 在 $S_{t,u}$ 关于测度 $d\mu_{\tilde{\not{g}}}$ 的平均值:

$$\bar{f}(t,u) = \frac{1}{\tilde{\mathrm{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}} f d\mu_{\tilde{\not{g}}}, \quad \tilde{\mathrm{Area}}(t,u) = \int_{S_{t,u}} d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{18.15}$$

由第五章中的事实,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{t,u}} f d\mu_{\tilde{\not{g}}} = \int_{S_{t,u}} (Lf + 2\nu f) d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{18.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathrm{Area}}(t,u) = \int_{S_{t,u}} 2\nu d\mu_{\tilde{\not{g}}} = 2\bar{\nu}\tilde{\mathrm{Area}}(t,u) \tag{18.17}$$

所以由直接计算有

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{\tilde{\mathrm{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}} (Lf + 2\nu f - 2\bar{\nu}\bar{f}) d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{18.18}$$

注意到对 $S_{t,u}$ 上任意一对函数 f, g, 我们有

$$\int_{S_{t,u}} (fg - \bar{f}\bar{g}) d\mu_{\tilde{\not{g}}} = \int_{S_{t,u}} (f-\bar{f})(g-\bar{g}) d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{18.19}$$

我们可以将 (18.18) 写成

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}(t,u) = \overline{Lf} + 2\overline{(\nu-\bar{\nu})(f-\bar{f})} \tag{18.20}$$

我们对函数 $\underline{\tau}$ 运用 (18.20) 再由 (18.11) 得到

$$\frac{\partial\bar{\underline{\tau}}}{\partial t}(t,u) = \bar{\omega} + 2\overline{(\nu-\bar{\nu})(\underline{\tau}-\bar{\underline{\tau}})} \tag{18.21}$$

对这个关于 t 在 $[0,s]$ 上积分, 我们有

$$\underline{\overline{\tau}}(s,u)=\underline{\overline{\tau}}(0,u)+\int_0^s(\bar{\omega}+2\overline{(\nu-\bar{\nu})(\underline{\tau}-\underline{\overline{\tau}})})(t,u)dt \tag{18.22}$$

最后我们将 u 换成 $u'\in[0,u]$, 再乘以 $\tilde{\text{Area}}(0,u')$, 对 u' 在 $[0,u]$ 上面积分得到

$$\begin{aligned}&\int_0^u\underline{\overline{\tau}}(s,u')\tilde{\text{Area}}(0,u')du'\\&=\int_0^u\int_{S_{0,u'}}\underline{\tau}d\mu_{\tilde{\not{g}}}du'+\int_0^u\tilde{\text{Area}}(0,u')(\int_0^s(\bar{\omega}+2\overline{(\nu-\bar{\nu})(\underline{\tau}-\underline{\overline{\tau}})})(t,u')dt)du'\end{aligned} \tag{18.23}$$

我们将估计 (18.23) 右端的第二项. 交换积分次序, 这个积分变为

$$I(s,u)=\int_0^s(\int_0^u\tilde{\text{Area}}(0,u')(\bar{\omega}+2\overline{(\nu-\bar{\nu})(\underline{\tau}-\underline{\overline{\tau}})})(t,u')du')dt \tag{18.24}$$

由于 $\tilde{\text{Area}}(0,u')\leqslant\tilde{\text{Area}}(0,0)=4\pi$, 我们有

$$|I(s,u)|\leqslant C\int_0^s J(t,u)dt \tag{18.25}$$

其中 $J(t,u)$ 为如下积分:

$$J(t,u)=\int_0^u(|\bar{\omega}|+2\overline{|\nu-\bar{\nu}||\underline{\tau}-\underline{\overline{\tau}}|})(t,u')du' \tag{18.26}$$

我们首先考虑来自 $|\bar{\omega}|$, 通过 (18.26), 对 (18.25) 右端积分的贡献. 现在 ω 由 (18.12) 给出, 我们首先考虑 (18.12) 右端第三项. 我们有

$$(1-u+t)\bar{\rho}_0'(t,u)=\frac{1-u+t}{\tilde{\text{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}}\rho_0'd\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{18.27}$$

对 $S_{t,u}$ 上任意函数 f, 我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\not{\Delta}}f&=\frac{1}{\sqrt{\det\tilde{\not{g}}}}\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}((\tilde{\not{g}}^{-1})^{AB}\sqrt{\det\tilde{\not{g}}}\frac{\partial f}{\partial\vartheta^A})\\&=\frac{1}{\Omega\sqrt{\det\not{g}}}\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}((\not{g}^{-1})^{AB}\sqrt{\det\not{g}}\frac{\partial f}{\partial\vartheta^A})=\Omega^{-1}\not{\Delta}f\end{aligned} \tag{18.28}$$

在 $S_{t,u}$ 上分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_{S_{t,u}}\mu\not{\Delta}\psi_0d\mu_{\tilde{\not{g}}}&=\int_{S_{t,u}}\mu\Omega\tilde{\not{\Delta}}\psi_0d\mu_{\tilde{\not{g}}}\\&=-\int_{S_{t,u}}(\mu\tilde{\not{g}}^{-1}(\not{d}\Omega,\not{d}\psi_0)+\Omega\tilde{\not{g}}^{-1}(\not{d}\mu,\not{d}\psi_0))d\mu_{\tilde{\not{g}}}\\&=-\int_{S_{t,u}}(\mu\not{g}^{-1}(\not{d}\log\Omega,\not{d}\psi_0)+\not{g}^{-1}(\not{d}\mu,\not{d}\psi_0))d\mu_{\tilde{\not{g}}}\end{aligned} \tag{18.29}$$

回忆

$$-(\not d\mu + 2\zeta)\cdot \not g^{-1} = -(\eta+\zeta)\cdot \not g^{-1} = \Lambda$$

我们得到

$$\int_{S_{t,u}} \rho_0' d\mu_{\tilde{\not g}} = \int_{S_{t,u}} \Lambda \cdot \not d\psi_0 d\mu_{\tilde{\not g}} \tag{18.30}$$

现在由定理 17.1 的结论 (iii), 我们有

$$|\Lambda| \leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t)) \tag{18.31}$$

从而 (18.30) 通过 (18.27) 意味着

$$\begin{aligned}(1-u+t)|\overline{\rho}_0'(t,u)| &\leqslant \frac{1-u+t}{(\text{Area}(t,u))^{1/2}} \sup_{S_{t,u}}|\Lambda|(\int_{S_{t,u}} |\not d\psi_0|^2 d\mu_{\not g})^{1/2} \\ &\leqslant C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\int_{S_{t,u}} |\not d\psi_0|^2 d\mu_{\tilde{\not g}})^{1/2}\end{aligned} \tag{18.32}$$

这个对 (18.25) 的贡献被

$$\begin{aligned}&C\delta_0\sqrt{u}\int_0^s (1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\int_{\Sigma_t^u} |\not d\psi_0|^2)^{1/2} dt \\ &\leqslant C\delta_0\sqrt{u}(\int_0^s \int_{\Sigma_t^u} |\not d\psi_0|^2 dt)^{1/2}\end{aligned} \tag{18.33}$$

界定. (18.33) 右端的积分为

$$\int_{W_u^s} |\not d\psi_0|^2 dt du' d\mu_{\not g} \tag{18.34}$$

对任意变分这个积分已经在第七章中由 (7.146) 估计. 特别地, 对一阶变分 ψ_0, 我们有

$$\int_{W_u^s} |\not d\psi_0|^2 dt du' d\mu_{\not g} \leqslant C(\overline{K}[\psi_0](s,u) + \int_0^u \mathcal{F}_0^s[\psi_0](u')du') \leqslant C\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0) \tag{18.35}$$

最后一步由定理 5.1 得出. 则 (18.33) 被

$$C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} \tag{18.36}$$

界定. 接下来我们考虑 (18.12) 右端的前两项. 由 (18.13), 来自第一项的贡献被

$$
\begin{aligned}
& \frac{C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))}{\tilde{\text{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}}|\underline{L}\psi_0|d\mu_{\tilde{\not g}} \\
\leqslant & \frac{C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))}{(\tilde{\text{Area}}(t,u))^{1/2}}(\int_{S_{t,u}}|\underline{L}\psi_0|^2 d\mu_{\tilde{\not g}})^{1/2} \\
\leqslant & C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\int_{S_{t,u}}|\underline{L}\psi_0|^2 d\mu_{\tilde{\not g}})^{1/2}
\end{aligned}
\tag{18.37}
$$

界定, 所以相应的对 $J(t,u)$ 的贡献被

$$
C\delta_0\sqrt{u}(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](t)} \tag{18.38}
$$

界定, 以及由定理 5.1, 对 (18.25) 右端积分的贡献被

$$
C\delta_0\sqrt{u}(\int_0^s(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))dt)\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} \leqslant C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} \tag{18.39}
$$

界定. 当我们推导 (18.38) 时因子 $\sqrt{u}$ 来自于 Holder 不等式. 由 (18.14), (18.12) 右端第二项对 ϖ 的贡献被

$$
\begin{aligned}
& \frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{\tilde{\text{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}}|L\psi_0|d\mu_{\tilde{\not g}} \\
\leqslant & \frac{C\delta_0(1+\log(1+t))}{(\tilde{\text{Area}}(t,u))^{1/2}}(\int_{S_{t,u}}|L\psi_0|^2 d\mu_{\tilde{\not g}})^{1/2} \\
\leqslant & C\delta_0(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\int_{S_{t,u}}|L\psi_0|^2 d\mu_{\tilde{\not g}})^{1/2}
\end{aligned}
\tag{18.40}
$$

界定. 从而由定理 5.1, 这个对 (18.25) 右端的贡献被

$$
\begin{aligned}
& C\delta_0\sqrt{u}\int_0^s(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))(\int_{\Sigma_t^u}|L\psi_0|^2)^{1/2}dt \\
\leqslant & C\delta_0\sqrt{u}(\int_0^s\int_{\Sigma_t^u}|L\psi_0|^2 dt)^{1/2} \\
\leqslant & C\delta_0\sqrt{u}(\int_0^u\mathcal{F}_0^s[\psi_0](u')du')^{1/2} \\
\leqslant & C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)}
\end{aligned}
\tag{18.41}
$$

界定. 将 (18.36), (18.39), (18.41) 结合起来, 我们得出 $|\varpi|$ 对 (18.25) 右端的贡献被

$$
C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} \tag{18.42}
$$

界定.

最后我们考虑 $2\overline{|\nu-\overline{\nu}||\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|}$ 对 (18.25) 右端的贡献. 我们有

$$\overline{|\nu-\overline{\nu}||\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|}=\frac{1}{\tilde{\text{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}}|\nu-\overline{\nu}||\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|d\mu_{\tilde{\not{g}}} \tag{18.43}$$

由 (18.13) 有

$$\begin{aligned}|\nu-\bar{\nu}|&\leqslant|\nu-\frac{1}{1-u+t}|+|\bar{\nu}-\frac{1}{1-u+t}|\\&\leqslant C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))\end{aligned} \tag{18.44}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{|\nu-\overline{\nu}||\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|}&\leqslant\frac{C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))}{\tilde{\text{Area}}(t,u)}\int_{S_{t,u}}|\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|d\mu_{\tilde{\not{g}}}\\&\leqslant\frac{C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))}{(\tilde{\text{Area}}(t,u))^{1/2}}(\int_{S_{t,u}}|\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|^2d\mu_{\tilde{\not{g}}})^{1/2}\end{aligned} \tag{18.45}$$

从而由 (18.9), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{S_{t,u}}|\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|^2d\mu_{\tilde{\not{g}}}=\int_{S_{t,u}}\underline{\tau}^2d\mu_{\tilde{\not{g}}}-\int_{S_{t,u}}\overline{\underline{\tau}}^2d\mu_{\tilde{\not{g}}}\\\leqslant&\int_{S_{t,u}}\underline{\tau}^2d\mu_{\tilde{\not{g}}}\leqslant C(1+t)^2\int_{S_{t,u}}|\underline{L}\psi_0|^2d\mu_{\not{g}}+C\int_{S_{t,u}}|\psi_0|^2d\mu_{\not{g}}\end{aligned} \tag{18.46}$$

(18.46) 右端第一个积分对 (18.45) 右端的贡献被

$$C\delta_0(1+t)^{-2}(1+\log(1+t))(\int_{S_{t,u}}|\underline{L}\psi_0|^2d\mu_{\not{g}})^{1/2} \tag{18.47}$$

界定. 这个与 (18.37) 相同, 从而相应的贡献被 (18.39) 界定. 最后由引理 5.1, 来自于 (18.46) 右端第二项对 (18.45) 的贡献被

$$\begin{aligned}&C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))(\int_{S_{t,u}}|\psi_0|^2d\mu_{\not{g}})^{1/2}\\\leqslant&C\delta_0(1+t)^{-3}(1+\log(1+t))\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](t)}\end{aligned} \tag{18.48}$$

界定, 所以相应的对 (18.25) 的贡献同样被 (18.39) 界定. 将上述结果组合起来, 我们知道 $2\overline{|\nu-\overline{\nu}||\underline{\tau}-\overline{\underline{\tau}}|}$ 对 (18.25) 右端的贡献同样被 (18.42) 界定.

从而我们有

$$|I(s,u)|\leqslant C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} \tag{18.49}$$

由 (18.23) 得到

$$|\int_0^u \overline{\underline{\tau}}(s,u')\tilde{\text{Area}}(0,u')du' - \int_{\Sigma_0^u} \underline{\tau} d\mu_{\tilde{\not g}} du'| \leqslant C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} \tag{18.50}$$

由 (18.6) 和 (18.9), 我们有

$$P_s(u,\vartheta) = \underline{\tau} + \frac{1}{1-u+s}(u\underline{\tau} + (1+s)\psi_0) \tag{18.51}$$

记

$$Q(u) = \int_{\Sigma_0^u} \underline{\tau} d\mu_{\tilde{\not g}} du' \tag{18.52}$$

考虑 $\ell > 0$ 的情形. 如果对某个 $u \in (0, \epsilon_0]$ 和 (18.50) 中的常数 C 初值满足

$$Q(u) \leqslant -2C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} < 0 \tag{18.53}$$

则由 (18.50), 我们有

$$\int_0^u \overline{\underline{\tau}}(s,u')\tilde{\text{Area}}(0,u')du' \leqslant \frac{1}{2}Q(u) < 0 \tag{18.54}$$

从而

$$\min_{u'\in[0,\epsilon_0]} \overline{\underline{\tau}}(s,u') \leqslant \frac{(1/2)Q(u)}{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'} < 0 \tag{18.55}$$

所以有

$$\min_{(u',\vartheta)\in[0,u]\times S^2} \underline{\tau}(s,u',\vartheta) \leqslant \frac{(1/2)Q(u)}{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'} \tag{18.56}$$

再由 (18.51) 以及定理 17.1 的结论 (iii), 我们得到

$$\min_{(u',\vartheta)\in[0,u]\times S^2} P_s(u',\vartheta) \leqslant \frac{(1/4)Q(u)}{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'} < 0 \tag{18.57}$$

对足够大的 s 成立, 使得

$$\frac{1}{2} + s \geqslant -C\delta_0 \frac{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'}{(1/8)Q(u)} \tag{18.58}$$

所以由这一章刚开始的讨论, $t_{*\epsilon_0}$ 是有限的. 事实上, 那个 (18.57) 通过 (18.5) 意味着

$$\min_{(u',\vartheta)\in[0,u]\times S^2} E_s(u',\vartheta) \leqslant \frac{(1/32)\ell Q(u)}{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'} < 0 \tag{18.59}$$

对足够大的 s 成立使得

$$\frac{1+s}{1+\log(1+s)} \geqslant -C\delta_0 \frac{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'}{(1/32)\ell Q(u)} \tag{18.60}$$

其中常数 C 如 (18.5). 由 (18.3) 和 (18.2) 可知 s 有如下上界:

$$\log(1+s) \leqslant -\frac{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'}{(1/32)\ell Q(u)} \tag{18.61}$$

显然 (18.61) 中的上界超过了 (18.58) 和 (18.60) 中的下界, 所以 $t_{*\epsilon_0}$ 满足如下上界:

$$\log(1+t_{*\epsilon_0}) \leqslant -\frac{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'}{(1/32)\ell Q(u)} \tag{18.62}$$

当 $\ell<0$ 时, 用相同的方法可以推出

$$Q(u) \geqslant 2C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} > 0 \tag{18.63}$$

对 $u\in(0,\epsilon_0]$ 以及 (18.50) 中的常数 C 成立, 从而 $t_{*\epsilon_0}$ 有限, 事实上它有如下上界:

$$\log(1+t_{*\epsilon_0}) \leqslant -\frac{\int_0^u \tilde{\text{Area}}(0,u')du'}{(1/32)\ell Q(u)} \tag{18.64}$$

事实上, 我们有

$$\min_{(u',\vartheta)\in[0,u]\times S^2} E_s(u',\vartheta) \leqslant \frac{1}{4}\ell \max_{(u',\vartheta)\in[0,u]\times S^2} P_s(u',\vartheta) + C\delta_0(1+s)^{-1}(1+\log(1+s))$$

则我们得到一个类似于 (18.59) 的界. 现在我们就得到了产生激波的第一个条件:

定理 18.1.a $\ell<0$ 时, $Q(u)$ 满足

$$Q(u) \geqslant 2C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} > 0$$

$\ell>0$ 时, $Q(u)$ 满足

$$Q(u) \leqslant -2C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} < 0$$

我们可以将这个条件稍作修改, 使得它可以在 Euclid 空间中表达出来.

我们将 $d\mu_{\tilde{\not g}}$ 替换为 $d\mu_{\not g}$, 则由于 Ω 与 1 之间的差在 Σ_0^u 上面被 $C\delta_0$ 界定, 所以积分上变化的值被 $C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)}$ 界定. 进一步我们可以将 $\underline{L}$ 用它在常状态的值替代:

$$\mathring{\underline{L}} = \frac{\partial}{\partial x^0} - N^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{18.65}$$

然后定义

$$Q_1(u) = \int_{\Sigma_0^u} \underline{\tau}_0 d^3x$$

其中

$$\underline{\tau}_0 = r\mathring{\underline{L}}\psi_0 - \psi_0 = r(\partial_0\psi_0 - N^i\partial_i\psi_0) - \psi_0$$

由于我们现在是在初始面上,

$$\int_{\Sigma_0^u} \underline{\tau}_0 d\mu_{\not g} du'$$

与 $Q(u)$ 的差同样被 $C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)}$ 界定. 从而我们就得到了产生激波的第二个条件:

定理 18.1.b $\ell < 0$ 时, $Q_1(u)$ 满足

$$Q_1(u) \geqslant 2C'\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} > 0$$

$\ell > 0$ 时, $Q_1(u)$ 满足

$$Q_1(u) \leqslant -2C'\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_0^u[\psi_0](0)} < 0$$

上述两个条件只依赖于变分 ψ_0, 但是 $Q(u)$ 和 $Q_1(u)$ 依赖于 ψ_0 的一阶导数. 现在我们将得到依赖于其他变分 ψ_i, $i = 1, 2, 3$ 但是不依赖变分导数 (事实上是依赖于焓 h 和流体的法向速度 v_N) 的第三个条件.

在 Σ_0 上考虑波方程 (1.23), 我们可以将它写成如下形式:

$$\partial_0\psi_0 - \partial_i\psi_i = 2\psi_i\partial_0\psi_i - \psi_i\psi_j\partial_i\psi_j + (\eta^2 - 1)\Delta\phi$$

其中重复指标表示求和. 由上一章中一阶变分的 L^∞ 界, 我们可以在 Σ_0^u 上用 $C\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_{0,[1]}^u(0)}$ 界定 r 与右端乘积的 L^1 范数. 这里 $\sqrt{u}$ 来自于 Holder 不等式.

所以定义

$$Q_0(u) = \int_{\Sigma_0^u} (r(\partial_i\psi_i - N^i\partial_i\psi_0) - \psi_0) d\mu_{\not g} du' \tag{18.66}$$

我们有

$$|Q_0(u) - Q(u)| \leqslant C'\sqrt{\epsilon_0}\delta_0\sqrt{\mathcal{E}_{0,[1]}(0)} \tag{18.67}$$

所以在 $\ell > 0$ 时, 我们有

$$Q_0(u) \leqslant -2(C'+C)\sqrt{\epsilon_0}\delta_0\sqrt{\mathcal{E}^u_{0,[1]}(0)} < 0 \quad 对于 \quad u \in (0,\epsilon_0] \tag{18.68}$$

其中 C 形如 (18.53), 再由直接计算, (18.53) 成立并且我们有

$$Q(u) \leqslant \frac{1}{2}Q_0(u) \tag{18.69}$$

所以类似于 (18.54) 有

$$\int_0^u \underline{\tau}(s,u')\tilde{\text{Area}}(0,u')du' \leqslant \frac{1}{4}Q_0(u) < 0 \tag{18.70}$$

类似地, 在 $\ell > 0$ 时我们有

$$Q_0(u) \geqslant 2(C'+C)\sqrt{\epsilon_0}\delta_0\sqrt{\mathcal{E}^u_{0,[1]}(0)} > 0 \quad 对于 \quad u \in (0,\epsilon_0] \tag{18.71}$$

其中 C 形如 (18.63), 则 (18.63) 成立并且我们有

$$Q(u) \geqslant \frac{1}{2}Q_0(u) \tag{18.72}$$

所以

$$\int_0^u \underline{\tau}(s,u')\tilde{\text{Area}}(0,u')du' \geqslant \frac{1}{4}Q_0(u) > 0 \tag{18.73}$$

对这个分部积分, 再用散度定理:

$$\int_{\Sigma_0^u} r(\partial_i\psi_i - N^i\partial_i\psi_0)d^3x = \int_{S_{0,u}} r(\psi_0 - \psi_N)d\mu_{\not{g}} + \int_{\Sigma_0^u}(3\psi_0 - \psi_N)dx^3 \tag{18.74}$$

其实我们有

$$\int_{\Sigma_0^u} r\partial_i\psi_i d^3x = \int_{\Sigma_0^u}\partial_i(r\psi_i)d^3x - \int_{\Sigma_0^u}\psi_N d^3x$$

和

$$-\int_{\Sigma_0^u} rN^i\partial_i\psi_0 d^3x = \int_{\Sigma_0^u} r\partial_i N^i\psi_0 d^3x + \int_{\Sigma_0^u}\sum_i (N^i)^2\psi_0 d^3x - \int_{\Sigma_0^u}\partial_i(rN^i\psi_0)d^3x$$

所以我们得到了产生激波的第三个条件:

定理 18.1.c $\ell < 0$ 时,

$$Q_0(u) = \int_{S_{0,u}} r(h + v_N) + \int_{\Sigma_0^u} (2h + v_N)$$

满足

$$Q_0(u) \geqslant 2C''\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_{0,[1]}^u(0)}$$

$\ell > 0$ 时有

$$Q_0(u) \leqslant -2C''\delta_0\sqrt{u}\sqrt{\mathcal{E}_{0,[1]}^u(0)}$$

只要这三个条件中的任意一个成立, $t_{*\epsilon_0}$ 就是有限的, 并且它分别满足如下不等式:

$$\log(1 + t_{*\epsilon_0}) \leqslant \frac{Cu}{|\ell||Q(u)|}$$
$$\log(1 + t_{*\epsilon_0}) \leqslant \frac{C'u}{|\ell||Q_1(u)|}$$
$$\log(1 + t^{*\epsilon_0}) \leqslant \frac{C''u}{|\ell||Q_0(u)|}$$

第十九章 最大解定义域边界的结构

19.1 声学微分结构下奇性超曲面的性质

19.1.1 初步

这一章中我们将把 ϵ_0 视为一个在 $(0,1/2]$ 中取值的变量, 这就与定理 17.1 相容. 为了强调此时 ϵ_0 是变量, 我们将其记为 ϵ. 像第二章中那样记 $t_*(u)$ 为 C_u 的生成子参数 t 在最大解定义域中的上确界, 而记 $t_{*\epsilon}$ 为 $t_*(u)$ 的下确界, 取值 $u \in [0,\epsilon]$. 显然 $t_{*\epsilon}$ 是 ϵ 的非增函数. 从而定理 17.1 对每个 $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ 适用, 其中我们记 ϵ_0 为区间 $(0,1/2]$ 使得如下条件

$$C\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{D_{[l+2]}(\epsilon_0)} \leqslant \bar{\delta}_0, \quad D_{[l+2]}(\epsilon_0) = \sum_{\alpha,i} \|\partial_i\psi_\alpha\|^2_{H_{l+1}(\Sigma_0^{\epsilon_0})}$$

成立的最大实数. 对每个这样的 ϵ 我们可以找到一个 $\delta_0 \in (0,\bar{\delta}_0]$ 使得定理 17.1 的条件对 ϵ 成立, 即我们有

$$C\sqrt{\epsilon}\sqrt{D_{[l+2]}(\epsilon)} < \delta_0$$

($\sqrt{\epsilon}\sqrt{D_{[l+2]}(\epsilon)}$ 是 ϵ 的增函数.)

现在由定理 17.1, 对每个 $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$, 存在于 $W_\epsilon^{t_{*\epsilon}} \setminus \Sigma_{t_{*\epsilon}}^\epsilon$ 中的解可以在声学坐标中光滑地延拓到 $\Sigma_{t_{*\epsilon}}^\epsilon$, 但是存在一个非空集合 $K_\epsilon \subset \Sigma_{t_{*\epsilon}}^\epsilon$ 使得 μ 在这个集合中

为 0, 在其在 $\Sigma^{\epsilon}_{t_{*\epsilon}}$ 中的补集上是正的. 所以集合 K_{ϵ} 同样是函数 μ 在 $\Sigma^{\epsilon}_{t_{*\epsilon}}$ 上最小值的集合. 如果 q 是 K_{ϵ} 中的一个点, 则或者 q 是 μ 在 $\Sigma^{\epsilon}_{t_{*\epsilon}}$ 上取最小值的内点, 此时我们有

$$\mu(q)=0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u}(q)=0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta^A}(q)=0, \quad A=1,2, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}(q)\geqslant 0 \tag{19.1}$$

在内部零点成立, 并且我们假设如下非退化条件

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}(q)>0 \quad \text{在内部零点} \tag{19.2}$$

成立, 或者 q 是边界处的最小值点, 则它应该是在 $S_{t_{*\epsilon},\epsilon}$ 上面 (因为另一侧 $\Sigma^{\epsilon}_{t_{*\epsilon}}$ 的边界是 $S_{t_{*\epsilon},0}$, 这里是常状态), 此时我们有

$$\mu(q)=0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u}(q)\leqslant 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta^A}(q)=0, \quad A=1,2 \tag{19.3}$$

并且我们假设如下非退化条件

$$\frac{\partial \mu}{\partial u}(q)<0 \quad \text{在边界零点} \tag{19.4}$$

成立.

现在设 $u_m(\epsilon)$ 是 $u\in(0,\epsilon)$ 中对应 μ 在 $\Sigma^{u}_{t_{*\epsilon}}$ 上内部零点的最小值. 则如果我们将 ϵ 换为 $\epsilon'\in(0,\epsilon]$, 当 ϵ' 减小时, 直接由定义可以得出 $t_{*\epsilon'}$ 一直是常数直到 ϵ' 的取值为 $u_m(\epsilon)$, 即我们有

$$t_{*\epsilon'}=t_{*\epsilon} \quad \text{对于} \quad \epsilon'\in[u_m(\epsilon),\epsilon] \tag{19.5}$$

然后 $t_{*\epsilon'}$ 将会变大, μ 在 $\Sigma^{\epsilon'}_{t_{*u_m(\epsilon)}}$ 上面则处处是正的, 并且在一段时间内 $K_{\epsilon'}$ 只包含边界零点. 这种情形要么对所有 $\epsilon'\in(0,u_m(\epsilon))$ 成立, 要么当 ϵ' 减小时存在第一个 $\epsilon_1\in(0,u_m(\epsilon))$ 使得 μ 的内部零点出现在 $\Sigma^{\epsilon_1}_{t_{*\epsilon_1}}$ 上, 然后上述过程又重复一遍, 只不过用 ϵ_1 代替了 ϵ.

接下来我们将运用定理 17.1, (iv) 中的结论, 即对每个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$, 如下关于 $L\mu$ 的上界在 $\mathcal{U}_{\epsilon}\subset W^{t_{*\epsilon}}_{\epsilon}$ 中成立, 回忆在这个区域中有 $\mu<1/4$:

$$L\mu\leqslant -C^{-1}(1+t)^{-1}(1+\log(1+t))^{-1} \quad \text{在 } \mathcal{U}_{\epsilon} \text{ 中成立} \tag{19.6}$$

我们接下来将要用的是如下事实: 对有限的 t, $L\mu$ 在 $\mu<1/4$ 成立的区域有一个负的下界.

记

$$V_{\epsilon_0}=\bigcup_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)} W_{\epsilon}^{t_{*\epsilon}} \tag{19.7}$$

这个区域在定理 17.1 考虑的范围内 (我们不考虑常状态所处的区域). 这个区域包含在 W_{ϵ_0}, 即最大解定义域的闭包中, 并且设

$$J_{\epsilon_0}=\bigcup_{\epsilon\in(0,\epsilon_0)} K_{\epsilon}\subset V_{\epsilon_0} \tag{19.8}$$

μ 在 V_{ϵ_0} 中的零点集是 W_{ϵ_0} 奇异边界的一部分.

我们接下来将描述 W_{ϵ_0} 奇异边界上任意一点附近的声学时空结构. 现在考虑 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 使得在 $\Sigma_{t_{*\epsilon}}^{\epsilon}$ 上面 μ 有一个零点, 即存在 $u_0\in(0,\epsilon)$ 和一个属于 $S_{t_{*\epsilon},u_0}$ 的 μ 的零点. 由 (19.2), $\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}$ 在所有 μ 在 $S_{t_{*\epsilon},u_0}$ 中零点集上的最小值是正的. 从而存在 $u_1\in[0,u_0)$, $u_2\in(u_0,\epsilon]$ 使得在 $\Sigma_{t_{*\epsilon}}^{\epsilon}$ 中的环形区域

$$\bigcup_{u\in(u_1,u_2)} S_{t_{*\epsilon},u} \tag{19.9}$$

上除了 $S_{t_{*\epsilon},u_0}$ 没有 μ 的零点. 如果 $u_0=u_m(\epsilon)$, 则在 $S_{t_{*\epsilon},u}$ 上面没有 μ 的零点, 这对任意 $u\in[0,u_0)$ 都成立, 并且我们可以取 $u_1=0$.

由上述讨论, μ 在 $\Sigma_{t*\epsilon}^{\epsilon}$ 上的边界零点属于 $S_{t_{*\epsilon},\epsilon}$ 并且由 (19.4) 存在一个 $u_1<\epsilon$ 使得对 $u\in(u_1,\epsilon)$, μ 在 $S_{t_{*\epsilon},u}$ 上面没有零点. 进一步, 存在一个 $u_0>\epsilon$ 使得对 $\epsilon'\in[\epsilon,u_0]$, 在 $S_{t_{*\epsilon'},\epsilon'}$ 上存在一个 μ 在 $\Sigma_{t_{*\epsilon'}}^{\epsilon'}$ 中的边界零点, 并且没有内部零点, 并且存在一个 $u_2>u_0$ 使得对 $\epsilon'\in(u_0,u_2]$, 我们有 $t_{*\epsilon'}=t_{*u_0}$ 而在 $\Sigma_{t_{*\epsilon'}}$ 上 μ 有一个内部零点属于 $S_{t_{*\epsilon'},u_0}$, 对任意 $u\in[0,\epsilon')$, $u\neq u_0$, μ 在 $S_{t_{*\epsilon'},u}$ 上面没有零点 (解就不能被延拓到 $t_{*\epsilon}$, 因为它比 $t_{*\epsilon'}$ 大). 此时我们考虑 $\Sigma_{t_{*u_2}}^{u_2}$ 中的环形区域

$$\bigcup_{u\in(u_1,u_2)} S_{t_{*u_2},u} \tag{19.10}$$

19.1.2 内蕴观点

对所有满足 $u\in[0,\epsilon_0)$ 的 (t,u,ϑ), 考虑流形

$$\mathcal{M}_{\epsilon_0}=[0,\infty)\times[0,\epsilon_0)\times S^2 \tag{19.11}$$

则声学时空 $\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 中的区域 V_{ϵ_0} 对应于

$$\mathcal{V}_{\epsilon_0} = \{(t, u, \vartheta) \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}, \quad t \leqslant t_{*u}\} \tag{19.12}$$

并且 (19.9) 对应于

$$\{t_{*\epsilon}\} \times (u_1, u_2) \times S^2 \tag{19.13}$$

映射

$$(t, u, \vartheta) \in \mathcal{V}_{\epsilon_0} \mapsto x(t, u, \vartheta) \in V_{\epsilon_0}, \quad x = x^\alpha,\ \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{19.14}$$

(x^α 是 Galileo 时空中的直角坐标) 是一个从 $\mathcal{V}_{\epsilon_0}$ 到 V_{ϵ_0} 的连续同胚, 局部来说除去集合 $\mathcal{J}_{\epsilon_0}$ 它是一个微分同胚, 它的像为 J_{ϵ_0}, 在那里 μ 为 0. 在区域 (19.12) 中声学度量 g 由 (2.41) 给出:

$$g = -2\mu dt du + \alpha^{-2}\mu^2 du^2 + \not{g}_{AB}(d\vartheta^A + \Xi^A du)(d\vartheta^B + \Xi^B du) \tag{19.15}$$

回忆 $\alpha(t, u, \vartheta)$ 是一个在 1 附近的正函数并且在每个 (t, u), $\not{g}_{AB}(t, u, \vartheta)$ 是 S^2 上正定度量的分量. g 的分量是区域 $\mathcal{V}_{\epsilon_0}$ 及其边界上声学坐标的光滑函数. 并且刚才提到的 α 和 $\not{g}_{AB}$ 的性质同样在 $\mathcal{V}_{\epsilon_0}$ 的边界成立. 然而在边界的子集 $\mathcal{J}_{\epsilon_0}$ 上 μ 为 0, 所以由于

$$\sqrt{-\det g} = \mu\sqrt{\det \not{g}} \tag{19.16}$$

度量 (19.15) 在 $\mathcal{J}_{\epsilon_0}$ 上退化.

我们现在考虑声学度量 g 到 $t > t_*(u)$ 的光滑延拓. 这个延拓满足如下两个条件:

(i) 函数 α 仍然在 1 附近, 并且 $\not{g}$ 仍然是 S^2 上的正定度量.

(ii) 函数 μ 在 $\mu < 1/4$ 成立的区域仍然满足 $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ 有一个负的上界.

那么对每个 $(u, \vartheta) \in (0, \epsilon_0) \times S^2$ 有如下两种情形成立: 要么存在第一个 $t_*(u, \vartheta) \geqslant t_*(u)$ 使得 μ 为 0, 要么对 $t \geqslant t_*(u)$, μ 始终是正的. 考虑使得第一种情形成立的子集 $\tilde{\mathcal{D}} \subset (0, \epsilon_0) \times S^2$. 由延拓的性质 (ii), $\tilde{\mathcal{D}}$ 是一个开集. 若考虑 μ 在 $\Sigma^\epsilon_{t_{*\epsilon}}$ 上面属于 $S_{t_{*\epsilon}, u_0}$ 的内部零点, 我们有 $t_{*\epsilon} = t_*(u_0)$, 存在一个 $\vartheta_0 \in S^2$ 使得 $\mu(t_*(u_0), u_0, \vartheta_0) = 0$. 所以 $(u_0, \vartheta_0) \in \tilde{\mathcal{D}}$. 若考虑的是 $\Sigma^\epsilon_{t_{*\epsilon}}$ 上面的边界零点, 则对每

个 $\epsilon' \in [\epsilon, u_0]$ 存在一个 $\vartheta_*(\epsilon') \in S^2$ 使得 $\mu(t_*(\epsilon'), \epsilon', \vartheta_*(\epsilon')) = 0$. 所以此时 $\tilde{\mathcal{D}}$ 包含如下曲线:

$$\{(\epsilon', \vartheta_*(\epsilon')),\ \epsilon' \in [\epsilon, u_0]\} \tag{19.17}$$

考虑

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta),\ (u, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{D}}\} \tag{19.18}$$

这是函数 μ 在区域 $\tilde{\mathcal{D}} \subset (0, \epsilon_0) \times S^2$ 上的零水平集. 由 (ii), μ 是一个在零水平集上没有临界点的光滑函数. 所以 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是一个光滑的图.

由于 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是 $\tilde{\mathcal{D}} \subset (0, \epsilon_0) \times S^2$ 上面的一个图, 所以 (u, ϑ) 可以用来作为 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的坐标, 并且在这个坐标中, 由 (19.15), $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的诱导度量 g_* 由

$$g_* = (\not{g}_*)_{AB}(d\vartheta^A + \Xi_*^A du)(d\vartheta^B + \Xi_*^B du) \tag{19.19}$$

给出, 其中

$$(\not{g}_*)_{AB}(u, \vartheta) = \not{g}_{AB}(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) \tag{19.20}$$

是 S^2 上正定度量的分量, 并且

$$\Xi_*^A(u, \vartheta) = \Xi^A(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) \tag{19.21}$$

现在度量 (19.19) 是退化的:

$$\det g_* = 0 \tag{19.22}$$

19.1.3 不变曲线

我们看到尽管超曲面 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是奇异的, 即从内蕴观点来看, 度量 g 在它上面退化, 它可以看成是正则时空中的一个类声超曲面. 对任意 $q \in \tilde{\mathcal{H}}$, 存在唯一的直线 $L_q \subset T_q\tilde{\mathcal{H}}$, 我们可以将其视为由非零类声向量 $V(q)$ 张成的. 所以在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面我们有类声向量场 V 并且我们可以将其用坐标 (u, ϑ) 表示:

$$V = V^u \frac{\partial}{\partial u} + \not{V}, \quad \not{V} = V^A \frac{\partial}{\partial \vartheta^A} \tag{19.23}$$

在每个 $q=(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta)\in\tilde{\mathcal{H}}$, $\not{V}(q)$ 与 S_{*u} 在 q 相切, 并且投影到 $\{u\}\times B_u$, 其中 B_u 是如下区域:

$$B_u=\{\vartheta\in S^2,\ (u,\vartheta)\in\tilde{\mathcal{D}}\}\subset S^2$$

不失一般性, 我们可以设 $V_u=1$. 由直接计算我们有

$$\begin{aligned}0=g(V,V)=g_*(V,V)&=\not{g}_*(\not{V},\not{V})+2\not{g}_*(\Xi_*,\not{V})+\not{g}_*(\Xi_*,\Xi_*)\\&=\not{g}_*(\not{V}+\Xi_*,\not{V}+\Xi_*)\end{aligned}\tag{19.24}$$

由于 $\not{g}_*$ 是正定的, 上式成立当且仅当

$$\not{V}=-\Xi_*\tag{19.25}$$

所以 V 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的坐标 (u,ϑ) 下可以表示为

$$V=\frac{\partial}{\partial u}-\Xi_*\tag{19.26}$$

现在设

$$X(q)=X^t(q)\frac{\partial}{\partial t}+X^u(q)\frac{\partial}{\partial u}+X^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\tag{19.27}$$

是 $T_q\mathcal{M}_{\epsilon_0},q\in\tilde{\mathcal{H}}$ 中的任意一个向量. 则 $X(q)\in T_q\tilde{\mathcal{H}}$ 当且仅当

$$X(q)(t-t_*(u,\vartheta))=0\tag{19.28}$$

代入 (19.27), 这个等价于

$$X^t(q)=\frac{\partial t_*}{\partial u}X^u(q)+\frac{\partial t_*}{\partial\vartheta^A}X^A(q)\tag{19.29}$$

特别地, 将 V 视为时空中沿着 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的向量场, 可以表示为

$$V=(\frac{\partial t_*}{\partial u}-\Xi_*^A\frac{\partial t_*}{\partial\vartheta^A})\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u}-\Xi_*^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\tag{19.30}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}$ 是整个时空中的声学坐标向量场, 而不是 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上的. 事实上我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}&=\frac{\partial t_*}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u}\\\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}&=\frac{\partial t_*}{\partial\vartheta^A}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\end{aligned}$$

左边的向量场才是 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上的坐标向量场.

给定向量 $X(q) \in T_q\mathcal{M}_{\epsilon_0}, q \in \tilde{\mathcal{H}}$, 则存在唯一一个实数 λ 使得 $X(q) - \lambda L(q) \in T_q\tilde{\mathcal{H}}$. 事实上由 (19.29) 和 $L = \frac{\partial}{\partial t}$ 有

$$\lambda = X^t(q) - \frac{\partial t_*}{\partial u} X^u(q) - \frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^A} X^A(q)$$

这就定义了一个从 $T_q\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 到 $T_q\tilde{\mathcal{H}}$ 的投影算子 Π_*: $\Pi_* X(q) = X(q) - \lambda L(q)$. 我们称 Π_* 为到 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的 L-投影. 显然,

$$V = \Pi_* T \tag{19.31}$$

我们称 V 的积分曲线为不变曲线. 奇异曲面 $\tilde{\mathcal{H}}$ 就是由这些曲线生成的. 不变曲线是 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的一维子流形, 不依赖于声学函数 u 的选取. 同时它也是一维分布 $\{L_q,\ q \in \tilde{\mathcal{H}}\}$ 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的积分流形. 它的弧长为 0.

现在我们可以运用 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的坐标 (u, ϑ) 使得坐标直线 $\vartheta = \text{const}$ 就是不变曲线. 显然这个取法与下述条件等价:

$$\Xi_* = 0 \tag{19.32}$$

我们称相对应的声学坐标是典则的. 在这些坐标下 (19.19) 有如下形式:

$$g_* = (\not{g}_*)_{AB} d\vartheta^A d\vartheta^B \tag{19.33}$$

由 (19.32), 对 $t \leqslant t_*(u, \vartheta)$ 我们有

$$\Xi^A(t, u, \vartheta) = -\int_t^{t_*(u,\vartheta)} (\frac{\partial \Xi^A}{\partial t})(t', u, \vartheta) dt'$$

同样由于

$$\mu(t, u, \vartheta) = -\int_t^{t_*(u,\vartheta)} (\frac{\partial \mu}{\partial t})(t', u, \vartheta) dt'$$

我们得出在 $t < t_*(u, \vartheta)$ 有界的函数

$$\hat{\Xi}^A = \mu^{-1} \Xi^A \tag{19.34}$$

实际上是由

$$\hat{\Xi}^A(t, u, \vartheta) = \frac{\{(\partial \Xi^A/\partial t)(, u, \vartheta)\} \text{ 在 } [t, t_*(u, \vartheta)] \text{ 上的平均值}}{\{(\partial \mu/\partial t)(, u, \vartheta)\} \text{ 在 } [t, t_*(u, \vartheta)] \text{ 上的平均值}} \tag{19.35}$$

给出的, 从而光滑地延拓到 $t = t_*(u, \vartheta)$, 即延拓到 $\tilde{\mathcal{H}}$.

19.1.4 外蕴观点

我们现在由外蕴观点考虑奇异曲面 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的性质. 为此我们考虑声学度量的逆, 在每个正则点, 它是余切空间上的二次型, 由

$$g^{-1} = -(1/2\mu)(L \otimes \underline{L} + \underline{L} \otimes L) + (\not{g}^{-1})^{AB} X_A \otimes X_B \tag{19.36}$$

给出, 由于

$$L = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{L} = \alpha^{-1}\kappa L + 2T = \alpha^{-2}\mu\frac{\partial}{\partial t} + 2(\frac{\partial}{\partial u} - \mu\hat{\Xi}^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A})$$

所以 (19.36) 在典则声学坐标下有如下形式:

$$\begin{aligned}\mu g^{-1} = &-(\frac{\partial}{\partial t}\otimes\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\otimes\frac{\partial}{\partial t}) - \mu\alpha^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\otimes\frac{\partial}{\partial t}\\ &+\mu(\frac{\partial}{\partial t}\otimes\hat{\Xi}^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A} + \hat{\Xi}^A\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\otimes\frac{\partial}{\partial t}) + \mu(\not{g}^{-1})^{AB}\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\otimes\frac{\partial}{\partial\vartheta^B}\end{aligned} \tag{19.37}$$

我们看到, 尽管由于 g 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面退化, g^{-1} 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 爆破, μg^{-1} 事实上可以延拓到 $\tilde{\mathcal{H}}$. 从外蕴观点来看, $\tilde{\mathcal{H}}$ 的性质是由 $\mu(g^{-1})^{\alpha\beta}\partial_\alpha\mu\partial_\beta\mu$ 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的符号所决定的. 我们有

$$\begin{aligned}&\mu(g^{-1})^{\alpha\beta}\partial_\alpha\mu\partial_\beta\mu\\ &= -2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \mu(-\alpha^{-2}(\frac{\partial\mu}{\partial t})^2 + 2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^A}\hat{\Xi}^A + (\not{g}^{-1})^{AB}\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^A}\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^B})\end{aligned} \tag{19.38}$$

在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面 μ 为 0, 所以上式变为

$$\mu(g^{-1})^{\alpha\beta}\partial_\alpha\mu\partial_\beta\mu = -2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u} \tag{19.39}$$

由条件 (ii), 在某一个点 $q \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\mu(g^{-1})^{\alpha\beta}\partial_\alpha\mu\partial_\beta\mu > 0, = 0, < 0$, 分别对应于 $(\partial\mu/\partial u)(q) > 0, = 0, < 0$. 而 $\tilde{\mathcal{H}}$ 在 q 点类空, 类声, 类时分别对应于 $(\partial\mu/\partial u)(q) < 0, = 0, > 0$. 现在在任意一点最大解定义域的边界都不可能是类时的. 所以 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的类时部分不可能成为最大解定义域的边界. 所以我们将注意力集中在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的类空部分, 我们将其记为 $\mathcal{H}$ 并且将其边界记为 $\partial\mathcal{H}$, 在那里 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是类声的.

考虑按如下方式定义的开子集 $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{D}}$:

$$\mathcal{D} = \{(u,\vartheta) \in \tilde{\mathcal{D}},\ (\partial\mu/\partial u)(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta) < 0\} \tag{19.40}$$

(典则声学坐标). $\mathcal{D}$ 在 $\tilde{\mathcal{D}}$ 中的边界由下式给出:

$$\partial\mathcal{D} = \{(u, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{D}},\ (\partial\mu/\partial u)(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) = 0\} \tag{19.41}$$

则 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{D}$ 上面的图 (19.18):

$$\mathcal{H} = \{(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta),\ (u, \vartheta) \in \mathcal{D}\} \tag{19.42}$$

而 $\partial\mathcal{H}$ 是 $\partial\mathcal{D}$ 上面的图 (19.18):

$$\partial\mathcal{H} = \{(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta),\ (u, \vartheta) \in \partial\mathcal{D}\} \tag{19.43}$$

假设非退化条件

$$(u, \vartheta) \in \partial\mathcal{D} \quad \text{意味着} \quad (\partial^2\mu/\partial u^2)(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) \neq 0 \tag{19.44}$$

成立, $\partial\mathcal{D}$ 是两个互不相交集合的并: $\partial\mathcal{D} = \partial_-\mathcal{D} \bigcup \partial_+\mathcal{D}$, 其中

$$\begin{aligned} \partial_-\mathcal{D} &= \{(u, \vartheta) \in \partial\mathcal{D},\ (\partial^2\mu/\partial u^2)(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) > 0\} \\ \partial_+\mathcal{D} &= \{(u, \vartheta) \in \partial\mathcal{D},\ (\partial^2\mu/\partial u^2)(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) < 0\} \end{aligned} \tag{19.45}$$

$\mathcal{H}$ 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 中的边界 $\partial\mathcal{H}$ 同样分成了两个互不相交的并: $\partial\mathcal{H} = \partial_-\mathcal{H} \bigcup \partial_+\mathcal{H}$, 其中 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 分别是 $\partial_-\mathcal{D}$ 和 $\partial_+\mathcal{D}$ 上的图 (19.18):

$$\begin{aligned} \partial_-\mathcal{H} &= \{(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta),\ (u, \vartheta) \in \partial_-\mathcal{D}\} \\ \partial_+\mathcal{H} &= \{(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta),\ (u, \vartheta) \in \partial_+\mathcal{D}\} \end{aligned} \tag{19.46}$$

如果对应于 (u_0, ϑ_0) 存在一个 $\Sigma^\epsilon_{t_{*\epsilon}}$ 上 μ 的内部零点, 则 $(u_0\vartheta_0)$ 属于 $\partial_-\mathcal{D}$. 如果存在一个 μ 在 $\Sigma^\epsilon_{t_{*\epsilon}}$ 上面的边界零点, 则由 (19.4), $\mathcal{D}$ 包含曲线 (19.17) 但是不包含属于 $\partial_-\mathcal{D}$ 的点 $(u_0, \vartheta_*(u_0))$.

现在在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上我们有 $\mu = 0$, 即我们有

$$\mu(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) = 0 \quad \text{对于} \quad (u, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{D}} \tag{19.47}$$

对这个方程隐性地关于 u 求微分, 我们得到

$$\frac{\partial t_*}{\partial u}(u, \vartheta) = -\frac{\partial\mu/\partial u}{\partial\mu/\partial t}(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) \tag{19.48}$$

由性质 (ii), 我们有

$$\mathcal{D} = \{(u,\vartheta) \in \tilde{\mathcal{D}},\ (\partial t_*/\partial u)(u,\vartheta) < 0\} \tag{19.49}$$

和

$$\partial\mathcal{D} = \{(u,\vartheta) \in \tilde{\mathcal{D}},\ (\partial t_*/\partial u)(u,\vartheta) = 0\} \tag{19.50}$$

(典则坐标).

再次对 (19.48) 关于 u 求微分, 并且在 $\partial\mathcal{D}$ 取值, 我们由 (19.41) 和 (19.50) 得到

$$\frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u,\vartheta) = -\frac{\partial^2\mu/\partial u^2}{\partial\mu/\partial t}(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta) \quad 在\ \partial\mathcal{D}\ 上 \tag{19.51}$$

与 (19.45) 结合起来, 我们得到

$$\begin{aligned} \partial_-\mathcal{D} &= \{(u,\vartheta) \in \partial\mathcal{D},\ (\partial^2 t_*/\partial u^2)(u,\vartheta) > 0\} \\ \partial_+\mathcal{D} &= \{(u,\vartheta) \in \partial\mathcal{D},\ (\partial^2 t_*/\partial u^2)(u,\vartheta) < 0\} \end{aligned} \tag{19.52}$$

所以如果我们考虑 $\mathcal{H}$ 的一个连通分支及其对应的 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 的分支, 则 $\partial_-\mathcal{H}$ 的分支是非空的 (事实上 $\partial_-\mathcal{H}$ 对应于内部零点, 如果没有内部零点, 则这些点对应于 $u = \epsilon_0$), 并且它是 $\mathcal{H}$ 的过去边界, 而 $\partial_+\mathcal{H}$ 则有可能是空集 ($\mathcal{H}$ 可能是 C_0 的渐近线), 并且是 $\mathcal{H}$ 的未来边界, 沿着每一条不变曲线, t_* 在 $\partial_-\mathcal{H}$ 上面取到最小值, 在 $\partial_+\mathcal{H}$ 上面取到最大值.

现在考虑 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的函数 $f = \partial\mu/\partial u$. 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的典则坐标下, 我们有

$$f(u,\vartheta) = \frac{\partial\mu}{\partial u}(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta) \tag{19.53}$$

关于 u 求微分并且在 $\partial\mathcal{H}$ 上面取值, 我们由 (19.50) 得到

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,\vartheta) = \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta) \quad 在\ \partial\mathcal{H}\ 上 \tag{19.54}$$

从而 $\partial\mathcal{H}$ 是光滑函数 f 在光滑流形 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上的零水平集, 并由 (19.54) 和非退化条件 (19.44) 这是一个非临界的水平集. 所以 $\partial\mathcal{H}$ 及其两个分支 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 是光滑的. 进一步, 由于 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 不与 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的生成子 (即不变曲线) 相切, 它们都是声学时空中的类空曲面.

最后我们注意到 $\partial_+\mathcal{H}$ 不可能是最大解定义域的边界. 这是因为对给定的 $\partial_+\mathcal{H}$ 的分支, 存在一个 $\tilde{\mathcal{H}} \setminus \bar{\mathcal{H}}$ 的分支, 即 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的类时部分, 这个分支的未来边界正是我们

所考虑的 $\partial_+\mathcal{H}$ 的分支 (在 $\partial_+\mathcal{D}$ 上, $\partial^2 t_*/\partial u^2 < 0$, 所以当 u 减小时, $\partial t_*/\partial u$ 跨过 $\partial_+\mathcal{D}$ 之后变成正的, 从而 t_* 随着 u 减小而减小). 这个以及所有 $\tilde{\mathcal{H}} \setminus \bar{\mathcal{H}}$ 的分支都有一个过去边界, 这是因为 $\lim\limits_{u\to 0} t_*(u) = \infty$, 从而当接近 $u=0$ 时, 必然存在一个区间, 使得 $t_*(u,\vartheta)$ 在这个区间中沿着不变曲线增大. 问题中所考虑的分支的过去边界同样是下一个 $\mathcal{H}$ 的外向 (即沿着不变曲线 u 递减的方向) 分支的边界, 它也是 $\partial_-\mathcal{H}$ 的一个分支. 但最大解的定义域在由这个 $\partial_-\mathcal{H}$ 的分量的内向类声法向生成的内向特征超曲面 $\underline{C}$ 上就终止了. 所以最大解不能达到 $\partial_+\mathcal{H}$.

总结一下, 我们得到

命题 19.1 考虑一个声学度量 g 到 $t > t_*(u)$ 的延拓, 它满足如下两个条件:

(i) 函数 α 仍然在 1 附近, 并且度量 $\not{g}$ 在 S^2 上面仍然是正定的.

(ii) 函数 μ 的延拓使得 $\partial\mu/\partial t$ 在 $\mu < 1/4$ 成立的区域有一个负的上界.

那么存在一个开子集 $\tilde{\mathcal{D}} \subset (0,\epsilon_0)\times S^2$ 和一个光滑的图

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta),\ (u,\vartheta)\in\tilde{\mathcal{D}}\}$$

其中 μ 在这个图上为 0, 在图的下方是正的. 奇异超曲面 $\tilde{\mathcal{H}}$ 带上诱导度量 g_* 从内蕴的观点看是正则时空中的光滑类声超曲面. 它由 0 弧长的不变曲线生成. 在不变曲线上某一点 q 的切直线是 $\Pi_* T(q)$ 张成的线性空间, 即 $T(q)$ 到 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的 L- 投影. 典则声学坐标由 $\vartheta = \text{const}$ 定义, $\tilde{\mathcal{H}}$ 上面的坐标直线正是不变曲线. 另一方面, 如果考虑 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是如何嵌入在声学时空中的, 即外蕴的观点, $\tilde{\mathcal{H}}$ 在某一点 q 处是类空, 类声, 或者类时, 在典则声学坐标下分别对应于 $\partial\mu/\partial u < 0, = 0, > 0$ 在 q 成立, 或者等价地, 分别对应于 $\partial t_*/\partial u < 0, = 0, > 0$ 在 q 成立. $\tilde{\mathcal{H}}$ 的类时部分不可能是最大解定义域的边界. 进一步记 $\mathcal{H}$ 为 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的类空部分, 记 $\partial\mathcal{H}$ 为其边界, 满足如下非退化条件:

$$\partial^2\mu/\partial u^2 \neq 0 \quad \text{在 } \partial\mathcal{H} \text{ 上}$$

边界分为两个互不相交的集合的并 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$, 其中 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 分别对应于 $\partial^2\mu/\partial u^2 > 0$ 和 < 0, 或者等价地, 分别对应于 $\partial^2 t_*/\partial u^2 > 0$ 和 < 0. $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 是声学时空中的类空曲面. 对 $\mathcal{H}$ 的每个连通分支, 其相对应的 $\partial_-\mathcal{H}$ 和 $\partial_+\mathcal{H}$ 的分支分别是其过去和未来边界, 也正好是其不变曲线过去和未来终点的集合. 最后 $\partial_+\mathcal{H}$, 对比于 $\partial_-\mathcal{H}$, 可能是空集, 不可能是最大解定义域的边界.

19.2 起始于奇异边界类声测地线的三种情形

我们现在转向以最大解定义域奇异边界上任意一点 q 为起始点的类声测地线. 由上一节的讨论, 这样一个点要么属于 $\mathcal{H}$, 要么属于 $\partial_-\mathcal{H}$. 考虑 $\Sigma_0^{\epsilon_0}\bigcup\Sigma_0^E$ 的依赖区域, 其中 Σ_0^E 表示 Σ_0 中常状态所处的单位球面的外部. 考虑该依赖区域中任意一点 q, 每条从 q 出发指向过去的类声或者类时曲线会终止在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}\bigcup\Sigma_0^E$ 上. 特别地, 每条从 q 出发指向过去的类声测地线当然也会终止在 $\Sigma_0^{\epsilon_0}\bigcup\Sigma_0^E$ 上. 现在假设 q 是 μ 在 $\Sigma_{t_{*\epsilon}}^{\epsilon}$ 上的一个零点, 其中 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$. 则 $q\in W_\epsilon^{t_{*\epsilon}}$ 以及 $W_\epsilon^{t_{*\epsilon}}$ 与区域 $E^{t_{*\epsilon}}$ 的并, 其中 $E^{t_{*\epsilon}}$ 在 Galileo 时空中处在 C_0 的外部并且以 Σ_0 和 Σ_{t_*} 为边界, 其内部是常状态, 是限制在 $\Sigma_0^\epsilon\bigcup\Sigma_0^E$ 的初值的发展, 所以每条从 q 出发的指向过去的类声测地线会停留在 $W_\epsilon^{t_{*\epsilon}}\bigcup E^{t_{*\epsilon}}$ 中并且会终止于 $\Sigma_0^\epsilon\bigcup\Sigma_0^E$.

19.2.1 Hamilton 流

Lorentz 流形 $(\mathcal{M},g)$ 上的类声测地流从余切丛的观点来看是 $T^*\mathcal{M}$ 上面的 Hamilton 流, 其对应的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2}(g^{-1})^{\mu\nu}(q)p_\mu p_\nu \tag{19.55}$$

并对应于曲面 $H=0$. 这里 $(q^\mu,\ \mu=1,\cdots,n)$, $n=\dim\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的局部坐标 (在 Hamilton 框架下称为典则坐标), 将 $p\in T_q^*\mathcal{M}$ 在基底 $(dq^1(q),\cdots,dq^n(q))$ 下展开:

$$p=p_\mu dq^\mu(q)$$

这个展开中的系数 $(p_\mu,\ \mu=1,\cdots,n)$ 是 $T_q^*\mathcal{M}$ 上的线性坐标 (在 Hamilton 框架下称为典则动量). 所以我们有 $T^*\mathcal{M}$ 上面的局部坐标 $(q^\mu,\ \mu=1,\cdots,n;\ p_\mu,\ \mu=1,\cdots,n)$ 而定义 Hamilton 流的方程为典则方程

$$\frac{dq^\mu}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_\mu},\quad \frac{dp_\mu}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \tag{19.56}$$

Hamiltonian H 的每个水平集在 Hamilton 流的作用下是保持不变的. 所以我们可以考虑把流限制在 H 的每个水平集上, 特别地, 可以限制在曲面 $H=0$ 上. 设

$$H(q,p)=\Omega(q)\tilde{H}(q,p) \tag{19.57}$$

其中 Ω 是 $\mathcal{M}$ 上面的一个正函数. 则 $\tilde{H}$ 在零水平集上的 Hamilton 流重新参数化之后等价于 H 在零水平集上的 Hamilton 流. 更准确一些, 设 $\tau\mapsto(q(\tau),p(\tau))$ 是

典则方程 (19.56) 在曲面 $H=0$ 上的一个解. 然后定义一个新的参数 $\tilde{\tau}$ 如下:

$$\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}=\Omega(q(\tau)) \tag{19.58}$$

$\tilde{\tau}\mapsto(\tilde{q}(\tilde{\tau}),\tilde{p}(\tilde{\tau}))=(q(\tau),p(\tau))$ 是 (19.56) 的一个解 (H 被 $\tilde{H}$ 替代, 在曲面 $\tilde{H}=0$ 上 τ 被 $\tilde{\tau}$ 替代). 这是因为

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{q}^{\mu}}{d\tilde{\tau}}&=\frac{dq^{\mu}}{d\tau}\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}=\frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}\Omega^{-1}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\mu}}\\
\frac{d\tilde{p}_{\mu}}{d\tilde{\tau}}&=\frac{dp_{\mu}}{d\tau}\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}=-\frac{\partial H}{\partial q^{\mu}}\Omega^{-1}=-\frac{\partial(\tilde{H}\Omega)}{\partial q^{\mu}}\Omega^{-1}\\
&=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^{\mu}}-\tilde{H}\Omega^{-1}\frac{\partial \Omega}{\partial q^{\mu}}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^{\mu}}\quad \text{在 } \tilde{H}=0 \text{ 上}
\end{aligned}$$

如果 H 是 Hamiltonian (19.55), 则

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}(\tilde{g}^{-1})^{\mu\nu}(q)p_{\mu}p_{\nu},\quad \tilde{g}_{\mu\nu}=\Omega g_{\mu\nu}$$

上式对应于共形变换下类声测地线在重参数化之后保持不变.

在我们现在这个声学时空 $(\mathcal{M}_{\epsilon_0},g)$ 的情形, 度量矩阵的逆 g^{-1} 正如我们所看到的, 在 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上是奇异的, 而 μg^{-1} 在声学坐标下由 (19.37) 给出, 光滑地延拓到 $\tilde{\mathcal{H}}$. 所以我们将 Hamiltonian 取成

$$H=-p_u p_t+\mu(-\frac{1}{2}\alpha^{-2}p_t^2+p_t\hat{\Xi}^A\not{p}_A+\frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}\not{p}_A\not{p}_B) \tag{19.59}$$

这里 p_t,p_u 和 $\not{p}_A$, $A=1,2$ 是分别与坐标 t,u,ϑ^A, $A=1,2$ 相对应的动量分量. 所以 $\not{p}_A$ 是角动量 $\not{p}$ 的坐标分量. 给定一个解: $\tau\mapsto(q(\tau),p(\tau)),q=(t,u,\vartheta),p=(p_t,p_u,\not{p})$ (这是共形声学度量 $\mu^{-1}g$ 下的类声测地线, 其参数为仿射参数), 然后定义 s 为

$$\frac{ds}{d\tau}=\mu(q(\tau)) \tag{19.60}$$

然后对映射 $\tau\mapsto s(\tau)$ 取逆, 从而 $s\mapsto(q(\tau(s)),p(\tau(s)))$ 是声学度量 g 的类声测地线, s 为其仿射参数. 反过来也成立.

典则方程 (19.56) 关于 Hamiltonian (19.59) 有如下形式:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau}&=\frac{\partial H}{\partial p_t}=-p_u+\mu(-\alpha^{-2}p_t+\hat{\Xi}^A\not{p}_A)\\
\frac{du}{d\tau}&=\frac{\partial H}{\partial p_u}=-p_t\\
\frac{d\vartheta^A}{d\tau}&=\frac{\partial H}{\partial \not{p}_A}=\mu((\not{g}^{-1})^{AB}\not{p}_B+p_t\hat{\Xi}^A)
\end{aligned} \tag{19.61}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_t}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mu}{\partial t}(-\frac{1}{2}\alpha^{-2}p_t^2 + p_t \hat{\Xi}^A \not{p}_A + \frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}\not{p}_A\not{p}_B) \\
&\quad -\mu(\alpha^{-3}\frac{\partial \alpha}{\partial t}p_t^2 + p_t\frac{\partial \hat{\Xi}^A}{\partial t}\not{p}_A + \frac{1}{2}\frac{\partial(\not{g}^{-1})^{AB}}{\partial t}\not{p}_A\not{p}_B) \\
\frac{dp_u}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial \mu}{\partial u}(-\frac{1}{2}\alpha^{-2}p_t^2 + p_t \hat{\Xi}^A \not{p}_A + \frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{AB}\not{p}_A\not{p}_B) \\
&\quad -\mu(\alpha^{-3}\frac{\partial \alpha}{\partial u}p_t^2 + p_t\frac{\partial \hat{\Xi}^A}{\partial u}\not{p}_A + \frac{1}{2}\frac{\partial(\not{g}^{-1})^{AB}}{\partial u}\not{p}_A\not{p}_B) \\
\frac{d\not{p}_A}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta^A} = -\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta^A}(-\frac{1}{2}\alpha^{-2}p_t^2 + p_t \hat{\Xi}^B \not{p}_B + \frac{1}{2}(\not{g}^{-1})^{BC}\not{p}_B\not{p}_C) \\
&\quad -\mu(\alpha^{-3}\frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta^A}p_t^2 + p_t\frac{\partial \hat{\Xi}^B}{\partial \vartheta^A}\not{p}_B + \frac{1}{2}\frac{\partial(\not{g}^{-1})^{BC}}{\partial \vartheta^A}\not{p}_B\not{p}_C)
\end{aligned}
\tag{19.62}
$$

19.2.2 渐进性态

给定一个点 $q_0 \in \mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$, 我们将研究方程组 (19.61)—(19.62) 满足条件 $H = 0$ 的解, 其终点为 $q_0 = (t_0, u_0, \vartheta_0)$, 其中 $t_0 = t_*(u_0, \vartheta_0)$, 对应参数 $\tau = 0$. 我们研究与参数 $\tau \leqslant 0$ 对应的解. 这些是以 q_0 为终点的声学度量下的类声测地线, 即以 q_0 为顶点指向过去的类声测地锥, 只不过每条测地线的定向是指向未来以 q_0 为终点, 而不是从 q_0 指向过去.

现在条件 $H = 0$ 定义了一个正则点 $p \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$, 其中 $\mu(p) > 0$, 是一个在 $T_p^*\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 中的双向锥 ((19.59) 是一个关于 $T_p^*\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 坐标 p_μ 的二阶齐次多项式), 我们只考虑这个锥的后向部分. 在一个奇异点 q_0, 即 $\mu(q_0) = 0$, 条件 $H = 0$ 化为

$$
p_u p_t = 0 \tag{19.63}
$$

所以双锥化为两个超曲面 $p_t = 0$ 和 $p_u = 0$ 并且其后向部分退化为下面三部分:

(i) 下半超平面: $p_t = 0, \quad p_u < 0$.

(ii) 下半超平面: $p_u = 0, \quad p_t < 0$.

(iii) 平面: $p_t = p_u = 0$.

所以以 q_0 为顶点指向过去的测地线有三种情形. 以 q_0 为顶点并且其在 q_0 处的动量向量属于情形 (i) 的称为外向类声测地线. 这其中有特征超曲面 C_{u_0} 经过 q_0 的以 t 为参数的生成子, 它满足方程组 (19.61)—(19.62) 和条件 $H = 0$:

$$
t = t_0 + \tau, \quad u = u_0, \quad \vartheta = \vartheta_0; \quad p_t = 0, \quad p_u = -1, \quad \not{p} = 0 \tag{19.64}
$$

以 q_0 为终点并且其在 q_0 处的动量向量属于情形 (ii) 的称为内向类声测地线. 最终以 q_0 为终点并且其在 q_0 处的动量向量属于情形 (iii) 的称为其他类声测地线.

为了更直观地看到声锥在 $T_p^*\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 中当 p 趋向于 q_0 时是如何退化的 (其中 p 是一个正则点, q_0 是一个在奇异边界上的点), 我们考虑四维 Euclid 空间, 其直角坐标为 x_1, x_2, y, z, 取

$$x_1^2 + x_2^2 = (\not{g}^{-1})^{AB}\not{p}_A\not{p}_B, \quad y = p_u, \quad z = \alpha^{-1}p_t \tag{19.65}$$

为了得到一个很清晰的图景, 我们在一个给定的 Σ_t 上取 $\hat{\Xi} = 0$, 则声锥方程 $H = 0$ 变为

$$2yz = \kappa(x_1^2 + x_2^2 - z^2) \tag{19.66}$$

注意到这个声锥包含 y 轴以及直线

$$x_1 = x_2 = 0, \quad y = -\frac{1}{2}\kappa z \tag{19.67}$$

设 P_0 是正 y 轴上与原点 Euclid 距离为 1 的点. 则 P_0 的坐标为 $(0, 0, 1, 0)$. 同样设 P_1 为直线 (19.67) 与原点 Euclid 距离为 1 的点, 并且它处于正 z 轴的方向. 则 P_1 的坐标为

$$(0, 0, -(\kappa/2)/\sqrt{(\kappa/2)^2 + 1}, 1/\sqrt{(\kappa/2)^2 + 1})$$

设 H_1 为如下超平面:

$$z = -\lambda(y - 1), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{(\kappa/2)^2 + 1} + (\kappa/2)} \tag{19.68}$$

它经过 P_0 和 P_1, 并且由平行于 (x_1, x_2)- 平面的平面生成. 则 H_1 与声锥的交是 H_1 上的球体并且它在 (x_1, x_2, y)- 超平面上的投影为

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1; \\
&a = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa(2 - \kappa\lambda)}}, \quad b = \frac{1}{2 - \kappa\lambda}, \quad y_0 = \frac{1 - \kappa\lambda}{2 - \kappa\lambda}
\end{aligned} \tag{19.69}$$

其半长轴为 a, 半短轴为 b, 其中心是 y 轴上的点 y_0. H_1 上球体的中心则是 $(0, 0, y_0, z_0)$, $z_0 = -\lambda(y_0 - 1)$, 其半长轴 $a' = a$ 在一条通过中心并且平行于 (x_1, x_2)- 平面的直线上, 半短轴 $b' = \sqrt{1 + \lambda^2}b$ 在一条通过中心的 H_1 上与该平面平行的直线上. 当正则点 p 趋向于奇异点 q_0 时, $\kappa \to 0$, 所以 $\lambda \to 1$, $y_0 \to 1/2$, $z_0 \to 1/2$, $b' \to 1/\sqrt{2}$, 但是 $a' \to \infty$, 事实上 $\sqrt{2\kappa}a' \to 1$. 超平面 H_1 变成了超平面 $z = -(y-1)$,

并且 H_1 上的球体, 即 H_1 与声锥的交退化成平面 $y=1, z=0$ 和 $y=0, z=1$, 它与 (x_1,x_2)- 平面平行, 在这个平面上 $z=-(y-1)$ 与平面 $z=0$ 以及 $y=0$ 相交. 这就显示出声锥退化成了平面 $z=0$ 和 $y=0$.

我们回到以 q_0 为终点的声锥. $p_0=((p_t)_0,(p_u)_0,\not{p}_0)$ 的取值决定了类声测地线属于三种情形中的哪一种. 注意到 $p_0\neq 0$, 从而 (q_0,p_0) 是 Hamiltonian 方程组 (19.61)—(19.62) 的一个非临界点. 我们可以在每一种情形的测地线上加一个正规化的条件. 设 $\tau\mapsto(q(\tau),p(\tau))$ 是典则方程 (19.56) 与 Hamiltonian (19.55) 相关并且在 $\tau=0$ 满足初值条件 $q(0)=q_0$, $p(0)=p_0$ 的解. 则对任意正常数 a, $\tau\mapsto(q(a\tau),ap(a\tau))$ 是对应于初值条件 $q(0)=q_0$, $p(0)=ap_0$ 的解. 所以新条件给出的测地线是原测地线的重新参数化. 这是因为如果 $\tilde{q}(\tau)=q(a\tau)$, $\tilde{p}(\tau)=ap(a\tau)$, 则我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{q}^\mu}{d\tau}(\tau) &= a\frac{dq^\mu}{d\tau}(a\tau)=a\frac{\partial H}{\partial p_\mu}(q(a\tau),p(a\tau))\\
&= a(g^{-1})^{\mu\nu}(q(a\tau))p_\nu(a\tau)=(g^{-1})^{\mu\nu}(\tilde{q}(\tau))\tilde{p}_\nu(\tau)=\frac{\partial H}{\partial p_\mu}(\tilde{q}(\tau),\tilde{p}(\tau))\\
\frac{d\tilde{p}_\mu}{d\tau}(\tau) &= a^2\frac{dp_\mu}{d\tau}(a\tau)=-a^2\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q(a\tau),p(a\tau))\\
&= -\frac{1}{2}a^2\frac{\partial(g^{-1})^{\lambda\nu}}{\partial q^\mu}(q(a\tau))p_\lambda(a\tau)p_\nu(a\tau)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial(g^{-1})^{\lambda\nu}}{\partial q^\mu}(\tilde{q}(\tau))\tilde{p}_\lambda(\tau)\tilde{p}_\nu(\tau)=-\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(\tilde{q}(\tau),\tilde{p}(\tau))
\end{aligned}
$$

给定一个外向的以 q_0 为终点的类声测地线, 选取适当的尺度因子 a, 我们可以设 $(p_0)_u=-1$. 所以以 q_0 为终点的外向类声测地线对应于平面

$$
(p_0)_t=0,\quad (p_0)_u=-1\quad \text{在 } T^*_{q_0}\mathcal{M}_{\epsilon_0} \text{ 中成立} \tag{19.70}
$$

给定一个内向的以 q_0 为终点的类声测地线, 选取适当的尺度因子 a, 我们可以设 $(p_0)_t=-1$. 所以以 q_0 为终点的内向类声测地线对应于平面

$$
(p_0)_u=0,\quad (p_0)_t=-1\quad \text{在 } T^*_{q_0}\mathcal{M}_{\epsilon_0} \text{ 中成立} \tag{19.71}
$$

最后给定一个其他以 q_0 为终点的类声测地线, 选取适当的尺度因子 a, 我们可以设 $|(\not{p})_0|=\sqrt{(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_A(\not{p}_0)_B}=1$. 所以其他以 q_0 为终点的类声测地线对应于圆环

$$
(p_0)_t=0,\quad (p_0)_u=0,\quad |\not{p}_0|=1\quad \text{在 } T^*_{q_0}\mathcal{M}_{\epsilon_0} \text{ 中成立} \tag{19.72}
$$

考虑以 q_0 为终点的外向类声测地线. 此时方程 (19.61) 在 $\tau=0$ 的取值给出

$$\frac{dt}{d\tau}(0)=1,\quad \frac{du}{d\tau}(0)=0,\quad \frac{d\vartheta^A}{d\tau}(0)=0 \tag{19.73}$$

同样方程 (19.62) 给出

$$\begin{aligned}\frac{dp_t}{d\tau}(0)&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)|\not{p}_0|^2\\ \frac{dp_u}{d\tau}(0)&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)|\not{p}_0|^2\\ \frac{d\not{p}_A}{d\tau}(0)&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^A}(q_0)|\not{p}_0|^2\end{aligned} \tag{19.74}$$

对方程 (19.61) 关于 τ 求微分并在 $\tau=0$ 取值, 再用 (19.74) 以及由 (19.73) 有

$$\left(\frac{d\mu(q(\tau))}{d\tau}\right)_{\tau=0}=\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0) \tag{19.75}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{d\tau^2}(0)&=\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)|\not{p}_0|^2+\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)\hat{\Xi}^A(q_0)(\not{p}_0)_A\\ \frac{d^2u}{d\tau^2}(0)&=\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)|\not{p}_0|^2\\ \frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0)&=\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B\end{aligned} \tag{19.76}$$

由 (19.73), (19.76), 外向类声测地线在 q_0 处的切向量当 $\tau\to 0$ 时有如下展开式:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau}(\tau)&=1+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)|\not{p}_0|^2+\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)\hat{\Xi}^A(q_0)(\not{p}_0)_A\right)\tau+O(\tau^2)\\ \frac{du}{d\tau}(\tau)&=\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)|\not{p}_0|^2\tau+O(\tau^2)\\ \frac{d\vartheta^A}{d\tau}(\tau)&=\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B\tau+O(\tau^2)\end{aligned} \tag{19.77}$$

从而在典则声学坐标下 (见 (19.37)) 以 q_0 为终点的外向类声测地线的切向量当趋向于 q_0 的时候趋向于 C_{u_0} 经过 q_0 的生成子的切向量.

考虑以 q_0 为终点的内向类声测地线. 此时方程 (19.61) 在 $\tau=0$ 处的取值给出

$$\frac{dt}{d\tau}(0)=0,\quad \frac{du}{d\tau}(0)=1,\quad \frac{d\vartheta^A}{d\tau}(0)=0 \tag{19.78}$$

同样方程 (19.62) 给出

$$\begin{aligned}\frac{dp_t}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)(-\alpha^{-2}(q_0) - 2\hat{\Xi}^A(q_0)(\not{p}_0)_A + |\not{p}_0|^2)\\ \frac{dp_u}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)(-\alpha^{-2}(q_0) - 2\hat{\Xi}^A(q_0)(\not{p}_0)_A + |\not{p}_0|^2)\\ \frac{d\not{p}_A}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^A}(q_0)(-\alpha^{-2}(q_0) - 2\hat{\Xi}^B(q_0)(\not{p}_0)_B + |\not{p}_0|^2)\end{aligned} \tag{19.79}$$

对方程 (19.61) 关于 τ 求微分并且在 $\tau=0$ 取值, 再用 (19.79) 以及 (19.78) 有

$$(\frac{d\mu(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0} = \frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0) \tag{19.80}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{d\tau^2}(0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)\\ \frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0) &= \frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)((\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B - \hat{\Xi}^A(q_0))\end{aligned} \tag{19.81}$$

(19.81) 第一个方程的右端当 $q_0\in\mathcal{H}$ 时是负的. 然而当 $q_0\in\partial_-\mathcal{H}$ 时, 我们有

$$(\frac{d\mu(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0} = 0, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2}(0) = 0, \quad \frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0) = 0 \tag{19.82}$$

从而我们必须求第三阶导数. 由 (19.78) 和 (19.82) 在这种情形下, 我们有

$$(\frac{d^2\mu(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0} = \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0) \tag{19.83}$$

然后对 (19.62) 的第二个方程关于 τ 微分并在 $\tau=0$ 处取值, 我们有

$$\frac{d^2p_u}{d\tau^2}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)(\alpha^{-2}(q_0) + 2\hat{\Xi}^A(q_0)(\not{p}_0)_A - |\not{p}_0|^2) \tag{19.84}$$

对 (19.61) 的第二个和第三个方程关于 τ 求第二次微分, 再由 (19.83) 和 (19.84), 我们在 $q_0\in\partial_-\mathcal{H}$ 的情形得到

$$\begin{aligned}\frac{d^3t}{d\tau^3}(0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)\\ \frac{d^3\vartheta^A}{d\tau^3}(0) &= \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)((\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B - \hat{\Xi}^A(q_0))\end{aligned} \tag{19.85}$$

注意到 (19.85) 第一个方程的右端是正的. 以 q_0 为终点的内向类声测地线的切向

量当 $\tau \to 0$ 时有如下展开式:

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau}(\tau) &= 1 + O(\tau) \\
\frac{dt}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)\tau + O(\tau^2) \\
\frac{d\vartheta^A}{d\tau}(\tau) &= \frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)((\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B - \hat{\Xi}^A(q_0))\tau + O(\tau^2)
\end{aligned}
\tag{19.86}
$$

这是在 $q_0 \in \mathcal{H}$ 的情形, 我们用到了 (19.78) 和 (19.81). 而由 (19.78), (19.82), (19.85), 当 $q_0 \in \partial_-\mathcal{H}$ 时有

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau}(\tau) &= 1 + O(\tau) \\
\frac{dt}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}(q_0)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)\tau^2 + O(\tau^3) \\
\frac{d\vartheta^A}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}(q_0)((\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B - \hat{\Xi}^A(q_0))\tau^2 + O(\tau^3)
\end{aligned}
\tag{19.87}
$$

最后考虑其他以 q_0 为终点的类声测地线. 此时 (19.61) 和 (19.62) 在 $\tau = 0$ 的取值给出

$$
\frac{dt}{d\tau}(0) = 0, \quad \frac{du}{d\tau}(0) = 0, \quad \frac{d\vartheta^A}{d\tau}(0) = 0 \tag{19.88}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_t}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}(q_0) \\
\frac{dp_u}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0) \\
\frac{d\not{p}_A}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta^A}(q_0)
\end{aligned}
\tag{19.89}
$$

注意到 (19.89) 第一个方程的右端是正的. 对 (19.61) 关于 τ 求微分并在 $\tau = 0$ 取值, 再由 (19.89) 以及 (19.88) 得到

$$
\left(\frac{d\mu(q(\tau))}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0 \tag{19.90}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 t}{d\tau^2}(0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0) \\
\frac{d^2 u}{d\tau^2}(0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}(q_0) \\
\frac{d^2 \vartheta^A}{d\tau^2}(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{19.91}
$$

注意到 (19.91) 第二个方程的右端是负的, 而 (19.91) 第一个方程的右端当 $q_0 \in \mathcal{H}$ 时是负的, 当 $q_0 \in \partial_-\mathcal{H}$ 时为 0. 对 (19.61) 第三个方程的右端关于 τ 求第三次微分并在 $\tau = 0$ 取值得到

$$\frac{d^3\vartheta^A}{d\tau^3}(0) = (\frac{d^2\mu(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0}(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B \tag{19.92}$$

现在由 (19.88) 和 (19.91), 我们得到

$$\begin{aligned}(\frac{d^2\mu(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0} &= \frac{d^2t}{d\tau^2}(0)\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0) + \frac{d^2u}{d\tau^2}(0)\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0) \\ &\quad + \frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0)\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^A}(q_0) = (\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u})(q_0)\end{aligned} \tag{19.93}$$

代入 (19.92) 得到

$$\frac{d^3\vartheta^A}{d\tau^3}(0) = \frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B \tag{19.94}$$

在 $q_0 \in \partial_-\mathcal{H}$ 时, (19.91), (19.93) 以及 (19.94) 的第一个方程的右端全部为 0:

$$(\frac{d^2\mu(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0} = 0, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2}(0) = 0, \quad \frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0) = \frac{d^3\vartheta^A}{d\tau^3}(0) = 0 \tag{19.95}$$

对 (19.61) 的第一个方程关于 τ 求第二次微分并在 $\tau = 0$ 取值得到

$$\frac{d^3t}{d\tau^3}(0) = -\frac{d^2p_u}{d\tau^2}(0) \tag{19.96}$$

同样对 (19.62) 的第二个方程关于 τ 求微分并在 $\tau = 0$ 取值得到

$$\frac{d^2p_u}{d\tau^2}(0) = -\frac{1}{2}(\frac{d(\partial\mu/\partial u)(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0} \tag{19.97}$$

然而由 (19.88) 有

$$\begin{aligned}&(\frac{d(\partial\mu/\partial u)(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0} \\ &= \frac{\partial^2\mu}{\partial t\partial u}(q_0)\frac{dt}{d\tau}(0) + \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)\frac{du}{d\tau}(0) + \frac{\partial^2\mu}{\partial\vartheta^A\partial u}(q_0)\frac{d\vartheta^A}{d\tau}(0) = 0\end{aligned} \tag{19.98}$$

所以

$$\frac{d^3t}{d\tau^3}(0) = \frac{d^2p_u}{d\tau^2}(0) = 0 \tag{19.99}$$

我们必须计算到第四阶导数. 对 (19.61) 的第一个方程关于 τ 求第三次微分并在 $\tau = 0$ 处取值得到

$$\frac{d^4t}{d\tau^4}(0) = -\frac{d^3p_u}{d\tau^3}(0) + (\frac{d^3\mu(q(\tau))}{d\tau^3})_{\tau=0}\hat{\Xi}^A(q_0)(\not{p}_0)_A \tag{19.100}$$

同样对 (19.62) 的第二个方程关于 τ 求第二次微分并在 $\tau=0$ 处取值得到

$$\frac{d^3p_u}{d\tau^3}(0)=-\frac{1}{2}(\frac{d^2(\partial\mu/\partial u)(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0}\tag{19.101}$$

现在由 (19.88) 和 (19.91) 有

$$\begin{aligned}(\frac{d^2(\partial\mu/\partial u)(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0}&=\frac{\partial^2\mu}{\partial t\partial u}(q_0)\frac{d^2t}{d\tau^2}(0)\\&+\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)\frac{d^2u}{d\tau^2}(0)+\frac{\partial^2\mu}{\partial\vartheta^A\partial u}(q_0)\frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0)\\&=\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)\frac{d^2u}{d\tau^2}(0)=\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)\end{aligned}\tag{19.102}$$

另一方面由 (19.88), (19.91), (19.95), (19.98), (19.99) 以及 $(\partial\mu/\partial u)(q_0)=0$ 有

$$\begin{aligned}(\frac{d^3\mu(q(\tau))}{d\tau^3})_{\tau=0}&=\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)\frac{d^3t}{d\tau^3}(0)+\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)\frac{d^3u}{d\tau^3}(0)\\&+\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta^A}(q_0)\frac{d^3\vartheta^A}{d\tau^3}(0)+2(\frac{d(\partial\mu/\partial t)(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0}\frac{d^2t}{d\tau^2}(0)\\&+2(\frac{d(\partial\mu/\partial u)(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0}\frac{d^2u}{d\tau^2}(0)\\&+2(\frac{d(\partial\mu/\partial\vartheta^A)(q(\tau))}{d\tau})_{\tau=0}\frac{d^2\vartheta^A}{d\tau^2}(0)=0\end{aligned}\tag{19.103}$$

然后将 (19.102) 代入 (19.101) 得到 (19.100) 中的结果, 再由 (19.103) 有

$$\frac{d^4t}{d\tau^4}(0)=\frac{1}{4}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)\tag{19.104}$$

对 (19.61) 的第三个方程求第三次微分并在 $\tau=0$ 取值, 再考虑 (19.103), 我们得到

$$\frac{d^4\vartheta^A}{d\tau^4}(0)=(\frac{d^3\mu(q(\tau))}{d\tau^3})_{\tau=0}(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B=0\tag{19.105}$$

最后对 (19.61) 的第三个方程求第四次微分并在 $\tau=0$ 取值得到

$$\frac{d^5\vartheta^A}{d\tau^5}(0)=(\frac{d^4\mu(q(\tau))}{d\tau^4})_{\tau=0}(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B\tag{19.106}$$

而且我们有

$$\begin{aligned}&(\frac{d^4\mu(q(\tau))}{d\tau^4})_{\tau=0}\\&=\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)\frac{d^4t}{d\tau^4}(0)+3(\frac{d^2(\partial\mu/\partial u)(q(\tau))}{d\tau^2})_{\tau=0}\frac{d^2u}{d\tau^2}(0)\\&=((\frac{\partial\mu}{\partial t})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2})(q_0)\end{aligned}\tag{19.107}$$

我们用到了 (19.102), (19.104) 和 (19.91) 的第二式. 再代入 (19.106) 得到

$$\frac{d^5\vartheta^A}{d\tau^5}(0) = ((\frac{\partial\mu}{\partial t})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2})(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B \tag{19.108}$$

由上面的结果, 我们知道以 q_0 为终点的其他类声测地线的切向量当 $\tau \to 0$ 时有如下展开式:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)\tau + O(\tau^2)\\ \frac{du}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)\tau + O(\tau^2)\\ \frac{d\vartheta^A}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(\not{p}_0)_B\tau^2 + O(\tau^3)\end{aligned} \tag{19.109}$$

这是 $q_0 \in \mathcal{H}$ 的情形, 我们用到了 (19.91) 和 (19.94). 而当 $q_0 \in \partial_-\mathcal{H}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{24}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(q_0)\tau^3 + O(\tau^4)\\ \frac{du}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)\tau + O(\tau^2)\\ \frac{d\vartheta^A}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{24}((\frac{\partial\mu}{\partial t})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2})(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B\tau^4 + O(\tau^5)\end{aligned} \tag{19.110}$$

为了得到 Galileo 时空中的描述, 我们现在研究以 q_0 为终点的类声测地线切向量在三种情形当 $t \to t_0$ 时在直角坐标下的渐进行为. 以 q_0 为终点 τ 为参数的类声测地线切向量 $\tilde{L}'$ 的直角坐标分量 $\tilde{L}'^\mu$ 由下式给出:

$$\tilde{L}'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{du}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial\vartheta^A}\frac{d\vartheta^A}{d\tau} \tag{19.111}$$

如果类声测地线的参数是 t 而不是 τ, 则相应的切向量为

$$L' = \frac{\tilde{L}'}{dt/d\tau} \tag{19.112}$$

它的直角坐标分量由下式给出:

$$L'^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} + \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x^\mu}{\partial\vartheta^A}\frac{d\vartheta^A}{dt} \tag{19.113}$$

其中

$$\frac{du}{dt} = \frac{du/d\tau}{dt/d\tau}, \quad \frac{d\vartheta^A/d\tau}{dt/d\tau} \tag{19.114}$$

回忆第二章

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial t} = L^\mu, \quad \frac{\partial x^0}{\partial u} = \frac{\partial x^0}{\partial \vartheta^A} = 0, \quad \frac{\partial x^i}{\partial u} = T^i + \Xi^A X_A^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A} = X_A^i \tag{19.115}$$

从而我们得到

$$L'^0 = 1, \quad L'^i = L^i + \mu(\alpha^{-1}\hat{T}^i + \hat{\Xi}^A X_A^i)\frac{du}{dt} + X_A^i \frac{d\vartheta^A}{dt} \tag{19.116}$$

考虑以 $q_0 \in \mathcal{H}\bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 为终点的外向类声测地线. 由 (19.77), 我们有

$$\lim_{t\to t_0} \frac{du}{dt} = 0, \quad \lim_{t\to t_0} \frac{d\vartheta^A}{dt} = 0 \tag{19.117}$$

由于 $\lim\limits_{t\to t_0} \mu = 0$, 则对以 q_0 为终点的外向类声测地线, 我们有

$$\lim_{t\to t_0} L'^i = L^i(q_0) \tag{19.118}$$

从而在 Galileo 时空中, 以 q_0 为终点的外向类声测地线的切向量在趋向于 q_0 时趋向于 C_{u_0} 过 q_0 的生成子 $L(q_0)$. 从而向量 $L(q_0)$ 是不依赖于声学函数 u 选取的不变向量. 在 Galileo 时空中, 这个向量在乘上一个常数之后就是不变向量 $V(q_0)$, 它由 (19.23) 定义, 这是因为在 Galileo 时空中 $T(q_0)$ 为 0 (回忆 Π_* 的定义).

考虑以 $q_0 \in \mathcal{H}\bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 为终点的内向类声测地线. 如果 $q_0 \in \mathcal{H}$, 则考虑到可以由 (19.80) 推出的结论,

$$\mu(q(\tau)) = \frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)\tau + O(\tau^2) \tag{19.119}$$

我们由 (19.86) 得出的结论:

$$\lim_{t\to t_0} \mu\frac{du}{dt} = \frac{1}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)}, \quad \lim_{t\to t_0} \frac{d\vartheta^A}{dt} = \frac{(\not{g}^{-1})^{AB}(\not{p})_B - \hat{\Xi}^A(q_0)}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)} \tag{19.120}$$

如果 $q_0 \in \partial_- \mathcal{H}$, 则考虑到由 (19.82) 和 (19.83) 推出的结论:

$$\mu(q(\tau)) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}(q_0)\tau^2 + O(\tau^3) \tag{19.121}$$

我们由 (19.87) 得出

$$\lim_{t\to t_0} \mu\frac{du}{dt} = \frac{1}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)}, \quad \lim_{t\to t_0} \frac{d\vartheta^A}{dt} = \frac{(\not{g}^{-1})^{AB}(\not{p})_B - \hat{\Xi}^A(q_0)}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)} \tag{19.122}$$

这与 (19.120) 相同. 从而在两种情形我们都有

$$\lim_{t\to t_0} L'^i = L^i(q_0) + \frac{\alpha^{-1}(q_0)\hat{T}^i(q_0)}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0)+|\not{p}_0|^2)} + \frac{(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)X^i_A(q_0)(\not{p}_0)_B}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0)+|\not{p}_0|^2)} \tag{19.123}$$

注意到这个极限依赖于 $\not{p}_0$. 当 $\not{p}_0 = 0$ 时极限向量为 $(L+2\alpha\hat{T})(q_0) = \alpha^2(q_0)\hat{\underline{L}}(q_0)$, 其中 $\hat{\underline{L}}(q_0)$ 是 $L(q_0)$ 的共轭, 也是 $T_{q_0}S_{t_0,u_0}$ 正交补中的向量. 而当 $\not{p}_0$ 趋向于 ∞ 时, 极限向量趋向于 $L(q_0)$.

最后考虑其他以 $q_0 \in \mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 为终点的类声测地线. 如果 $q_0 \in \mathcal{H}$, 则考虑到由 (19.90) 和 (19.93) 推出的结论:

$$\mu(q(\tau)) = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)\tau^2 + O(\tau^3) \tag{19.124}$$

我们由 (19.109) 得到

$$\lim_{t\to t_0}\mu\frac{du}{dt} = 0, \quad \lim_{t\to t_0}\frac{d\vartheta^A}{dt} = 0 \tag{19.125}$$

如果 $q_0 \in \partial_-\mathcal{H}$, 则考虑到由 (19.90), (19.95), (19.103) 和 (19.107) 推出的结论:

$$\mu(q(\tau)) = \frac{1}{24}((\frac{\partial\mu}{\partial t})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2})(q_0)\tau^4 + O(\tau^5) \tag{19.126}$$

我们由 (19.110) 得到

$$\lim_{t\to t_0}\mu\frac{du}{dt} = 0, \quad \lim_{t\to t_0}\frac{d\vartheta^A}{dt} = 0 \tag{19.127}$$

从而在两种情形我们都有

$$\lim_{t\to t_0} L'^i = L^i(q_0) \tag{19.128}$$

所以在 Galileo 时空下, 当趋向于 q_0 时所有以 q_0 为终点的其他类声测地线切向量都趋向于向量 $L(q_0)$.

对固定的 $q_0 \in \mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 和每一类以 q_0 为终点的类声测地线, 我们考虑映射

$$(\tau;\not{p}_0) \mapsto (t,u,\vartheta) = F(\tau;\not{p}_0), \quad F = (F^t, F^u, \not{F}) \tag{19.129}$$

其中对外向和内向类声测地线有 $\not{p}_0 \in T_{\vartheta_0}S^2$, 它可以被视为 $\mathbb{R}^2$, 而对其他类声测地线 $\not{p}_0$ 则在 $T_{\vartheta_0}S^2$ 中的单位圆周上取值, 它可以被视为 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. 在这三种情形映射 (19.129) 都是光滑的 (常微分方程的标准理论), F^t 的取值被限制在 $t \geqslant 0$.

对固定的 $\not{p}_0$ 我们首先考虑映射

$$\tau \mapsto F^t(\tau;\not{p}_0) \tag{19.130}$$

我们将看到这个映射在外向类声测地线的情形是从 $[\tau_0,0]$ 到 $[0,t_0]$ 的微分同胚，在内向和其他类声测地线的情形是从 $[\tau_0,0)$ 到 $[0,t_0)$ 的微分同胚，后者与前者的区别在于外向情形时 $(dt/d\tau)(0)=1$ (见 (19.77))，而内向以及其他情形时 $(dt/d\tau)(0)=0$ (见 (19.86), (19.87), (19.109), (19.110)). 这里 $\tau_0=\tau_0(\not{p}_0)$ (p_t 和 p_u 是常数). 现在由表达式 (19.77) 和 (19.86), (19.87), (19.109), (19.110) 可以推出当 $\tau\in[\tau_1,0)$, τ_1 足够小时，有 $(dt/d\tau)(\tau)>0$ 成立. 所以要么 $(dt/d\tau)(\tau)>0$ 对所有 $\tau\in[\tau_0,0)$ 成立，要么存在第一个 τ_* 使得 $(dt/d\tau)(\tau_*)=0$. 一般来说对于一个形如 (19.55) 的 Hamiltonian 来说，条件 $H=0$ 等价于下述加在切向量上的条件:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dq^\mu}{d\tau}\frac{dq^\nu}{d\tau}=0 \tag{19.131}$$

在当前情形对于我们的 Hamiltonian (19.59), 条件 $H=0$ 等价于

$$-\frac{dt}{d\tau}\frac{du}{d\tau}+\frac{1}{2}\alpha^{-2}\mu(\frac{du}{d\tau})^2+\frac{1}{2}\not{g}_{AB}(\frac{d\vartheta^A}{d\tau}+\mu\hat{\Xi}^A\frac{du}{d\tau})(\frac{d\vartheta^B}{d\tau}+\mu\hat{\Xi}^B\frac{du}{d\tau})=0 \tag{19.132}$$

显然在 τ_* 我们有

$$\frac{dt}{d\tau}(\tau_*)=\frac{du}{d\tau}(\tau_*)=\frac{d\vartheta^A}{d\tau}(\tau_*)=0$$

由 (19.61), 我们有

$$p_t(\tau_*)=p_u(\tau_*)=\not{p}_A(\tau_*)=0$$

则取 $(t_*,u_*,\vartheta_*)=(t(\tau_*),u(\tau_*),\vartheta(\tau_*))$, 我们有

$$((t,u,\vartheta);(p_t,p_u,\not{p}))=((t_*,u_*,\vartheta_*);(0,0,0))$$

是 Hamiltonian 方程组 (19.61)—(19.62) 的一个解，它与先前的那个解在 $\tau=\tau_*$ 处相同. 由 Hamiltonian 方程组 (19.61)—(19.62) 的唯一性，我们的类声测地线必须与上述常值测地线在所有的 τ 都相同，特别地，我们有 $t(0)=t_*$, 但它与 $t(0)=t_0>t_*$ 矛盾. 所以上述第二种情形就被排除了，并且我们得出 $(dt/d\tau)(\tau)>0$ 对所有 $\tau\in[\tau_0,0)$ 成立. 从而映射 (19.130) 在外向类声测地线的情形是从 $[\tau_0,0]$ 到 $[0,t_0]$

的微分同胚; 在内向和其他测地线的情形是从 $[\tau_0, 0)$ 到 $[0, t_0)$ 的微分同胚. 所以我们可以得到一个从 $[0, t_0]$ 到 $[\tau_0, 0]$ 的 (19.130) 的逆映射

$$t \mapsto (F^t)^{-1}(t; \not{p}_0) \tag{19.133}$$

在外向类声测地线的情形它是 $[0, t_0]$ 上面的光滑映射, 在内向和其他类声测地线的情形它是 $[0, t_0)$ 上面的光滑映射.

考虑映射

$$(t; \not{p}_0) \mapsto (t, u, \vartheta) = G(t; \not{p}_0) = F((F^t)^{-1}(t; \not{p}_0); \not{p}_0) \tag{19.134}$$

以及对固定的 $t \in [0, t_0]$ 考虑映射

$$\not{p}_0 \mapsto (t, u, \vartheta) = G_t(\not{p}_0), \quad 其中 \quad G_t(\not{p}_0) = G(t; \not{p}_0) \tag{19.135}$$

这里像上面一样, 在外向和内向类声测地线的情形, $\not{p}_0 \in \mathbb{R}^2$, 而在其他类声测地线的情形, $\not{p}_0 \in S^1$. 这是映射 (19.135) 的定义域, 而它的值域则是超曲面 $\{t\} \times (-\infty, \epsilon_0) \times S^2$, 这个超曲面在流形 $\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 往

$$\mathcal{M}^e_{\epsilon_0} = \mathcal{M}_{\epsilon_0} \bigcup \mathcal{M}^E = [0, \infty) \times (-\infty, \epsilon_0) \times S^2$$

的延拓中. 其中

$$\mathcal{M}^E = [0, \infty) \times (-\infty, 0) \times S^2$$

对应于常状态的依赖区域. 超曲面 $\{t\} \times (-\infty, \epsilon_0) \times S^2$ 对应于 Galileo 时空中超平面 Σ_t 上 $u > \epsilon_0$ 的部分.

对每个 $t \in [0, t_0)$, 映射 (19.135) 是光滑的, 并且对 $t = t_0$, G_{t_0} 是常值映射

$$G_{t_0}(\not{p}_0) = G(t_0; \not{p}_0) = q_0 \tag{19.136}$$

同样由

$$G = (G^t, G^u, \not{G}), \quad G_t = (G^t_t, G^u_t, \not{G}_t) \tag{19.137}$$

我们有

$$G^t_t = G^t = t \tag{19.138}$$

我们有

$$\frac{\partial \mathcal{G}^A}{\partial t}(t;\not{p}_0) = \frac{d\vartheta^A}{dt}(t) = \frac{(d\vartheta^A/d\tau)(\tau)}{(dt/d\tau)(\tau)} \tag{19.139}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}^A}{\partial t^2}(t;\not{p}_0) &= \frac{d^2\vartheta^A}{dt^2}(t) \\ &= \left(\frac{(d^2\vartheta^A/d\tau^2)(dt/d\tau) - (d^2 t/d\tau^2)(d\vartheta^A/d\tau)}{(dt/d\tau)^3}\right)(\tau) \end{aligned} \tag{19.140}$$

在外向类声测地线的情形, 我们由 (19.73) 得到

$$\frac{\partial \mathcal{G}^A}{\partial t}(t_0;\not{p}_0) = 0 \tag{19.141}$$

然后再由 (19.76), 我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}^A}{\partial t^2}(t_0;\not{p}_0) = \frac{\partial \mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B \tag{19.142}$$

考虑矩阵 $\partial \mathcal{G}_t^A/\partial(\not{p}_0)_B$. 由 (19.141), (19.142) 有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{G}^A}{\partial(\not{p}_0)_B}\right)(t_0;\not{p}_0) = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \mathcal{G}^A}{\partial(\not{p}_0)_B}\right)(t_0;\not{p}_0) = \frac{\partial \mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0) \end{aligned} \tag{19.143}$$

从而有

$$\frac{\partial \mathcal{G}_t^A}{\partial(\not{p}_0)_B}(\not{p}_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)((t-t_0)^2) + O((t-t_0)^3) \tag{19.144}$$

和

$$(\det \partial \mathcal{G}_t/\partial \not{p}_0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)^2(q_0)\det \not{g}^{-1}(t-t_0)^4 + O((t-t_0)^5) \tag{19.145}$$

所以在外向类声测地线的情形映射 (19.135) 在每个 $\not{p}_0 \in \mathbb{R}^2$ 当 t 靠近 t_0 时是满秩的. 由隐函数定理我们得出在外向类声测地线的情形当 t 靠近 t_0 时, $\mathbb{R}^2$ 在映射 (19.135) 下的像是超曲面 $\{t\} \times (-\infty, \epsilon_0) \times S^2 \subset \mathcal{M}_{\epsilon_0}^e$ 中的一个浸入圆盘, 它对应于 Galileo 时空中的超平面 Σ_t. 为了说明这个像实际上是一个嵌入圆盘, 我们需要证

明映射 (19.135) 当 t 靠近 t_0 时是一对一的. 对 $|\not{p}_0| \leqslant B$ 和任意给定的 $B > 0$, 这个可以用由 (19.141) 和 (19.142) 推出的如下结论得出:

$$\not{G}_t^A(\not{p}_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) \tag{19.146}$$

前提是依赖于 B 的 t 足够靠近 t_0 (这就保证了 (19.146) 右端的第一项是 $\not{G}_t^A(\not{p}_0)$ 的主部). 为了处理 $|\not{p}_0| > B$ 的情形 (现在 B 是固定的), 对以 q_0 为终点的外向类声测地线, 我们选取一个动量向量 q_0 与 (19.70) 不同的重整化. 我们选取尺度因子 a 使得

$$|\not{p}_0| = 1 \tag{19.147}$$

则 $p_u = -1/|\not{p}_0|$. 这对应于微分同胚

$$f : \not{p}_0 \mapsto (-\frac{1}{|\not{p}_0|}, \frac{\not{p}_0}{|\not{p}_0|}) \tag{19.148}$$

它将 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 B 的圆盘外部映到 $(0, -\frac{1}{B}) \times \mathbb{S}^1$. 用类似于 (19.73) 和 (19.76) 的结论, 将它们代入 (19.139) 和 (19.140), 我们可以证明映射 $G_t \circ f^{-1}$ 在 $(0, -1/B) \times S^1$ 上面是一对一的. 事实上, 我们在这里所做的只是将 "径向变量" 拿到 Taylor 展开式的外面去了, 剩下的过程就像 $|\not{p}_0| < B$ 的情形一样. 但是我们仍需证明 $(0, -1/B) \times S^1$ 在映射 $G_t \circ f^{-1}$ 下的像不与半径为 B 的圆盘在 G_t 下的像相交. 事实上, 虽然我们换了一个坐标, 但 Taylor 展开本质上还是一样的, 所以上面提到的结论是显然的.

在其他类声测地线的情形, $(F^t)^{-1}$ 在 $t = t_0$ 处不可微, 所以我们首先考虑映射 F. 我们选取 $T_{\vartheta_0}S^2$ 上的一组基底 ω^1, ω^2, 它们是相对于 $\not{g}^{-1}(q_0)$ 的一组幺正基, 它们将单位圆周 $T_{\vartheta_0}S^2$ 上的点 $\not{p}_0$ 表示为

$$\not{p}_0 = \omega^1 \cos\varphi + \omega^2 \sin\varphi \tag{19.149}$$

当 $q_0 \in \mathcal{H}$ 时, 我们由 (19.88), (19.91), (19.94) 有

$$F^t(0;\varphi) = t_0, \quad \frac{\partial F^t}{\partial \tau}(0;\varphi) = 0, \quad \frac{\partial^2 F^t}{\partial \tau^2}(0;\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0) \tag{19.150}$$

和

$$\begin{gathered}
\not{F}^A(0;\varphi) = \vartheta_0^A, \quad \frac{\partial \not{F}^A}{\partial \tau}(0;\varphi) = \frac{\partial^2 \not{F}^A}{\partial \tau^2}(0;\varphi) = 0 \\
\frac{\partial^3 \not{F}^A}{\partial \tau^3}(0;\varphi) = \frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B(\varphi) \\
(\not{p}_0)_A = (\omega^1)_A \cos\varphi + (\omega^2)_A \sin\varphi
\end{gathered} \tag{19.151}$$

从而当 $q_0 \in \mathcal{H}$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
F^t(\tau;\varphi) &= t_0 + \frac{1}{4}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)\tau^2 + O(\tau^3) \\
\not{F}^A(\tau;\varphi) &= \vartheta_0^A + \frac{1}{6}\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial t}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B(\varphi)\tau^3 + O(\tau^4)
\end{aligned}
\tag{19.152}
$$

所以由 $\not{G}_t^A(\varphi) = \not{F}^A((F^t)^{-1}(t;\varphi);\varphi)$ 有

$$
\not{G}_t^A(\varphi) = \vartheta_0^A - \frac{4}{3}\frac{(\partial\mu/\partial t)(q_0)}{\sqrt{-(\partial\mu/\partial u)(q_0)}}(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B(\varphi)(t_0-t)^{3/2} + O((t_0-t)^2)
\tag{19.153}
$$

(我们用了 (19.152) 的第一式将 τ 用 $t-t_0$ 表示).

进一步, (19.150) 意味着

$$
\frac{\partial F^t}{\partial \varphi}(0;\varphi) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{\partial F^t}{\partial \varphi})(0;\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(\frac{\partial F^t}{\partial \varphi})(0;\varphi) = 0
\tag{19.154}
$$

所以

$$
\frac{\partial F^t}{\partial \varphi}(\tau;\varphi) = O(\tau^3)
\tag{19.155}
$$

同样 (19.151) 意味着

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \varphi}(0;\varphi) &= \frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \varphi})(0;\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \varphi})(0;\varphi) = 0 \\
\frac{\partial^3}{\partial \tau^3}(\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \varphi})(0;\varphi) &= \frac{\partial \mu}{\partial t}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(-(\omega^1)_B \sin\varphi + (\omega^2)_B\cos\varphi)
\end{aligned}
\tag{19.156}
$$

所以

$$
\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \varphi}(\tau;\varphi) = \frac{1}{6}\frac{\partial \mu}{\partial t}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(-(\omega^1)_B \sin\varphi + (\omega^2)_B\cos\varphi)\tau^3 + O(\tau^4)
\tag{19.157}
$$

对方程 $F^t((F^t)^{-1}(t;\varphi);\varphi) = t$ 关于 φ 隐性地求微分得

$$
\frac{\partial (F^t)^{-1}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial F^t/\partial \varphi}{\partial F^t/\partial \tau}
\tag{19.158}
$$

现在 (19.150) 意味着

$$
\frac{\partial F^t}{\partial \tau}(\tau;\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial u}(q_0)\tau + O(\tau^2)
\tag{19.159}
$$

将 (19.155) 和 (19.159) 代入 (19.158) 有

$$\frac{\partial(F^t)^{-1}}{\partial\varphi} = O(\tau^2) \tag{19.160}$$

对 $\not{G}^A(t;\varphi) = \not{F}^A((F^t)^{-1}(t;\varphi);\varphi)$ 关于 φ 求微分得到

$$\frac{\partial\not{G}_t^A}{\partial\varphi} = \frac{\partial\not{F}^A}{\partial\tau}\frac{\partial(F^t)^{-1}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\not{F}^A}{\partial\varphi} \tag{19.161}$$

现在 (19.151) 意味着

$$\frac{\partial\not{F}^A}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0)(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B(\varphi)\tau^2 + O(\tau^3) \tag{19.162}$$

由 (19.160) 和 (19.162), (19.161) 右端第一项为 $O(\tau^4)$, 而第二项由 (19.157) 给出. 我们得出

$$\frac{\partial\not{G}_t^A}{\partial\varphi} = a(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(-(\omega^1)_B\sin\varphi + (\omega^2)_B\cos\varphi)\tau^3 + O(\tau^4) \tag{19.163}$$

其中

$$a = \frac{1}{6}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}(q_0) \tag{19.164}$$

给出

$$\begin{aligned}
&\not{g}_{AB}(q_0)\frac{\partial\not{G}_t^A}{\partial\varphi}\frac{\partial\not{G}_t^B}{\partial\varphi}\\
&= a^2(\not{g}^{-1})^{AB}(-(\omega^1)_A\sin\varphi + (\omega^2)_A\cos\varphi)(-(\omega^1)_B\sin\varphi + (\omega^2)_B\cos\varphi)\tau^6 + O(\tau^7)\\
&= a^2\tau^6 + O(\tau^7)
\end{aligned} \tag{19.165}$$

上式在 $q_0 \in \mathcal{H}$ 时成立. 当 $q_0 \in \partial_-\mathcal{H}$ 时, 由 (19.88), (19.95), (19.99), (19.104), (19.105), (19.108), 一个类似的计算给出

$$\not{G}_t^A(\varphi) = \vartheta_0^A - \frac{8}{5}\frac{(-(\partial\mu/\partial t)(q_0))^{3/4}}{((1/6)(\partial^2\mu/\partial u^2)(q_0))^{1/4}}(t_0-t)^{5/4} + O((t_0-t)^{3/2}) \tag{19.166}$$

$$\frac{\partial\not{G}_t^A}{\partial\varphi} = b(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(-(\omega^1)_B\sin\varphi + (\omega^2)_B\cos\varphi)\tau^5 + O(\tau^6) \tag{19.167}$$

其中

$$b = \frac{1}{120}((\frac{\partial\mu}{\partial t})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2})(q_0) \tag{19.168}$$

以及

$$\not{g}_{AB}(q_0)\frac{\partial \not{\mathcal{G}}_t^A}{\partial \varphi}\frac{\partial \not{\mathcal{G}}_t^B}{\partial \varphi} = b^2\tau^{10} + O(\tau^{11}) \tag{19.169}$$

公式 (19.165) 和 (19.169) 意味着在其他以 q_0 为终点的类声测地线的情形映射 (19.135) 对每个 $\not{p}_0 \in S^1$ 当 t 离 t_0 足够近时是满秩的. 由隐函数定理我们得出在其他类声测地线的情形, S^1 在映射 (19.135) 下的像当 t 离 t_0 足够近时, 是超曲面 $\{t\} \times (-\infty, \epsilon_0) \times S^2 \subset \mathcal{M}_{\epsilon_0}^e$ 中的一个浸入圆环, 这个超曲面对应于 Galileo 时空中的超平面 Σ_t. 进一步, 我们由 (19.153) 和 (19.166) 推出映射 (19.135) 在 t 靠近 t_0 时是一对一的. 从而 S^1 在映射 (19.135) 下的像实际上是一个嵌入圆环. 这个圆环是对应于外向类声测地线的嵌入圆盘的边界.

用类似的方法可以看出在内向类声测地线的情形, $\mathbb{R}^2$ 在映射 (19.135) 下的像当 t 足够靠近 t_0 的时候是一个嵌入圆盘. 这个圆盘的边界是对应于其他类声测地线的圆环. 所以我们就证明了如下定理:

定理 19.1 设 $q_0 = (t_0, u_0, \vartheta_0)$ 是 $\mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$, 即最大解定义域的奇异边界上的一个点. 则 q_0 处 $T_{q_0}^*\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 中的后向声锥退化成如下三种情形:

(i) 下半超平面: $p_t = 0$, $p_u < 0$.

(ii) 下半超平面: $p_u = 0$, $p_t < 0$.

(iii) 平面: $p_t = p_u = 0$.

以 q_0 为终点的类声测地线有三种情形: 外向类声测地线, 内向类声测地线, 以及其他类声测地线, 它们分别对应于情形 (i), (ii), (iii). 设所有这些类声测地线都以 t 为参数. 则在 Galileo 时空中有如下结论成立:

当我们趋向于 q_0 时, 以 q_0 为终点的外向类声测地线的切向量趋向于 $L(q_0)$, 即 C_{u_0} 过 q_0 点的生成子的切向量. 而 $L(q_0)$ 则是与奇异点 q_0 相关的不变类声向量.

以 q_0 为终点的内向类声测地线的切向量当 $t \to t_0$ 时趋向于 ($\not{p}_0$ 是 q_0 处的角动量)

$$L^i(q_0) + \frac{\alpha^{-1}(q_0)\hat{T}^i(q_0)}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)} + \frac{(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)X_A^i(q_0)(\not{p}_0)_B}{(1/2)(\alpha^{-2}(q_0) + |\not{p}_0|^2)}$$

其中当 $\not{p}_0 = 0$ 时极限为 $\alpha^2(q_0)\underline{\hat{L}}(q_0)$, 而当 $\not{p}_0 \to \infty$ 时极限为 $L(q_0)$.

其他以 q_0 为终点的类声测地线的切向量当 $t \to t_0$ 时趋向于 $L(q_0)$.

在上述 (i), (ii), (iii) 每种情形, 对 $t \in [0, t_0]$, 考虑映射

$$\not{p}_0 \mapsto G_t(\not{p}_0)$$

其中 $G_t(\not{p}_0)$ 是沿着类声测地线在参数 t 处的点, 而 t_0 则对应于 q_0, 其动量向量为 $\not{p}_0$. 则当 $t \neq t_0$ 离 t_0 足够近时有如下结论成立:

在情形 (i) 时, 以 q_0 为终点的外向类声测地线与超平面 Σ_t 的交的像是一个嵌入圆盘.

在情形 (ii) 时, 以 q_0 为终点的内向类声测地线与超平面 Σ_t 的交的像也是一个嵌入圆盘.

在情形 (iii) 时, 以 q_0 为终点的其他类声测地线与超平面 Σ_t 的交的像是一个嵌入圆环, 它是两个圆盘的公共边界.

19.3 坐标变换

现在考虑对应于以 $q_0 \in \mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 为终点的外向类声测地线的映射 (19.129). 我们现在希望能够显式地看到它对 $q_0 \in \mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 的依赖, 所以我们把 $F(\tau; \not{p}_0)$ 记为 $F(\tau; q_0; \not{p}_0)$. 现在我们希望看到的是当声学函数 u 变为 u' 时 (对应于程函不同的初值), u' 的水平集 $C'_{u'}$ 的以最大解定义域奇异边界上的点为终点的生成子仍然是外向类声测地线, 其终点保持不变. 我们可以将这个变化视为由如下变换生成的:

$$u_0 = u_0(u'_0, \vartheta'_0), \quad \vartheta_0 = \vartheta_0(\vartheta'_0) \tag{19.170}$$

这个变换定义在 $\mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 上面, 并且保持不变曲线. 我们同样假设

$$\frac{\partial u_0}{\partial u'_0} > 0, \quad \det(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial \vartheta'_0}) > 0 \tag{19.171}$$

如果点 $q_0 \in \mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 在原坐标系中的坐标为 (t_0, u_0, ϑ_0), $t_0 = t_*(u_0, \vartheta_0)$, 则同一个点在新坐标系下的坐标为 $(t'_0, u'_0, \vartheta'_0)$, $t'_0 = t'_*(u'_0, \vartheta'_0)$, 其中

$$t'_*(u'_0, \vartheta'_0) = t_*(u_0, \vartheta_0) \tag{19.172}$$

所以 $t'_0 = t_0$.

我们将把 $\not{p}_0$ 确定为关于 (u'_0, ϑ'_0) 的一个函数使得如下给出的超曲面:

$$
\begin{aligned}
t &= M^t(\tau, u'_0, \vartheta'_0) = F^t(\tau; (u'_0, \vartheta'_0); \not{p}_0(u'_0, \vartheta'_0)) \\
u &= M^u(\tau, u'_0, \vartheta'_0) = F^u(\tau; (u'_0, \vartheta'_0); \not{p}_0(u'_0, \vartheta'_0)) \\
\vartheta &= \not{M}(\tau, u'_0, \vartheta'_0) = \not{F}(\tau; (u'_0, \vartheta'_0); \not{p}_0(u'_0, \vartheta'_0))
\end{aligned}
\tag{19.173}
$$

对常值 u'_0 是声学度量下的类声超曲面, 即关于新声学函数 u' 的水平集 $C'_{u'_0}$.

在 (19.173) 中, $(t'_*(u'_0, \vartheta'_0), u'_0, \vartheta'_0)$ 是点 $q_0 \in \mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 在新坐标系下的坐标, 所以我们有

$$
\begin{aligned}
F^t(0; (u'_0, \vartheta'_0); \not{p}_0) &= t_*(u_0, \vartheta_0) \\
F^u(0; (u'_0, \vartheta'_0); \not{p}_0) &= u_0 \\
\not{F}(0; (u'_0, \vartheta'_0); \not{p}_0) &= \vartheta_0
\end{aligned}
\tag{19.174}
$$

问题中的超曲面是由对应于常值 (u'_0, ϑ'_0) 的外向类声测地线所生成的, 这些超曲面是类声超曲面当且仅当这些类声测地线在声学度量下与对应于常值 τ 的 S'_{τ, u'_0} 正交. 然后设 X'_A 是 ϑ'^A_0 坐标线的切向量. 像以前一样, $\tilde{L}'$ 是类声测地线的切向量, 它以 τ 为参数. 则正交条件变为

$$
g(\tilde{L}', X'_A) = 0, \quad A = 1, 2 \tag{19.175}
$$

并且我们有

$$
\tilde{L}' = \frac{dF^t}{d\tau}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dF^u}{d\tau}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\not{F}^A}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \vartheta^A} \tag{19.176}
$$

和

$$
X'_A = X'^t_A \frac{\partial}{\partial t} + X'^u_A \frac{\partial}{\partial u} + X'^B_A \frac{\partial}{\partial \vartheta^B} \tag{19.177}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
X'^t_A &= \frac{\partial F^t}{\partial \vartheta'^A_0} + \frac{\partial F^t}{\partial (\not{p}_0)_B}\frac{\partial (\not{p}_0)_B}{\partial \vartheta'^A_0} \\
X'^u_A &= \frac{\partial F^u}{\partial \vartheta'^A_0} + \frac{\partial F^u}{\partial (\not{p}_0)_B}\frac{\partial (\not{p}_0)_B}{\partial \vartheta'^A_0} \\
X'^C_A &= \frac{\partial \not{F}^C}{\partial \vartheta'^A_0} + \frac{\partial \not{F}^C}{\partial (\not{p}_0)_B}\frac{\partial (\not{p}_0)_B}{\partial \vartheta'^A_0}
\end{aligned}
\tag{19.178}
$$

事实上, (19.173) 定义了一个由问题中类声超曲面覆盖的时空区域中的坐标变换, 它从 (t,u,ϑ) 坐标到 (τ,u_0',ϑ_0') 坐标, 并且在新坐标下我们有

$$\tilde{L}'=\frac{\partial}{\partial\tau},\quad X_A'=\frac{\partial}{\partial\vartheta_0'^A} \tag{19.179}$$

从而

$$[\tilde{L}',X_A']=0 \tag{19.180}$$

现在由 (19.60), 向量场 $\mu^{-1}\tilde{L}'$ 的积分曲线是仿射参数的类声测地线, 所以

$$D_{\tilde{L}'}\tilde{L}'=\mu^{-1}(\tilde{L}'\mu)\tilde{L}',\quad g(\tilde{L}',\tilde{L}')=0 \tag{19.181}$$

然后我们定义

$$\iota_A=g(\tilde{L}',X_A') \tag{19.182}$$

我们将证明 $\iota_A=0$.

沿着 $\tilde{L}'$ 的积分曲线, 我们有

$$\frac{d\iota_A}{d\tau}=\tilde{L}'(g(\tilde{L}',X_A'))=g(D_{\tilde{L}'}\tilde{L}',X_A')+g(\tilde{L}',D_{\tilde{L}'}X_A')$$

然后由 (19.180), $D_{\tilde{L}'}X_A'=D_{X_A'}\tilde{L}'$, 所以

$$g(\tilde{L}',D_{\tilde{L}'}X_A')=\frac{1}{2}X_A'(g(\tilde{L}',\tilde{L}'))=0$$

而由 (19.181),

$$g(D_{\tilde{L}'}\tilde{L}',X_A')=\mu^{-1}\frac{d\mu}{d\tau}\iota_A$$

从而有

$$\frac{d}{d\tau}(\mu^{-1}\iota_A)=0 \tag{19.183}$$

由 (19.15) 和 (19.176) 有

$$\begin{aligned}\iota_A={}&-\mu\frac{dF^t}{d\tau}X_A'^u-\mu\frac{dF^u}{d\tau}X_A'^t+\alpha^{-2}\mu^2\frac{dF^u}{d\tau}X_A'^u\\&+\not{g}_{BC}\Big(\frac{d\not{F}^B}{d\tau}+\mu\hat{\Xi}^B\frac{dF^u}{d\tau}\Big)(X_A'^C+\mu\hat{\Xi}^C X_A'^u)\end{aligned} \tag{19.184}$$

在 $\tau=0$ 处由 (19.73) 这个化为

$$(\iota_A)_{\tau=0}=(\not{g}_{BC}\frac{d\not{F}^B}{d\tau}X_A'^C)_{\tau=0}=0 \tag{19.185}$$

进一步, 我们有

$$\lim_{\tau\to 0}(\mu^{-1}\iota_A)=-(\frac{dF^t}{d\tau}X_A'^u+\frac{dF^u}{d\tau}X_A'^t)_{\tau=0}+(\not{g}_{BC}X_A'^C)_{\tau=0}\lim_{\tau\to 0}(\mu^{-1}\frac{d\not{F}^B}{d\tau}) \tag{19.186}$$

现在由 (19.73) 有

$$(\frac{dF^t}{d\tau})_{\tau=0}=1,\quad (\frac{dF^u}{d\tau})_{\tau=0}=0 \tag{19.187}$$

再由 (19.75) 和 (19.77),

$$\lim_{\tau\to 0}(\mu^{-1}\frac{d\not{F}^A}{d\tau})=(\not{g}^{-1})^{AB}(q_0)(\not{p}_0)_B \tag{19.188}$$

以及由 (19.174) 和 (19.178),

$$(X_A'^u)_{\tau=0}=\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta_0'^A},\quad (X_A'^B)_{\tau=0}=\frac{\partial\vartheta_0^B}{\partial\vartheta_0'^A} \tag{19.189}$$

注意到我们将 F^u 和 $\not{F}$ 视为 (u_0',ϑ_0') 的函数.

代入 (19.186), 我们得到

$$\lim_{\tau\to 0}(\mu^{-1}\iota_A)=-\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta_0'^A}+(\not{p}_0)_B\frac{\partial\vartheta_0^B}{\partial\vartheta_0'^A} \tag{19.190}$$

所以条件 $\lim_{\tau\to 0}(\mu^{-1}\iota_A)=0$ 等价于按如下方式将 $\not{p}_0$ 定义为 (u_0',ϑ_0') 的函数:

$$(\not{p}_0)_A=\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta_0'^B}\frac{\partial\vartheta_0'^B}{\partial\vartheta_0^A} \tag{19.191}$$

一旦 $\not{p}_0$ 按 (19.191) 定义, 方程 (19.183) 意味着 $\iota_A=0$ 对所有 τ 成立, 即正交性条件 (19.175) 处处成立, 并且由 (19.173) 给出的对应于常值 u_0' 的超曲面是外向特征超曲面.

接下来我们将 (u_0',ϑ_0') 简单记为 (u',ϑ'). 在固定的 $q_0,\not{p}_0$, 我们求映射 (19.130) 的逆从而得到映射 (19.133). 记

$$f(t',u',\vartheta')=(F^t)^{-1}(t';(u',\vartheta');\not{p}_0(u',\vartheta')) \tag{19.192}$$

然后代入 (19.173) 得到如下从原声学坐标 (t, u, ϑ) 到新声学坐标 (t', u', ϑ') 的变换:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ u &= N^u(t', u', \vartheta') = F^u(f(t', u', \vartheta'); (u', \vartheta'); \not{\phi}_0(u', \vartheta')) \\ \vartheta &= \not{N}(t', u', \vartheta') = \not{F}(f(t', u', \vartheta'); (u', \vartheta'); \not{\phi}_0(u', \vartheta')) \end{aligned} \tag{19.193}$$

在新坐标下的声学度量类似于 (19.15):

$$g = -2\mu' dt' du' + \alpha'^{-2}\mu'^2 du'^2 + \not{g}'_{AB}(d\vartheta'^A + \Xi'^A du')(d\vartheta'^B + \Xi'^B du') \tag{19.194}$$

其中我们有新的系数 α', μ', Ξ'^A 以及 $\not{g}'_{AB}$. 在任意一个局部坐标下, 我们有

$$\alpha'^{-2} = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu t'\partial_\nu t' = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu t\partial_\nu t = \alpha^{-2} \tag{19.195}$$

所以 α 和 α' 是相同的. 函数 μ' 由下式给出 (见第二章):

$$L' = \mu'\hat{L}', \quad \hat{L}'^\mu = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\nu u' \tag{19.196}$$

并且在任意局部坐标下, 我们有

$$\frac{1}{\mu'} = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu t'\partial_\nu u' = -(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_\mu t\partial_\nu u' \tag{19.197}$$

这里 L' 与 $\tilde{L}'$ 的关系为 (19.112), 它与 $\tilde{L}'$ 有着相同的积分曲线, 但它的参数是 t 而不是 τ, 而 $\hat{L}'$ 的积分曲线和它们相同而且还是仿射参数的. 正如我们上面所看到的, $\mu^{-1}\tilde{L}'$ 的积分曲线也和它们相同, 并且是仿射参数的. 给出相同定向的同一条测地线的两个参数 s 和 s' 满足 $s' = as + b$, 其中 a 和 b 沿着测地线都是常数, 并且 $a > 0$. 所以存在一个函数 $a(u', \vartheta') > 0$ 使得

$$\mu^{-1}\tilde{L}' = a\hat{L}' \tag{19.198}$$

另一方面, 由 (19.37) 和 (19.196) 的第二式我们得到, 在原声学坐标下有

$$\lim_{\tau\to 0}(\mu\hat{L}') = (\frac{\partial u'}{\partial u})_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{\partial u'}{\partial t})_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial u} \tag{19.199}$$

而由 (19.73) 的第一式,

$$\lim_{\tau\to 0}\tilde{L}' = \frac{\partial}{\partial t} \tag{19.200}$$

现在由 (19.193), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t}{\partial t'}=1, \quad \frac{\partial t}{\partial u'}=0, \quad \frac{\partial t}{\partial \vartheta'^A}=0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t'}=\frac{\partial F^u}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial t'}, \quad \frac{\partial u}{\partial u'}=\frac{\partial F^u}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial u'}+\frac{\partial F^u}{\partial u'}, \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta'^A}=\frac{\partial F^u}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial \vartheta'^A}+\frac{\partial F^u}{\partial \vartheta'^A} \\
&\frac{\partial \vartheta^A}{\partial t'}=\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial t'}, \quad \frac{\partial \vartheta^A}{\partial u'}=\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial u'}+\frac{\partial \not{F}^A}{\partial u'}, \quad \frac{\partial \vartheta^A}{\partial \vartheta'^B}=\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial \vartheta'^B}+\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \vartheta'^B}
\end{aligned} \tag{19.201}$$

在上面我们将 F^t, F^u 和 $\not{F}$ 视为如下 τ, u', ϑ' 的函数:

$$\begin{aligned}
F^t(\tau,u',\vartheta') &= F^t(\tau;(u',\vartheta');\not{\vartheta}_0(u',\vartheta')) \\
F^u(\tau,u',\vartheta') &= F^u(\tau;(u',\vartheta');\not{\vartheta}_0(u',\vartheta')) \\
\not{F}(\tau,u',\vartheta') &= \not{F}(\tau;(u',\vartheta');\not{\vartheta}_0(u',\vartheta'))
\end{aligned} \tag{19.202}$$

在 $\tau=0$ 处, 即对应于 $t'=t'_*(u',\vartheta')$, 我们有

$$f(t'_*(u',\vartheta'),u',\vartheta')=0 \tag{19.203}$$

由 (19.73), 我们有

$$\frac{\partial F^t}{\partial \tau}=1, \quad \frac{\partial F^u}{\partial \tau}=0, \quad \frac{\partial \not{F}^A}{\partial \tau}=0 \tag{19.204}$$

所以 (19.201) 的第二式和第三式在 $\tau=0$ 处化为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t'}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial u'}=\frac{\partial F^u}{\partial u'}, \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta'^A}=\frac{\partial F^u}{\partial \vartheta'^A} \\
&\frac{\partial \vartheta^A}{\partial t'}=0, \quad \frac{\partial \vartheta^A}{\partial u'}=\frac{\partial \not{F}^A}{\partial u'}, \quad \frac{\partial \vartheta^A}{\partial \vartheta'^B}=\frac{\partial \not{F}^A}{\partial \vartheta'^B}
\end{aligned} \tag{19.205}$$

现在在 $\tau=0$ 我们由 (19.170) 和 (19.174) 有

$$\begin{aligned}
&F^t(0,u',\vartheta')=t'_*(u',\vartheta')=t_*(u_0(u',\vartheta'),\vartheta_0(\vartheta')) \\
&F^u(0,u',\vartheta')=u_0(u',\vartheta') \\
&\not{F}(0,u',\vartheta')=\vartheta_0(\vartheta')
\end{aligned} \tag{19.206}$$

所以在 $\tau=0$ 处有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F^u}{\partial u'}=\frac{\partial u_0}{\partial u'}, \quad \frac{\partial F^u}{\partial \vartheta'^A}=\frac{\partial u_0}{\partial \vartheta'^A} \\
&\frac{\partial \not{F}^A}{\partial u'}=0, \quad \frac{\partial \not{F}^A}{\partial \vartheta'^B}=\frac{\partial \vartheta_0^A}{\partial \vartheta'^B}
\end{aligned} \tag{19.207}$$

代入 (19.205), 我们得出变换 (19.193) 在 $\tau = 0$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial(t,u,\vartheta)}{\partial(t',u',\vartheta')} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial u_0/\partial u' & \partial u_0/\partial \vartheta'^1 & \partial u_0/\partial \vartheta'^2 \\ 0 & 0 & \partial \vartheta_0^1/\partial \vartheta'^1 & \partial \vartheta_0^1/\partial \vartheta'^2 \\ 0 & 0 & \partial \vartheta_0^2/\partial \vartheta'^1 & \partial \vartheta_0^2/\partial \vartheta'^2 \end{bmatrix} \tag{19.208}$$

计算其逆矩阵, 我们有

$$(\frac{\partial u'}{\partial u})_{\tau=0} = \frac{1}{\partial u_0/\partial u'}, \quad (\frac{\partial u'}{\partial t})_{\tau=0} = 0 \tag{19.209}$$

代入 (19.199) 再与 (19.198) 和 (19.200) 比较, 我们由 (19.171) 得出

$$a(u',\vartheta') = \frac{\partial u_0}{\partial u'} > 0 \tag{19.210}$$

并且由 (19.37), (19.112) 和 (19.198) 有

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{a}{dF^t/d\tau} \tag{19.211}$$

从而我们知道 μ'/μ 有正的上界和下界. 同样由于 $\alpha' = \alpha$, 我们有

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{19.212}$$

接下来我们考虑新坐标下的系数 Ξ'^A 和 $\not{g}'_{AB}$. 由 (19.194) 有

$$\begin{aligned} \Xi'_A = \not{g}'_{AB}\Xi'^B = g'_{Au'} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \vartheta'^A}\frac{\partial x^\nu}{\partial u'} \\ = \mu^2(\alpha^{-2} + |\hat{\Xi}|^2)\frac{\partial u}{\partial \vartheta'^A}\frac{\partial u}{\partial u'} + \mu\hat{\Xi}_B(\frac{\partial u}{\partial \vartheta'^A}\frac{\partial \vartheta^B}{\partial u'} + \frac{\partial \vartheta^B}{\partial \vartheta'^A}\frac{\partial u}{\partial u'}) + \not{g}_{BC}\frac{\partial \vartheta^B}{\partial \vartheta'^A}\frac{\partial \vartheta^C}{\partial u'} \end{aligned} \tag{19.213}$$

这里

$$|\hat{\Xi}|^2 = \not{g}_{AB}\hat{\Xi}^A\hat{\Xi}^B, \quad \hat{\Xi}_A = \not{g}_{AB}\hat{\Xi}^B$$

由 (19.208) 有

$$(\frac{\partial \vartheta^A}{\partial u'})_{\tau=0} = 0$$

由 (19.213) 这意味着 Ξ' 在 $\tau=0$ 处为 0, 即在奇异边界 $\mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 上新坐标 (t',u',ϑ') 同样是典则的. 由 (19.211) 以及类似于 (19.35), $\partial\mu'/\partial t'<0$ 在 $\tau=0$ 处成立, 所以

$$\hat{\Xi}'=\mu'^{-1}\Xi' \tag{19.214}$$

在 $\tau=0$ 处是正则的 (a 不依赖于 t').

我们有

$$\begin{aligned}\not{g}'_{AB}&=g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\vartheta'^A}\frac{\partial x^\nu}{\partial\vartheta'^B}\\&=\mu^2(\alpha^{-2}+|\hat{\Xi}|^2)\frac{\partial u}{\partial\vartheta'^A}\frac{\partial u}{\partial\vartheta'^B}\\&\quad+\mu\hat{\Xi}_C(\frac{\partial\vartheta^C}{\partial\vartheta'^B}\frac{\partial u}{\partial\vartheta'^A}+\frac{\partial\vartheta^C}{\partial\vartheta'^A}\frac{\partial u}{\partial\vartheta'^B})+\not{g}_{CD}\frac{\partial\vartheta^C}{\partial\vartheta'^A}\frac{\partial\vartheta^D}{\partial\vartheta'^B}\end{aligned} \tag{19.215}$$

设

$$Y'=Y'^A\frac{\partial}{\partial\vartheta'^A},\quad \not{g}'(Y',Y')=\not{g}'_{AB}Y'^AY'^B \tag{19.216}$$

同样设

$$\tilde{\not{g}}_{AB}=\not{g}_{CD}\frac{\partial\vartheta^C}{\partial\vartheta'^A}\frac{\partial\vartheta^D}{\partial\vartheta'^B},\quad \tilde{\not{g}}(Y',Y')=\tilde{\not{g}}_{AB}Y'^AY'^B \tag{19.217}$$

我们可以由 (19.215) 得到如下关于 $\not{g}'$ 用 $\not{g}$ 表示的下界: 对任意形如 (19.216) 的向量场 Y' 有

$$\not{g}'(Y',Y')\geqslant\frac{\tilde{\not{g}}(Y',Y')}{1+\alpha^2\not{g}(\hat{\Xi},\hat{\Xi})} \tag{19.218}$$

成立. 事实上, 由 (19.215),

$$\not{g}'(Y',Y')=\mu^2(\alpha^{-2}+|\hat{\Xi}|^2)(Y'u)^2+2\mu(\hat{\Xi}'\cdot Y')(Y'u)+\tilde{\not{g}}(Y',Y')$$

其中

$$\hat{\Xi}'_B=\hat{\Xi}_C\frac{\partial\vartheta^C}{\partial\vartheta'_B}$$

然后由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\hat{\Xi}'\cdot Y'|\leqslant\sqrt{\tilde{\not{g}}^{-1}(\hat{\Xi}',\hat{\Xi}')}\sqrt{\tilde{\not{g}}(Y',Y')}$$

由于

$$\tilde{\not{g}}^{-1}(\hat{\Xi}', \hat{\Xi}') = \not{g}^{-1}(\hat{\Xi}, \hat{\Xi}) = |\hat{\Xi}|^2$$

我们得到

$$|\hat{\Xi}' \cdot Y'| \leqslant |\hat{\Xi}|\sqrt{\tilde{\not{g}}(Y', Y')}$$

设

$$a = \mu^2(\alpha^{-2} + |\hat{\Xi}|^2), \quad b = \mu|\hat{\Xi}|, \quad x = |Y'u|, \quad y = \sqrt{\tilde{\not{g}}(Y', Y')}$$

则

$$\not{g}'(Y', Y') \geqslant ax^2 - 2bxy + y^2$$

设

$$\rho = \frac{x}{y}$$

我们有

$$\frac{\not{g}'(Y', Y')}{\tilde{\not{g}}(Y', Y')} \geqslant a\rho^2 - 2b\rho + 1 \geqslant 1 - \frac{b^2}{a} = \frac{\mu^2\alpha^{-2}}{\mu^2(\alpha^{-2} + |\hat{\Xi}|^2)}$$

交换坐标 (t, u, ϑ) 和 (t', u', ϑ'), 我们得到一个相似的关于 $\not{g}$ 用 $\not{g}'$ 表示的下界. 设

$$Y = Y^A \frac{\partial}{\partial \vartheta^A}, \quad \not{g}(Y, Y) = \not{g}_{AB} Y^A Y^B \tag{19.219}$$

同样设

$$\tilde{\not{g}}'_{AB} = \not{g}'_{CD} \frac{\partial \vartheta'^C}{\partial \vartheta^A} \frac{\partial \vartheta'^D}{\partial \vartheta^B}, \quad \tilde{\not{g}}'(Y, Y) = \tilde{\not{g}}'_{AB} Y^A Y^B \tag{19.220}$$

则对任意形如 (19.219) 的 Y 有如下结论成立:

$$\not{g}(Y, Y) \geqslant \frac{\tilde{\not{g}}'(Y, Y)}{1 + \alpha^2 \not{g}'(\hat{\Xi}', \hat{\Xi}')} \tag{19.221}$$

总结上面的结果我们得到了如下命题:

命题 19.2 设 u' 是另外任意一个声学函数, 它使得 u' 的水平集 $C'_{u'}$ 的以最大解定义域奇异边界上的点为终点的类声测地线生成子是外向类声测地线. 从原声

学函数 u 到新声学函数 u' 的变化可以视为由如下 $\mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 上保持不变曲线的坐标变换所生成:

$$u_0 = u_0(u'_0, \vartheta'_0), \quad \vartheta_0 = \vartheta_0(\vartheta'_0) \tag{19.222}$$

从而两个声学坐标都是典则的. 我们要求变换 $\vartheta_0 \mapsto \vartheta'_0$ 是保持定向的并且在每条不变曲线上变换 $u_0 \mapsto u'_0$ 也是保持定向的. 特征超曲面 $C'_{u'_0}$ 在原声学坐标 (t, u, ϑ) 下的参数表示为

$$\begin{aligned} t &= F^t(\tau, u'_0, \vartheta'_0) \\ u &= F^u(\tau, u'_0, \vartheta'_0) \\ \vartheta &= \not{F}(\tau, u'_0, \vartheta'_0) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F^t(\tau, u'_0, \vartheta'_0) &= F^t(\tau; q_0; \not{p}_0(q_0)) \\ F^u(\tau, u'_0, \vartheta'_0) &= F^u(\tau; q_0; \not{p}_0(q_0)) \\ \not{F}(\tau, u'_0, \vartheta'_0) &= \not{F}(\tau; q_0; \not{p}_0(q_0)) \end{aligned}$$

这里 q_0 是 $\mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 上以 (t_0, u_0, ϑ_0) 为原坐标、以 $(t'_0, u'_0, \vartheta'_0)$ 为新坐标的点, 其中

$$t_0 = t_*(u_0, \vartheta_0) = t'_*(u'_0, \vartheta'_0) = t'_0$$

同样,

$$\not{p}_0(q_0) = \frac{\partial u_0}{\partial \vartheta'^A_0} d\vartheta'^A_0$$

是 q_0 处的角动量. 上述结论中

$$\tau \mapsto (F^t(\tau; q_0; \not{p}_0), F^u(\tau; q_0; \not{p}_0), \not{F}(\tau; q_0; \not{p}_0))$$

是外向类声测地线, 它以 τ 为参数, $\tau = 0$ 对应于终点 $q_0 \in \mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 并且其角动量为 $\not{p}_0$. 记 $\tau = f(t', u', \vartheta')$ 是方程

$$F^t(\tau, u', \vartheta') = t'$$

对固定的 (u', ϑ') 的解, 原声学坐标 (t, u, ϑ) 与新声学坐标 (t', u', ϑ') 之间的变换由

$$\begin{aligned} t &= t' \\ u &= N^u(t', u', \vartheta') \\ \vartheta &= \not{N}(t', u', \vartheta') \end{aligned}$$

给出, 其中

$$\begin{aligned} N^u(t', u', \vartheta') &= F^u(f(t', u', \vartheta'), u', \vartheta') \\ \not{N}(t', u', \vartheta') &= \not{F}(f(t', u', \vartheta'), u', \vartheta') \end{aligned}$$

声学度量在新声学坐标下有着相同的形式:

$$\begin{aligned} g &= -2\mu dt du + \alpha^{-2}\mu^2 du^2 + \not{g}_{AB}(d\vartheta^A + \mu\hat{\Xi}^A du)(d\vartheta^B + \mu\hat{\Xi}^B du) \\ g &= -2\mu' dt' du' + \alpha'^{-2}\mu'^2 du'^2 + \not{g}'_{AB}(d\vartheta'^A + \mu\hat{\Xi}'^A du')(d\vartheta'^B + \mu\hat{\Xi}'^B du') \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \alpha'$. 比值 μ'/μ 有正的上界和下界, 而度量 $\not{g}'$ 和 $\not{g}$ 在奇异边界的邻域内是相互等价的.

我们现在回到映射 (19.135). 我们考虑奇异边界上的点 $q_0 \in \mathcal{H} \bigcup \partial_- \mathcal{H}$ 和以 q_0 为终点的外向类声测地线. 设 $t = 0$, 我们有从 $\mathbb{R}^2$ 到 Σ_0 的映射

$$\begin{aligned} &\not{p}_0 \mapsto (0, u, \vartheta) = G_0(\not{p}_0) \\ &\qquad G_0(\not{p}_0) = G(0, \not{p}_0) = (0, F^u(f(\not{p}_0); \not{p}_0), \not{F}(f(\not{p}_0); \not{p}_0)) \\ &\qquad \text{其中 } \tau = f(\not{p}_0) \text{ 是 } F^t(\tau; \not{p}_0) = 0 \text{ 的解} \end{aligned} \tag{19.223}$$

设 u' 是定义在 Σ_0 上的函数, 在 Σ_0 上有唯一的最大值点 p_0, 并且它在 $\Sigma_0 \setminus \{p_0\}$ 上是没有临界点的光滑函数. 我们可以将 u' 视为关于 Σ_0 上声学坐标 $(0, u, \vartheta)$ 的函数, 其定义域为 $(-\infty, 1) \times \mathbb{S}^2 \setminus \{(u_0, \vartheta_0)\}$, 其中 (u_0, ϑ_0) 是最大值点 p_0 的坐标. 然后考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的函数

$$g(\not{p}_0) = u'(G_0(\not{p}_0)) \tag{19.224}$$

考虑函数 $g(\not{p}_0)$ 在某个点 $\not{p}_{0,M} \in \mathbb{R}^2$ 处取到的最大值. 这样一个最大值对应于点 $p_M \in \Sigma_0$, 其中

$$p_M = (0, u_M, \vartheta_M), \quad u_M = G_0^u(\not{p}_{0,M}), \quad \vartheta_M = \not{G}_0(\not{p}_{0,M}) \tag{19.225}$$

并且我们有

$$\frac{\partial g}{\partial(\not{\vartheta}_0)_A} = 0 \quad \text{在 } \not{\vartheta}_{0,M} \tag{19.226}$$

即

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial G_0^u}{\partial(\not{\vartheta}_0)_A} + \frac{\partial u'}{\partial \vartheta^B}\frac{\partial \not{G}_0^B}{\partial(\not{\vartheta}_0)_A} = 0 \quad \text{在 } \not{\vartheta}_{0,M} \tag{19.227}$$

考虑 u' 在 Σ_0 上过点 p_M 的水平集 $S'_{0,u'}$. 我们将看到 L' 在度量 g 下与 $S_{0,u'}$ 在 p_M 处正交.

这个结论与如下事实等价. 记 $C^-(q_0)$ 为以奇异边界上点 q_0 为顶点的后向声锥, 记 $C^-_{out}(q_0)$ 为 $C^-(q_0)$ 对应于以 q_0 为终点的外向类声测地线的那部分, 结论的陈述则是曲面 $C^-_{out}(q_0)\bigcap\Sigma_0$ 与 $S'_{0,u'}$ 在 p_M 处有相同的切平面:

$$T_{p_M}(C^-_{out}(q_0)\bigcap\Sigma_0) = T_{p_M}S'_{0,u'} \tag{19.228}$$

为了证明这个, 我们将造一组上式左边的基底, 然后证明它也是上式右边的一组基底.

考虑向量场

$$Y^A = \frac{\partial F^t}{\partial(\not{\vartheta}_0)_A}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial F^u}{\partial(\not{\vartheta}_0)_A}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \not{F}^B}{\partial(\not{\vartheta}_0)_A}\frac{\partial}{\partial \vartheta^B}, \quad A = 1,2 \tag{19.229}$$

它们与 $C^-_{out}(q_0)$ 的那些对应于常值 τ 的截面相切 (回忆映射 F, 我们可以将 τ 和 $\not{\vartheta}_0$ 视为相互独立的坐标), 所以它们在度量 g 下与 $\tilde{L}'$ 正交. 对任意 $p \in C^-_{out}(q_0)$, $(Y^1(p), Y^2(p))$ 是 p 处对应于 $\tau = \text{const}$ 的 $C^-_{out}(q_0)$ 过 p 的截面切空间的一组基, 前提当然是 $Y^1(p)$, $Y^2(p)$ 是线性无关的. 我们将 Y^A 按如下方式投影到 Σ_t. 我们可以找到适当的函数 λ^A, $A = 1, 2$, 使得向量场

$$Y'^A = Y^A - \lambda^A L' \tag{19.230}$$

与 Σ_t 相切. 因为 Y'^A 在 g 下与 L' 正交, 从而与 $C^-_{out}(q_0)$ 相切, 进而相切于截面 $C^-_{out}(q_0)\bigcap\Sigma_t$. 由于 L' 由下式给出:

$$L' = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial F^u/\partial\tau}{\partial F^t/\partial\tau}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \not{F}^A/\partial\tau}{\partial F^t/\partial\tau}\frac{\partial}{\partial \vartheta^A} \tag{19.231}$$

我们可以取

$$\lambda^A = \frac{\partial F^t}{\partial(\not{p}_0)_A} \tag{19.232}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^t}{\partial \tau} Y'^A = &(\frac{\partial F^u}{\partial(\not{p}_0)_A}\frac{\partial F^t}{\partial \tau} - \frac{\partial F^t}{\partial(\not{p}_0)_A}\frac{\partial F^u}{\partial \tau})\frac{\partial}{\partial u} \\ &+(\frac{\partial \not{F}^B}{\partial(\not{p}_0)_A}\frac{\partial F^t}{\partial \tau} - \frac{\partial F^t}{\partial(\not{p}_0)_A}\frac{\partial \not{F}^B}{\partial \tau})\frac{\partial}{\partial \vartheta^B}\end{aligned} \tag{19.233}$$

从而 $(Y'^1(p_M), Y'^2(p_M))$ 是 $T_{p_M}(C^-_{out}(q_0)\bigcap\Sigma_0)$ 的一组基, 前提是 p_M 不与 q_0 共轭. 现在我们由 (19.223) 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^u_0}{\partial(\not{p}_0)_A} &= \frac{\partial F^u}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial(\not{p}_0)_A} + \frac{\partial F^u}{\partial(\not{p}_0)_A} \\ \frac{\partial \not{G}^B_0}{\partial(\not{p}_0)_A} &= \frac{\partial \not{F}^B}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial(\not{p}_0)_A} + \frac{\partial \not{F}^B}{\partial(\not{p}_0)_A}\end{aligned} \tag{19.234}$$

同样对方程 $F^t(f(\not{p}_0);\not{p}_0) = 0$ 关于 $\not{p}_0$ 隐性地求微分得到

$$\frac{\partial f}{\partial(\not{p}_0)_A} = -\frac{\partial F^t/\partial(\not{p}_0)_A}{\partial F^t/\partial \tau} \tag{19.235}$$

代入 (19.234), 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^u_0}{\partial(\not{p}_0)_A} &= (-\frac{\partial F^u}{\partial \tau}\frac{\partial F^t}{\partial(\not{p}_0)_A} + \frac{\partial F^t}{\partial \tau}\frac{\partial F^u}{\partial(\not{p}_0)_A})\frac{1}{\partial F^t/\partial \tau} \\ \frac{\partial \not{G}^B_0}{\partial(\not{p}_0)_A} &= (-\frac{\partial \not{F}^B}{\partial \tau}\frac{\partial F^t}{\partial(\not{p}_0)_A} + \frac{\partial F^t}{\partial \tau}\frac{\partial \not{F}^B}{\partial(\not{p}_0)_A})\frac{1}{\partial F^t/\partial \tau}\end{aligned} \tag{19.236}$$

与 (19.233) 比较, 我们有

$$Y'^A = \frac{\partial G^u_0}{\partial(\not{p}_0)_A}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \not{G}^B_0}{\partial(\not{p}_0)_A}\frac{\partial}{\partial \vartheta^B} \tag{19.237}$$

所以 (19.227) 变为

$$Y'^A(p_M)u' = 0, \quad A = 1, 2 \tag{19.238}$$

我们得出 $(Y'^1(p_M), Y'^2(p_M))$ 是 $T_{p_M}S'_{0,u'}$ 的一组基, 前提是 $Y'^1(p_M)$, $Y'^2(p_M)$ 是线性无关的. 所以 (19.228) 在 p_M 不与 q_0 共轭时成立. 然而 (19.226) 在 p_M 与 q_0

共轭时也成立, 这时我们需要沿着以 q_0 为终点 $\not{p}_{0,M}$ 为角动量的外向测地线对那些非共轭点取一个极限 $\tau = \tau_n \to f(\not{p}_{0,M})$. 这时 p_M 对应于 $\tau = f(\not{p}_{0,M})$.

等式 (19.228) 等价于 L' 在 g 下与 $S'_{0,u'}$ 在 p_M 处正交. 所以可以将 u' 延拓为一个声学函数使得它的水平集是外向的特征超曲面 $C'_{u'}$, 其截面为 $C'_{u'} \bigcap \Sigma_0 = S'_{0,u'}$, 外向特征超曲面 $C'_{u'}$ 过 p_M 的生成子与以 q_0 为终点 $\not{p}_{0,M}$ 为角动量的外向类声测地线相同.

现在我们从一个更一般的观点来考虑我们的主要问题. 我们考虑的是理想流体运动方程的初值问题, 初值是取在超平面 Σ_0 上, 并且在一个紧集 $P_0 \subset \Sigma_0$ 外面对应于常状态. 我们可以取 $S_{0,0}$ 是 Σ_0 中任意一个包含 P_0 的球面. 第二章的构造就给出了一个以 $S_{0,0}$ 为基础的声学函数 u. 如果初值是等熵无旋的, 在适当的尺度和平移变换后, 定理 17.1 可以给出一个初值在形如 (19.7) 的区域 V_{ϵ_0} 中的发展, 它与 Σ_0 中以 $S_{0,0}$ 和半径为 $1-\epsilon_0$ 的同心球面为边界的环形区域对应. 然后由局部存在性定理, 所有对应于包含 P_0 的 $S_{0,0}$ 的发展的并仍然是初值的一个发展, 它包含在最大发展中, 所有区域 V_{ϵ_0} 的并包含在最大解定义域的闭包中. 现在考虑一个属于最大解定义域奇异边界的点 q_0 使得 $q_0 \in V'_{\epsilon_0}$, 其中 V'_{ϵ_0} 是与声学函数 u' 相关联的区域, 它对应于球面 $S'_{0,0}$. 所以 $q_0 \in \Sigma^{\epsilon}_{t'_{*\epsilon}}$ 对某个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 成立, 其中 $t'_{*\epsilon} = \inf_{u' \in [0,\epsilon]} t'_*(u')$ 和 $t'_*(u')$ 是 $C'_{u'}$ 生成子在最大解定义域中参数的上确界. 则对任意给定的对应于给定球面 $S_{0,0}$ 的声学函数 u, 从上述过程 (交换 u 和 u' 的角色) 可以看出存在一个外向的与 u 相关的特征超曲面 C_u 和一个到达 q_0 的 C_u 的生成子, 它以 $t'_{*\epsilon}$ 为参数的上确界, 包含在 V'_{ϵ_0} 中, 从而也包含在 V_{ϵ_0} 的并中. 由从一个声学函数到另一个声学函数的变换的性质, 即如命题 19.2 中所陈述的那样, 定理 17.1 对所有区域 V_{ϵ_0} 的并成立.

然而我们可以将定理 17.1 所覆盖的区域按如下方式做进一步延拓. 我们可以将超平面 Σ_t 替换为 $\Sigma_{\alpha;t}$, 其中对任意 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} < 1$$

和对任意 $t \in \mathbb{R}$, $\Sigma_{\alpha;t}$ 是 Galileo 时空中的超平面:

$$x^0 = t + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i x^i$$

超平面 $\Sigma_{\alpha;0}$ 相对于声学度量 g 是类空的, 前提是 $\Sigma_{\alpha;0}$ 上面的初值与常状态之间的差别足够小. 然后我们像上面一样考虑一个 Σ_0 中的球面 $S_{0,0}$ 使得 Σ_0 上面

的初值在 $S_{0,0}$ 外面对应于常状态, 然后再构造一个相对应的声学函数 u. 则曲面 $S_{\alpha;t,0} = C_0 \bigcap \Sigma_{\alpha;t}$ 是 Euclid 球面. 一阶变分还是像以前那样定义, 因为它们是对应于常状态空间的等距群. 在那些用来定义高阶变分的向量场 T, Q, R_i, $i = 1,2,3$ 中, Q 还是像以前那样定义, T 则定义为与超平面 $\Sigma_{\alpha;t}$ 相切, 并且在声学度量 g 下与曲面 $S_{\alpha;t,u} = C_u \bigcap \Sigma_{\alpha;t}$ 正交, 而且还满足 $Tu = 1$, 而 R_i, $i = 1,2,3$ 则定义为与 g_0 相关并保持 $\Sigma_{\alpha;t}$ 和 $S_{\alpha;t,0}$ 不变的旋转向量场在度量 g 下到曲面 $S_{\alpha;t,u}$ 的投影. 我们注意到类似地, $\Sigma_{\alpha;t}$ 相对于声学度量仍然是类空的, 前提是初值与常状态之间的差别足够小. 我们用这种方法得到一个定理 17.1 的推广和一个与 V_{ϵ_0} 类似的区域 $V_{\alpha;\epsilon_0}$, 这时我们当然要用 $\Sigma_{\alpha;t}$ 代替 Σ_t. 定理 17.1 所包括的区域最大可以是所有区域 $V_{\alpha;\epsilon_0}$ 的并, 并且上一段中的注记可以用到这个最大的区域.

19.4 $\mathcal{H}$ 在 Galileo 时空中直角坐标下的样子

我们现在考虑 $\mathcal{H}$ 的一个分支及其过去的边界, 即相对应的 $\partial_-\mathcal{H}$ 的分支. 由命题 19.1 它们分别是 $\mathcal{M}_{\epsilon_0}$ 的三维和二维光滑子流形. 我们现在将在 Galileo 时空中研究 $\mathcal{H}$ 以及 $\partial_-\mathcal{H}$. 为了不混淆, 我们用 H 和 ∂_-H 分别记 $\mathcal{H}$ 和 $\partial_-\mathcal{H}$ 在 Galileo 时空中的像.

现在由命题 19.1, $\partial_-\mathcal{H}$ 是 $(\mathcal{M}_{\epsilon_0}, g)$ 中的类空曲面, 它与不变曲线相交但不相切. 所以存在一个定义在连通区域 $\mathcal{B} \subset S^2$ 上的光滑函数 u_*, 使得 $\partial_-\mathcal{H}$ 的连通分支在典则坐标下表示为

$$\{(t_*(u_*(\vartheta), \vartheta), u_*(\vartheta), \vartheta), \ \vartheta \in \mathcal{B}\} \tag{19.239}$$

$\mathcal{H}$ 对应的连通分支由下式给出:

$$\{(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta), \ u_* > u > \underline{u}(\vartheta), \ \vartheta \in \mathcal{B}\} \tag{19.240}$$

其中一个给定的以 u 为参数的不变曲线, 要么延拓到任意的 $u > 0$, 在这种情形 $\underline{u}(\vartheta) = 0$; 要么不变曲线只存在到 $u = \underline{u}(\vartheta)$, 这是与内向特征超曲面 $\underline{C}$ 相交的点, 它由 $\partial_-\mathcal{H}$ 的下一个外向分支的内向类声法向测地线生成.

再考虑 ∂_-H 的对应于 (19.239) 在 Galileo 时空中像的分支. 这是区域 $\mathcal{B} \subset S^2$ 在映射

$$\vartheta \longmapsto x = q(\vartheta), \quad 其中 \quad q^\mu(\vartheta) = x^\mu(t_*(u_*(\vartheta), \vartheta), u_*(\vartheta), \vartheta), \quad \mu = 0,1,2,3 \tag{19.241}$$

下的像. 这个映射是一对一的 (这是直角坐标与声学坐标之间的变换). 我们将看到这个映射是满秩的. 考虑二维矩阵 m, 其元素为

$$m_{AB} = g_{\mu\nu} X_A^\mu \frac{\partial q^\nu}{\partial \vartheta^B} \tag{19.242}$$

现在我们有 (见 (19.115))

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x^0}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial x^i}{\partial t} = L^i \\ &\frac{\partial x^0}{\partial u} = \frac{\partial x^0}{\partial \vartheta^A} = 0, \quad \frac{\partial x^i}{\partial u} = \mu(\alpha^{-1}\hat{T}^i + \hat{\Xi}^A X_A^i), \quad \frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A} = X_A^i \end{aligned} \tag{19.243}$$

以及由 (19.241) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^0}{\partial \vartheta^B} &= \frac{\partial t_*}{\partial u}\frac{\partial u_*}{\partial \vartheta^B} + \frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^B} \\ \frac{\partial q^j}{\partial \vartheta^B} &= \frac{\partial x^j}{\partial t}\left(\frac{\partial t_*}{\partial u}\frac{\partial u_*}{\partial \vartheta^B} + \frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^B}\right) + \frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial u_*}{\partial \vartheta^B} + \frac{\partial x^j}{\partial \vartheta^B} \end{aligned} \tag{19.244}$$

现在在 $\mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}$ 上我们有 $\mu = 0$, 所以由 (19.243) 有

$$\frac{\partial x^i}{\partial u} = 0 \quad 在\ \mathcal{H}\bigcup\partial_-\mathcal{H}\ 上 \tag{19.245}$$

进一步, 由命题 19.1,

$$\frac{\partial t_*}{\partial u} = 0 \quad 在\ \partial_-\mathcal{H}\ 上 \tag{19.246}$$

所以将 (19.245) 代入 (19.244) 再考虑 (19.245) 和 (19.246), 我们得到

$$\frac{\partial q^0}{\partial \vartheta^B} = \frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^B}, \quad \frac{\partial q^j}{\partial \vartheta^B} = L^j \frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^B} + X_B^j$$

或者

$$\frac{\partial q^\nu}{\partial \vartheta^B} = L^\nu \frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^B} + X_B^\nu \tag{19.247}$$

将这个代入 (19.242), 我们得到

$$m_{AB} = g(X_A, X_B) = \not{g}_{AB} \tag{19.248}$$

所以 $\det m = \det \not{g} > 0$ 并且映射 (19.241) 是满秩的. 从而这个映射是到它像的微分同胚并且它的像, 即 $\partial_- H$ 的连通分支, 是 Galileo 时空中一个光滑的二维子流形.

类似地, 我们可以证明 H 的连通分支除去它的过去边界, 即相对应的 $\partial_- H$ 的连通分支以外也是 Galileo 时空中的三维嵌入子流形 (这只需要运用线性无关的定义, 三个线性无关的向量分别是 $L\frac{\partial t_*}{\partial u}$ 和 $L\frac{\partial t_*}{\partial \vartheta^A} + X_A$). 为了分析在 $\partial_- H$ 附近的行为, 我们将导出一个 H 上的不变曲线在 $\partial_- H$ 邻域中的解析表达式. 现在 H 的不变曲线在 Galileo 时空的直角坐标下以 u 为参数的参数方程为 (见 (19.240))

$$x^\mu = x^\mu(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta), \quad u_*(\vartheta) > u > \underline{u}(\vartheta), \quad \vartheta = \text{const} \tag{19.249}$$

或者由于 $x^0 = t$,

$$\begin{aligned} x^0 &= t_*(u,\vartheta) \\ x^i &= x^i(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta), \quad u_*(\vartheta) > u > \underline{u}(\vartheta), \quad \vartheta = \text{const} \end{aligned} \tag{19.250}$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{du}(u) &= \frac{\partial t_*}{\partial u}(u,\vartheta) \\ \frac{dx^i}{du}(u) &= \frac{\partial x^i}{\partial t}(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta)\frac{\partial t_*}{\partial u}(u,\vartheta) + \frac{\partial x^i}{\partial u}(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta) \end{aligned}$$

将 (19.243) 代入再考虑到 (19.245), 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{du}(u) &= \frac{\partial t_*}{\partial u}(u,\vartheta) \\ \frac{dx^i}{du}(u) &= L^i(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta)\frac{\partial t_*}{\partial u}(u,\vartheta) \end{aligned} \tag{19.251}$$

或者

$$\frac{dx^\mu}{du}(u) = L^\mu(t_*(u,\vartheta), u, \vartheta)\frac{\partial t_*}{\partial u}(u,\vartheta) \tag{19.252}$$

我们再次看到在 Galileo 时空中 L 是与不变曲线相切的. 我们同样看到在 $u = u_*(\vartheta)$, 即在 $\partial_- H$ 上面, 由 (19.246), 上式右端为 0, 所以不变曲线处在过去的终点是一个奇异点.

为了分析在过去终点的行为, 我们考虑在这一点处的二阶和三阶导数. 对

(19.251) 关于 u 求微分, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^0}{du^2}(u) &= \frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u,\vartheta)\\ \frac{d^2x^i}{du^2}(u) &= \frac{\partial L^i}{\partial t}(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta)(\frac{\partial t_*}{\partial u})^2(u,\vartheta)\\ &\quad+\frac{\partial L^i}{\partial u}(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta)\frac{\partial t_*}{\partial u}(u,\vartheta)\\ &\quad+L^i(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta)\frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u,\vartheta)\end{aligned} \tag{19.253}$$

同样对 (19.48) 关于 u 求微分, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u,\vartheta) = &-(\frac{\partial\mu}{\partial t})^{-2}(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta)\\ &\cdot(\frac{\partial\mu}{\partial t}(\frac{\partial^2\mu}{\partial u\partial t}\frac{\partial t_*}{\partial u}+\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2})-\frac{\partial\mu}{\partial u}(\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\frac{\partial t_*}{\partial u}+\frac{\partial^2\mu}{\partial u\partial t}))\end{aligned}$$

将 (19.48) 代入 $\partial t_*/\partial u$ 的表达式则可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u,\vartheta)\\ &=-(\frac{\partial\mu}{\partial t})^{-3}((\frac{\partial\mu}{\partial t})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}-2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial^2\mu}{\partial u\partial t}+(\frac{\partial\mu}{\partial u})^2\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2})(t_*(u,\vartheta),u,\vartheta)\end{aligned} \tag{19.254}$$

特别地, 在 $u=u_*(\vartheta)$ 与 (19.51) 相容, 我们得到

$$\frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u_*(\vartheta),\vartheta)=a(\vartheta) \tag{19.255}$$

其中由 (19.45) 的第一个方程有

$$a(\vartheta)=-\frac{\partial^2\mu/\partial u^2}{\partial\mu/\partial t}(q(\vartheta))>0 \tag{19.256}$$

并且我们记

$$q(\vartheta)=(t_*(u_*(\vartheta),\vartheta),u_*(\vartheta),\vartheta) \tag{19.257}$$

为 $\partial_- H$ 上面的终点. 由 (19.246) 和 (19.255), 在 $u=u_*(\vartheta)$ 处 (19.253) 变为

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^0}{du^2}(u_*(\vartheta)) &= a(\vartheta)\\ \frac{d^2x^i}{du^2}(u_*(\vartheta)) &= L^i(q(\vartheta))a(\vartheta)\end{aligned} \tag{19.258}$$

进一步, 对 (19.253) 关于 u 求微分并在 $u = u_*(\vartheta)$ 取值, 我们由 (19.246) 得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^3x^0}{du^3}(u_*(\vartheta)) = \frac{\partial^3 t_*}{\partial u^3}(u_*(\vartheta), \vartheta) \\
&\frac{d^3x^i}{du^3}(u_*(\vartheta)) = 2\frac{\partial L^i}{\partial u}(q(\vartheta))\frac{\partial^2 t_*}{\partial u^2}(u_*(\vartheta), \vartheta) + L^i(q(\vartheta))\frac{\partial^3 t_*}{\partial u^3}(u_*(\vartheta), \vartheta)
\end{aligned}
\tag{19.259}
$$

我们现在将确定如下系数:

$$
\frac{\partial^3 t_*}{\partial u^3}(u_*(\vartheta), \vartheta) \quad 和 \quad \frac{\partial L^i}{\partial u}(q(\vartheta)) = TL^i(q(\vartheta))
$$

考虑到对任意光滑函数 $f(t, u, \vartheta)$, 我们有

$$
\frac{d}{du} f(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta) = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t_*}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}
$$

所以由 (19.246) 有

$$
(\frac{d}{du} f(t_*(u, \vartheta), u, \vartheta))_{u=u_*(\vartheta)} = \frac{\partial f}{\partial u}(q(\vartheta))
$$

对 (19.254) 关于 u 求微分并在 $u = u_*(\vartheta)$ 取值得

$$
\frac{\partial^3 t_*}{\partial u^3}(u_*(\vartheta), \vartheta) = b(\vartheta) \tag{19.260}
$$

其中

$$
b(\vartheta) = (\frac{\partial \mu}{\partial t})^{-2}(3\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial t \partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial t}\frac{\partial^3 \mu}{\partial u^3})(q(\vartheta)) \tag{19.261}
$$

接下来 TL^i 由 (3.184) 给出:

$$
TL^i = a_T \hat{T}^i + b_T^i \tag{19.262}
$$

其中 a_T 由 (3.187) 给出而 b_T^i 是由 (3.189) 定义的 $S_{t,u}$ 上的切向量场的直角坐标分量. 在 $H \bigcup \partial_- H$ 上面, 特别是在 $q(\vartheta)$, 这些公式化为

$$
\begin{aligned}
a_T &= \alpha^{-1} L\mu < 0 \\
b_T^i &= (\not{g}^{-1} \cdot \not{d}\mu)^i
\end{aligned}
\tag{19.263}
$$

将上式以及 (19.255) 代入 (19.259), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^3x^0}{du^3}(u_*(\vartheta)) = b(\vartheta) \\
&\frac{d^3x^i}{du^3}(u_*(\vartheta)) = L^i(q(\vartheta))b(\vartheta) + 2a(\vartheta)(a_T\hat{T}^i + b_T^i)(q(\vartheta))
\end{aligned}
\tag{19.264}
$$

由 (19.258) 和 (19.264), 我们得到 H 上的不变曲线在其起始点 $q(\vartheta) \in \partial_- H$ 的一个邻域中的表达式:

$$
\begin{aligned}
x^0(u) &= x^0(q(\vartheta)) + \frac{1}{2}a(\vartheta)(u - u_*(\vartheta))^2 + \frac{1}{6}b(\vartheta)(u - u_*(\vartheta))^3 + O((u - u_*(\vartheta))^4) \\
x^i(u) &= x^i(q(\vartheta)) + \frac{1}{2}a(\vartheta)L^i(q(\vartheta))(u - u_*(\vartheta))^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}(b(\vartheta)L^i(q(\vartheta)) + 2a(\vartheta)(a_T\hat{T}^i + b_T^i)(q(\vartheta)))(u - u_*(\vartheta))^3 + O((u - u_*(\vartheta))^4)
\end{aligned}
$$

总结上述结论我们得到如下命题:

命题 19.3 Galileo 时空中最大解定义域的奇异边界为 $H \bigcup \partial_- H$. 考虑一个给定的 H 的分支及其边界, 即相对应的 $\partial_- H$ 的分支. $\partial_- H$ 的分支是 Galileo 时空中一个光滑的二维嵌入子流形, 它相对于声学度量是类空的. H 的连通分支是 Galileo 时空中一个光滑的三维嵌入子流形, 它由关于声学度量是 0 弧长的不变曲线生成, 其过去的终点在相对应的 $\partial_- H$ 的分支上. 在其终点 $q(\vartheta) \in \partial_- H$ 的一个邻域中, 不变曲线的参数表达式如下:

$$
\begin{aligned}
x^0(u) &= x^0(q(\vartheta)) + \frac{1}{2}a(\vartheta)(u - u_*(\vartheta))^2 + \frac{1}{6}b(\vartheta)(u - u_*(\vartheta))^3 + O((u - u_*(\vartheta))^4) \\
x^i(u) &= x^i(q(\vartheta)) + \frac{1}{2}a(\vartheta)L^i(q(\vartheta))(u - u_*(\vartheta))^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}(b(\vartheta)L^i(q(\vartheta)) + 2a(\vartheta)(a_T\hat{T}^i + b_T^i)(q(\vartheta)))(u - u_*(\vartheta))^3 + O((u - u_*(\vartheta))^4)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a(\vartheta) &= -\frac{\partial^2\mu/\partial u^2}{\partial\mu/\partial t}(q(\vartheta)) > 0 \\
b(\vartheta) &= (\frac{\partial\mu}{\partial t})^{-2}(3\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial t\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial^3\mu}{\partial u^3})(q(\vartheta)) \\
a_T(q(\vartheta)) &= (\alpha^{-1}L\mu)(q(\vartheta)) < 0 \\
b_T^i(q(\vartheta)) &= (\not{g}^{-1} \cdot \not{d}\mu)^i(q(\vartheta))
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] D. Bernoulli, *Hydrodynamica*, Argentorati, 1738.

[2] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.

[3] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland Publ. Comp., 1975.

[4] D. Christodoulou, *The Action Principle and Partial Differential Equations*, Ann. Math. Stud., vol. 146, Princeton University Press, 2000.

[5] D. Christodoulou, *The Formation of Shocks in 3-Dimensional Fluids*, EMS Monographs in Mathematics, EMS Publishing House, 2007.

[6] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space*, Princeton Mathematical Series, vol. 41, Princeton University Press, 1993.

[7] R. Clausius, *Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmatheorie*, Annalen der Physik und Chemie **125** (1865), 353–400.

[8] J.-B. le R. D'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Mém. Acad. Sci. Berlin **3** (1749), 214–253.

[9] L. Euler, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Hist. de l'Acad. de Berlin (1755).

[10] L. Euler, *De principiis motus fluidorum*, Novi Comm. Acad. Petrop. xiv, vi (1759, 1761).

[11] D. Glibarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.

[12] S. Klainerman, *Uniform decay and Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321–332.

[13] P.S. Laplace, *Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau*, Ann. de Chim. et de Phys.iii **238** (1816).

[14] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. (1918), 235–257.

[15] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull.A.M.S. **84** (1978), 1182–1238.

[16] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, Regional Conf. Series in Appl. Math., vol. 7, SIAM, 1972.

[17] B. Riemann, *Über die Fortpflanzung ebener Luftvellen von endlicher Schwingungsweite*, Mathematisch-physikalische Klasse **8** (1858—1859), 43.

[18] T. Sideris, *Formation of sigularities in three-dimensional fluids*, Comm. Math. Phys. **101** (1985), 475–485.

本书主要考虑三维空间中，其初值在单位球面外为常值的任意状态方程的经典可压缩欧拉方程。当初值与常状态差别适当小时，我们建立的定理可以给出关于解的完整描述。特别地，解的定义域的边界包含一个奇异部分，在那里波前的密度将会趋向于无穷大，从而激波形成。在本书中，我们采用几何化方法,得到了关于这个奇异部分的完整的几何描述以及解在这部分性态的详细分析，其核心概念是声学时空流形。

与相关领域中其他数学家的工作相比，本书的结果相对完整并且具有一般性。与本书第一作者之前的一个关于相对论流体的工作相比，本书不仅给出了更简单且自成体系的证明，而且还把某些结论做得更优。同时本书还详细解释了证明方法中的主要思想，讨论了只在非相对论情形出现的一些几何上的性质。

本书可供从事偏微分方程研究，特别是从事流体动力学研究的数学家参考。

关键词：激波形成，可压缩流，三维流体， 经典可压缩欧拉方程， 几何分析



学科类别：数学



定价 98.00 元

网址：academic.hep.com